

янных коэффициентов, C — $1 \times n$ вектор-строка постоянных коэффициентов, а x — n -мерный вектор состояния.

Напомним, что решением дифференциального уравнения (1.1) (или, соответственно, системы (1.2)) является функция времени $y(t)$ (или вектор-функция $x(t)$), обращающая данное уравнение (систему) в тождество и удовлетворяющая заданным начальным условиям. Для дифференциального уравнения (1.1) начальные условия накладываются на переменную y и ее производные до $(n-1)$ -го порядка включительно:

$$y^{(j)}(0) = y_{j0}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

а для системы (1.2) — на координаты вектора состояния: $x_j(0) = x_{j0}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Особо отметим, что в теории управления под начальными условиями понимают условия, которые существовали до момента приложения входного сигнала. Поэтому для любой функции $f(t)$ ее начальное значение понимается в смысле предела

$$f(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau), \quad (1.3)$$

где переменная τ стремится к нулю, оставаясь отрицательной ($\tau < 0$). При этом говорят, что предел (1.3) задает *начальные условия слева*, т.е. в начальный момент $t = -0$. В соответствии с принятой трактовкой начальных условий, имеем $u^{(i)}(0) = u^{(i)}(-0) = 0$ для всех $i = 0, 1, 2, \dots$

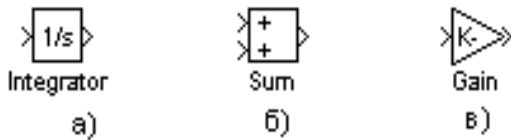


Рис. 1.1. Блоки элементарных операций: а) интегратор; б) сумматор; в) усилитель

С помощью блоков элементарных операций — *интегратора, сумматора и блока усиления* (см. рис.1.1) — могут быть составлены схемы моделирования уравнений (1.1) и (1.2). Указанные блоки легко реализуются физически (например, в виде электронных схем на основе операционных усилителей) и составляют элементную базу аналоговых вычислительных машин (АВМ).

Для составления схемы моделирования дифференциальных уравнений (1.2) необходимо использовать n интеграторов (число интеграторов определяется числом дифференциальных уравнений). При этом полагается, что на выходе j -го интегратора действует величина x_j , а на его входе, соответственно, \dot{x}_j . Далее, в соответствии со структурой правых частей уравнений (1.2) вводятся прямые и обратные связи, формирующие сигналы \dot{x}_j . Проиллюстрируем данный подход следующим примером. Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2 + 3u, \\ y = x_1 + 7x_2 \end{cases} \quad (1.4)$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ и входным воздействием $u = 2 \sin t$. Тогда схема моделирования системы (1.4) будет иметь вид, представленный на рис.1.2,

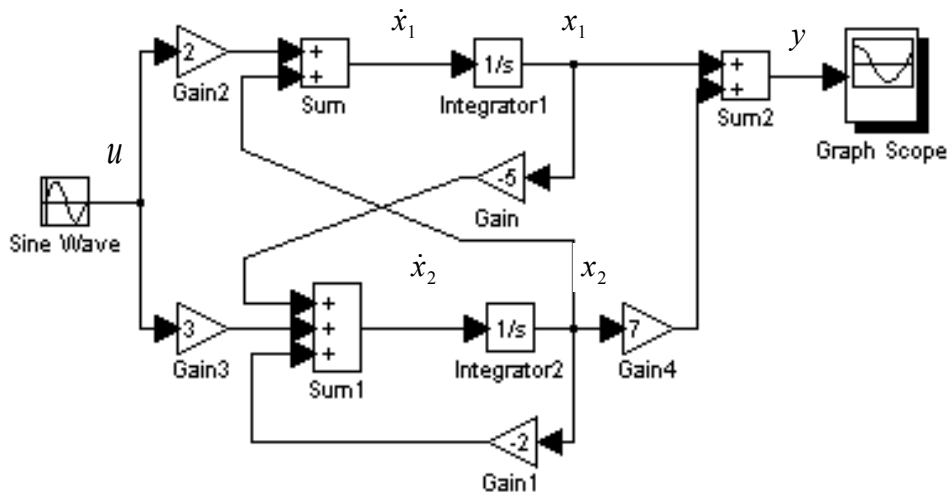


Рис.1.2. Схема моделирования системы (1.4)

где начальные условия на интеграторах соответствуют начальным значениям координат вектора состояния $x_1(0)$ и $x_2(0)$.

Существует несколько различных способов построения схем моделирования уравнения (1.1). Рассмотрим на примере один из них. Пусть динамическая система описывается уравнением

$$y^{(3)} + 5y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = 4u^{(2)} + 6u^{(1)} + 3u \quad (1.5)$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 0$ и входным воздействием $u = \sin t$.

