Лабораторная работа № 14

Equation Section 14Изучение свободных электромагнитных колебаний в LCR-контуре

Цель работы

Изучение характеристик свободного колебательного процесса, возбуждаемого импульсным воздействием в простом *LCR*-контуре.

Приборы и оборудование:

Модули «ФПЭ-10/11», «ПИ» и два магазина сопротивлений «МС».

Постоянное оборудование: источник питания «ИП», генератор ГЗ-112, осциллограф С1-93 (С1-83), два цифровых вольтметра, комплект соединительных кабелей.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Описание свободного колебательного процесса. Уравнение процесса. Характеристики затухания.

Простой колебательный контур состоит из последовательно соединенных индуктивности *L*, емкости *C*, и активного сопротивления *R*. Если предварительно запасти энергию, например, зарядив конденсатор от внешнего источника тока (рис. 14.1), а затем подключить конденсатор к катушке индуктивности, то в образовавшемся изолированном контуре возникнут *свободные* электромагнитные колебания.

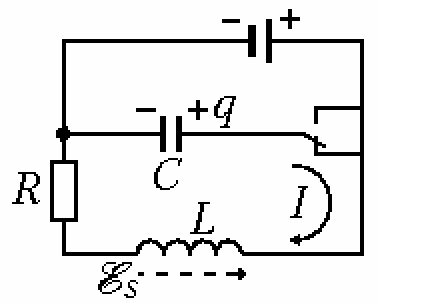

Рис. 14.1. Схема возбуждения свободных колебаний в контуре

Действительно, при разряде конденсатора появляются изменяющиеся во времени ток и пропорциональное ему магнитное поле. Меняющееся магнитное поле порождает в контуре ЭДС самоиндукции x_s, которая по закону Ленца сначала замедляет скорость разряда конденсатора, а после того, как конденсатор полностью разрядится, продолжает поддерживать ток в прежнем направлении. В результате происходит перезарядка конденсатора. Затем процесс разряда конденсатора продолжается, но в обратном направлении и т. д. Возникающие свободные колебания заряда *q*, тока *I* и напряжений *U* на элементах контура совершаются с циклической частотой ω (периодом $T = 2\pi/\omega$), а колебания электрической $W_e = CU^2/2$ и магнитной $W_m = LI^2/2$ энергий — с частотой 2ω (максимумы энергий появляются дважды за период *T*).

Вследствие джоулевых потерь в активном сопротивлении контура *R* часть энергии колебаний превращается в теплоту, что приводит к затуханию колебаний. При больших величинах R колебания могут вообще не возникнуть — наблюдается апериодический разряд конденсатора.

Найдем уравнение, описывающее свободные затухающие колебания в контуре. Заряд q на конденсаторе, напряжение на нем U, ток в контуре I и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_s$ связаны соотношениями:

$$q = CU; \quad I = \frac{dq}{dt} = C\frac{dU}{dt}; \quad \mathcal{E}_s = -\frac{dI}{dt} = -LC\frac{d^2U}{dt^2}. \tag{14.1}$$

По закону Кирхгофа для полной цепи имеем

$$IR = -U + \mathcal{E}_s. \tag{14.2}$$

С учетом соотношений (14.1) уравнение (14.2) для переменной U приобретает вид

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2\gamma\frac{dU}{dt} + \omega_0^2 U = 0, \tag{14.3}$$

где введены обозначения $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ — коэффициент затухания и $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ — собственная частота контура. Легко показать, что точно такой же вид имеют уравнения для заряда конденсатора q и тока I.

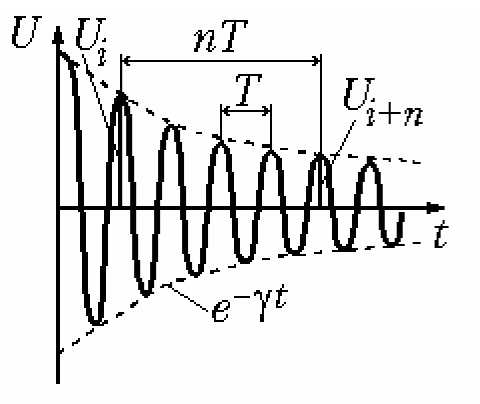

Рис. 14.2. Свободные затухающие колебания ($\gamma < \omega_0$)

Из теории известно, что полученное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами в зависимости от соотношения между γ и ω_0 имеет решения — функции, по-разному меняющиеся во времени.

При условии $\gamma < \omega_0$ (малое затухание) уравнение (14.3) имеет решение в виде

$$U = U_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos\omega t, \text{ где } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{14.4}$$

которое описывает затухающий колебательный процесс (рис. 14.2).