Заменяем в (1.5) операцию дифференцирования оператором дифференцирования $s = d/dt$

$$s^3y + 5s^2y + 2sy + y = 4s^2u + 6su + 3u$$

и выразим слагаемое со старшей степенью s :

$$s^3y = -5s^2y - 2sy - y + 4s^2u + 6su + 3u.$$

Разделив обе части на s^3 , после элементарных преобразований окончательно получаем

$$y = \frac{1}{s}(4u - 5y) + \frac{1}{s^2}(6u - 2y) + \frac{1}{s^3}(3u - y). \quad (1.6)$$

Таким образом, выходная переменная y представлена в виде суммы сигналов прямых и обратных связей, проинтегрированных соответствующее число раз. Схема моделирования, составленная на основе уравнения (1.6), приведена на рис.1.3.

Определим начальные условия интеграторов. Для удобства обозначим выходные сигналы интеграторов через z_1 , z_2 и z_3 (см. рис.1.3) и, следовательно, искомые начальные условия — через $z_1(0)$, $z_2(0)$ и $z_3(0)$. Так как $z_1 = y$, то $z_1(0) = y(0) = 1$. Далее, из схемы моделирования видно, что $\dot{y} = \dot{z}_1 = z_2 + 4u - 5y$ и, следовательно,

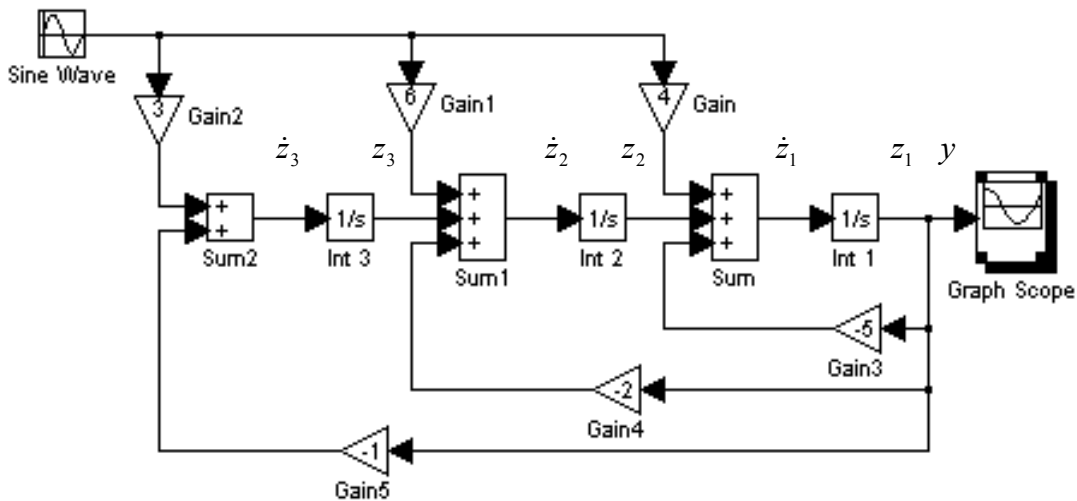


Рис.1.3. Схема моделирования уравнения (1.6)

$$z_2 = \dot{y} - 4u + 5y. \quad (1.7)$$

Подставляя в (1.7) начальные значения сигналов $y(0)$, $u(0)$ и $\dot{y}(0)$, вычисляем начальное условие для второго интегратора (блок Int 2)

$$z_2(0) = \dot{y}(0) - 4u(0) + 5y(0) = 2 - 0 + 5 = 7.$$

Так же из структурной схемы получаем, что $\dot{z}_2 = z_3 + 6u - 2y$ и, следовательно, $z_3 = \dot{z}_2 - 6u + 2y$. Дифференцируя z_2 в силу уравнения (1.7), окончательно получаем

$$z_3 = \ddot{y} - 4\dot{u} + 5\dot{y} - 6u + 2y. \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.8) начальные значения соответствующих сигналов, вычисляем начальное условие для третьего интегратора (блок Int 3)

$$z_3(0) = \ddot{y}(0) - 4\dot{u}(0) + 5\dot{y}(0) - 6u(0) + 2y(0) = 0 - 0 + 10 - 0 + 2 = 12.$$

Еще раз отметим, что мы рассматриваем начальные условия слева и, следовательно, $u(0) = \dot{u}(0) = 0$.

Порядок выполнения работы.

1. Исследование модели вход-выход.

1.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.1), построить схему моделирования линейной динамической системы (1.1).