Затухание нарушает периодичность колебаний и строгое применение понятия периода и частоты к ним не применимо. Однако при малом затухании условно пользуются понятием периода как промежутка времени между последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся величины. С учетом этой оговорки период свободных затухающих колебаний в контуре равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \tag{14.5}$$

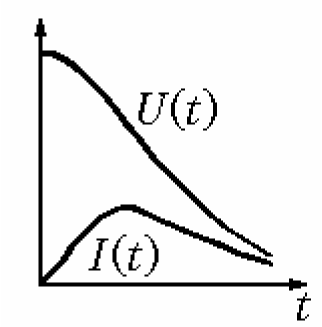

Рис. 14.3. Апериодический процесс ($\gamma \geq \omega_0$)

С увеличением затухания период колебаний растет, обращаясь в бесконечность при $\gamma = \omega_0$, т. е. движение перестает быть периодическим. В данном случае ($\gamma \geq \omega_0$) напряжение на конденсаторе асимптотически приближается к нулю при $t \to 0$ и будет описываться функцией, отличной от вида (14.4) (рис. 14.3).

Такой процесс называется *апериодическим*. Переход к нему происходит при величине сопротивления контура

$$R \geq R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{14.6}$$

В качестве меры затухания колебательного процесса кроме коэффициента затухания γ используются и другие характеристики:

1) *время релаксации* τ — интервал времени, за который амплитуда колебаний уменьшается в e = 2,72 раза

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}; \tag{14.7}$$

2) *логарифмический декремент затухания* λ — величина, определяемая как натуральный логарифм отношения двух амплитуд $U(t)$ и $U(t+T)$, разделенных интервалом времени, равным периоду колебаний T:

$$\lambda = \ln\frac{U(t)}{U(t+T)} = \gamma T = \frac{R}{2L}T. \tag{14.8}$$

На практике измеряется отношение амплитуд $U(t)$ и $U(t+nT)$, отстоящих друг от друга на n периодов, тогда

$$\lambda = \frac{1}{n}\ln\frac{U(t)}{U(t+nT)}. \tag{14.9}$$

Из формулы (14.9) вытекает смысл λ как величины, обратной числу периодов, за время которых амплитуда колебаний уменьшается в e = 2,72 раза.

3) *добротность контура* Q — величина, определяемая отношением

$$Q = 2\pi\frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}, \tag{14.10}$$

где W — запасенная энергия, $\Delta W = W(t) - W(t+T)$ — средняя потеря энергии за период T.

При малом затухании ($\gamma^2 < \omega_0^2$) величина добротности равна

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e, \qquad (14.11)$$

где N_e — число колебаний, происходящих за время релаксации τ. Если выразить добротность через параметры контура, то получим

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (14.12)$$

Фазовая плоскость

В ряде случаев удобно изучать колебательные и нелинейные процессы в системе координат (I, U) — «ток-напряжение». В механике аналогичными координатами являются скорость и перемещение. Плоскость таких координат носит название плоскости состояний или *фазовой плоскости*, а кривая, изображающая зависимость этих координат называется *фазовой кривой*.

Рассмотрим фазовую кривую для процессов в LCR-контуре. Для нахождения силы тока продифференцируем функцию $U(t)$ (14.4) по времени:

$$I = C\frac{dU}{dt} = CU_0 e^{-\gamma t}(-\gamma\cos\omega t - \omega\sin\omega t).$$

Умножив правую часть этого выражения на равный единице множитель $\omega_0 / \sqrt{\omega^2 + \gamma^2}$, тогда выражение в скобках по формулам тригонометрии может быть преобразовано к виду $\omega_0 \cdot \cos(\omega t + \psi)$, где угол ψ определяется соотношениями $\cos\psi = -\gamma/\omega_0$, $\sin\psi = \omega/\omega_0$. Это означает, что ток в контуре опережает по фазе на ψ напряжение на конденсаторе, причем $\pi/2 \le \psi \le \pi$:

$$I = I_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \psi). \qquad (14.13)$$

Фазовая кривая $I(U)$ описывается в параметрической форме системой из двух уравнений

$$\begin{cases} U = U_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t) \\ I = I_0 e^{-\gamma t} \cdot \cos(\omega t + \psi) \end{cases}. \qquad (14.14)$$

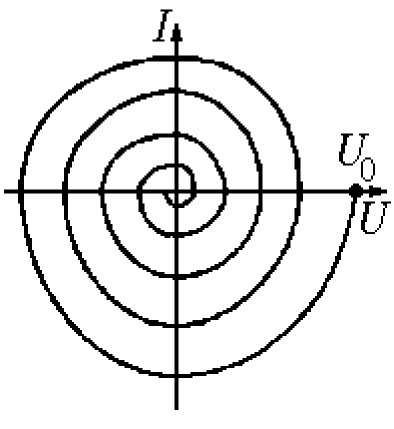

Рис. 14.4. Фазовая кривая для LCR-контура

При $R = 0$ ($\gamma = 0$) опережение тока по фазе составляет $\pi/2$ и фазовая кривая представляет собой эллипс, как в случае сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с постоянными амплитудами, сдвинутых по фазе на четверть периода. В реальной ситуации при наличии затухания (R > 0) амплитуды напряжения и тока в контуре непрерывно убывают, и фазовая кривая получается незамкнутой (рис. 14.4).

МЕТОДИКА ИЗМЕРЕНИЙ

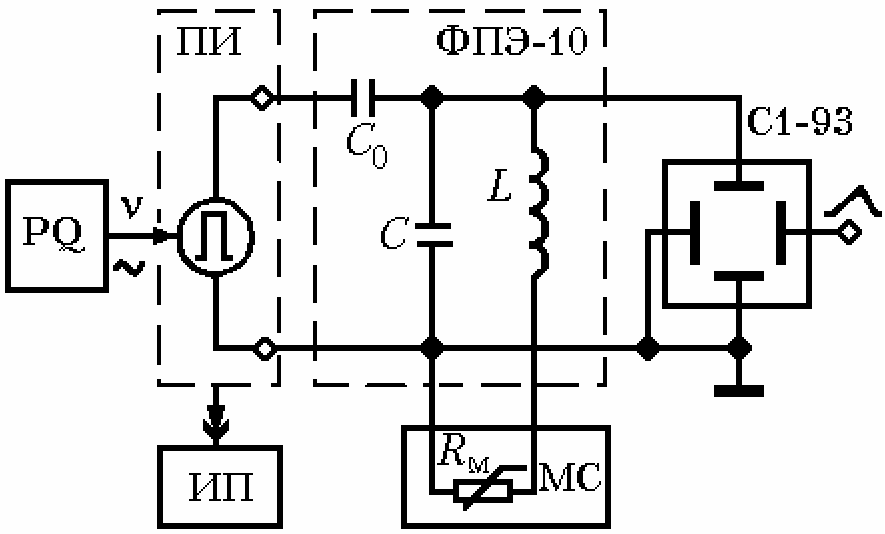

Рис. 14.5. Схема для наблюдения затухающих колебаний. PQ — генератор синусоидальных колебаний; ПИ — преобразователь импульсов; ФПЭ-10 — модуль с контуром; ИП — источник питания; С1-93 — осциллограф

Для наблюдения зависимости напряжения на конденсаторе контура от времени $U(t)$ используется электрическая схема, изображенная на рис. 14.5. Колебания в контуре возбуждаются короткими импульсами напряжения от преобразователя «ПИ», периодически повторяющимися с частотой ν задающего генератора «PQ».

Контур соединен с генератором импульсов через разделительный конденсатор C_0 (емкостью значительно меньшей емкости контура C) для уменьшения влияния генератора на параметры контура.

Затухание контура определяется его полным эквивалентным сопротивлением $R_к$, которое включает в себя, в основном, сопротивление обмотки катушки, сопротивление потерь на гистерезис в сердечнике катушки, внешнее сопротивление магазина $R_м$, а также сопротивление, вносимое в контур генератором импульсов. Сопротивление R заранее неизвестно и определяется из измерений характеристик затухания реального контура (см. ниже задание 1).

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Задание 1. Измерение периода колебаний, логарифмического декремента и параметров контура.

1. Соберите электрическую схему согласно рис. 14.5. Для получена

возбуждающих импульсов на модуль «ПИ» подайте от генератора ГЗ-112 синусоидальное напряжение $\approx 3{,}5$ В (ступенчатый аттенюатор «$\triangleleft\, dB$» в положение «10», а ручка плавной регулировки повернута вправо). Установите частоту генератора $\nu \approx 40\ldots70$ Гц, задающую периодичность вырабатываемых импульсов. Длительность импульсов установите равную примерно 1…2 мс (на модуле «ПИ» нажмите кнопку «⊓», кнопку «скважность грубо» нажмите правую, а ручку плавной регулировки «скважность точно» поверните влево).

2. Включите приборы.

3. Получите устойчивую осциллограмму затухающих колебаний, в которой укладывается примерно 10 – 20 периодов. Режим синхронизации — внутренняя.

4. Измерьте период колебаний T при минимальном внешнем сопротивлении $R_м = 0$ (гнезда магазина «МС» замкните проводом).

5. Измерьте амплитуды колебаний, отстоящих друг от друга на $n = 5 \ldots 15$ периодов, и вычислите логарифмический декремент по формуле (14.9). По формулам $\gamma = \dfrac{\lambda}{T}$, $Q = \dfrac{\pi}{\lambda}$ и $\tau = \dfrac{1}{\gamma}$ рассчитайте коэффициент затухания, добротность и время релаксации.

6. Повторите измерения по пп. 4 и 5 при других значениях внешнего сопротивления $R_м$ в интервале от 1 до 200 Ом. (Для расширения пределов регулирования сопротивления при возможности включите последовательно два магазина МС). Данные измерений и вычислений занесите в таблицу 14.1.

Таблица 14.1

$R_м$, Ом	T, мс	U_i, дел	U_{i+n}, дел	n	λ	γ, с$^{-1}$	Q	τ	L, мГн	C, мкФ	R, Ом

7. Постройте график зависимости $\lambda(R_м)$. Поскольку период T при малых затуханиях практически постоянен, то зависимость $\lambda(R_м)$ можно аппроксимировать линейной функцией вида $y = ax + b$ — см. рис. 14.6. Экстраполируя опытную прямую к $\lambda = 0$, определите из графика эквивалентное сопротивление контура $R_к$, соответствующее суммарным потерям при $R_м = 0$. Занесите в таблицу полное сопротивление контура $R = R_к + R_м$

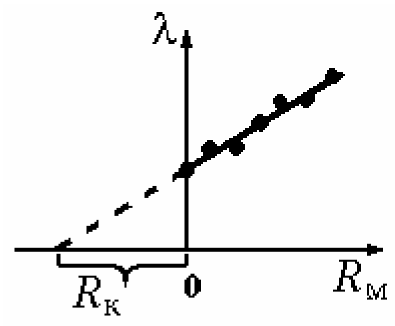

Рис. 14.6. Определение эквивалентного сопротивления контура $R_к$

Для определения параметров аппроксимации и величины $R_к$ можно воспользоваться методом наименьших квадратов (МНК) (См. Приложение 1).

8. Используя формулу (14.8), вычислите индуктивность L.

9. Модифицировав формулу (14.5), определите емкость контура C. Данные занесите в таблицу 14.1. Получите усредненные значения величин $<L>$ и $<C>$.

10. Подберите сопротивление магазина $R_{мкр}$ (качественно) при котором происходит переход к апериодическому режиму. Сравните полученное значение $(R_к + R_м)_{кр}$ с рассчитанным по формуле (14.6).

Задание 2. Исследование фазовых кривых.

Для наблюдения на экране осциллографа фазовой кривой на вертикальный и горизонтальный каналы необходимо подать напряжения, пропорциональные току в контуре (это напряжение U_{RM}, снимаемое с сопротивления $R_м$) и напряжению на конденсаторе U. Внутренняя временная развертка должна быть выключена.

1. Соберите схему согласно рис. 14.7 и получите на экране осциллографа фазовую кривую при сопротивлении магазина $R_м$ = 100 Ом. Если усиление канала X осциллографа окажется недостаточным для получения наглядной картины, то переориентируйте оси U и I, подав в канал X напряжение с конденсатора, а в канал Y напряжение с резистора $R_м$.

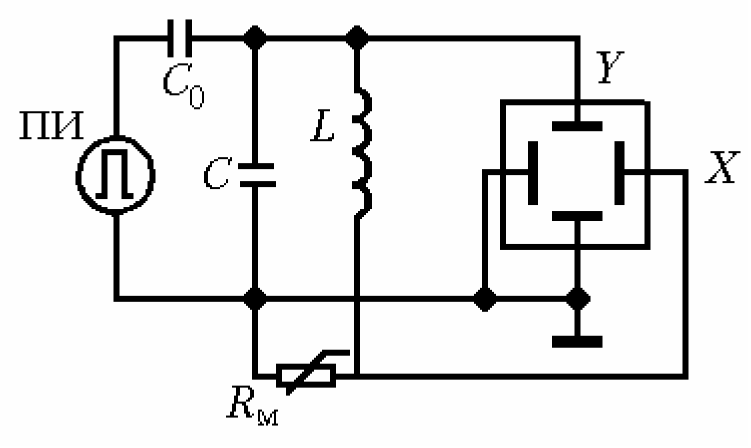

Рис. 14.7. Электрическая схема для получения фазовой кривой

2. Измерьте значения напряжений, разделенных периодом времени T, то есть расстояния от центра фазовой кривой до точки пересечения витков спирали с осью напряжения U и вычислите логарифмический декремент λ по формуле (14.9) для различных пар амплитуд и усредните результат. Данные занесите в таблицу 14.2.

Таблица 14.2.

$R_м$, Ом	$R=R_к+R_м$, Ом	U_1, дел	U_2, дел	U_3, дел	λ

3. Повторите измерения по п. 2 при других величинах $R_м$.

4. Зарисуйте фазовую кривую при апериодическом разряде конденсатора.

5. Оцените погрешность определения величины логарифмического декремента λ при сопротивлении магазина $R_м$ = 10 Ом (или 100 Ом).