1.2. Осуществить моделирование системы при двух видах входного воздействия — $u = 1(t)$ и $u = 2\sin t$ — и нулевых начальных условиях. На экран выводить графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$. Продолжительность интервала наблюдения выбрать самостоятельно.

1.3. Осуществить моделирование свободного движения системы, т.е. с нулевым входным воздействием и ненулевыми начальными условиями, заданными в табл.1.2. На экран выводить $y(t)$.

2. Исследование модели вход-состояние-выход.

2.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.3), построить схему моделирования линейной динамической системы (1.2а).

2.2. Осуществить моделирование линейной динамической системы при двух видах входного воздействия: $u = 1(t)$ и $u = 2 \sin t$. На экран выводить графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$. Для всех вариантов начальное значение вектора состояния нулевое.

2.3. Осуществить моделирование свободного движения системы с начальными условиями, приведенными в табл.1.4. На экран выводить $y(t)$

Содержание отчета.

1. Математические модели динамических систем и соответствующие им схемы моделирования.

2. Расчет начальных условий интеграторов для п.1.3 программы исследований.

3. Результаты моделирования (графики переходных процессов).

4. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Почему для моделирования динамических систем не используются блоки дифференцирования?

2. Укажите условие физической реализуемости системы, описанной дифференциальным уравнением (1.1).

3. С помощью каких команд пакета MATLAB можно рассчитать корни характеристического уравнения моделируемой системы?

4. Составьте схему моделирования уравнения $\dot{y} + 3y = 2\dot{u} + 5u$.

5. Составьте по схеме моделирования дифференциального уравнения (1.5) (см. рис.1.3) модель вход-состояние-выход.

Таблица 1.1

Варианты параметров моделей вход-выход

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Порядок модели n	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
a_0	9	5	5	8	7	15	7	2	1	25	30	0,12
a_1	6	4	4	6	5	5	3	0,5	0,5	1	0,8	1
a_2	3	3	2	2	2	10	—	—	—	—	—	—
b_0	12	2,5	7,5	12	10	15	10	4	2	25	30	0,1
b_1	2	2	0	1	3	0,5	6	2	2	2	3	2
b_2	0,1	3	5	10	1,5	1	0	0	0	0	0	0

Таблица 1.2

Варианты начальных условий моделей вход-выход

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Порядок модели n	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$y(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\dot{y}(0)$	0,5	-0,2	-0,4	0,1	-0,5	0,5	0,4	1	-0,5	0	0,5	0
$\ddot{y}(0)$	0	0,1	0,2	-0,1	0	0,1	—	—	—	—	—	—

Таблица 1.3

Варианты значений матриц A , B и C

Вариант	n	A	B	C^T	Вариант	n	A	B	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	7	3	$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 2,5 \\ 0 \end{vmatrix}$
2	2	$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -0,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$	8	3	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -0,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,25 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$
3	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 1,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0,2 \end{vmatrix}$	9	3	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -2,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,2 \end{vmatrix}$
4	2	$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 0,25 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix}$	10	3	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 0,2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 2 \end{vmatrix}$
5	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -0,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0,5 \end{vmatrix}$	11	3	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{vmatrix}$
6	2	$\begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -0,8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 \\ 0,1 \end{vmatrix}$	12	3	$\begin{vmatrix} 0 & -15 & 2 \\ 1 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0,25 \end{vmatrix}$

Таблица 1.4

Варианты начальных условий автономных систем

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1(0)$	1	0,5	0,5	-0,5	0,2	0,33	-0,2	0	0,5	3	0,5	-5
$x_2(0)$	0,5	0,25	-0,4	0,13	-0,1	-0,5	0,4	1	2	0	-2	0,5
$x_3(0)$	—	—	—	—	—	—	0,1	-0,1	0	0,5	0	0

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы. Ознакомление с методами взаимного перехода между моделями вход-выход и вход-состояние-выход, а также с каноническими формами представления моделей вход-состояние-выход.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. К занятию допускаются студенты, получившие аналитические выражения для математических моделей в соответствии с пунктами 1.1, 2.1 и 3.1 порядка выполнения работы. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Математическая модель одной и той же линейной динамической системы может быть представлена в различных формах: в форме скалярного дифференциального уравнения n -го порядка (модель вход-выход) или в форме системы из n дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель вход-состояние-выход). Следовательно, между различными формами представления математических моделей существует определенная взаимосвязь, т.е. модель вход-состояние-выход может быть преобразована к модели вход-выход и наоборот. При этом модели будут эквивалентными в том смысле, что они определяют одно и то же преобразование входного сигнала u в выходной y .

Модель вход-выход динамической системы описывается уравнением (подробнее — см. лабораторную работу № 1)

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y^{(1)} + a_0y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_1u^{(1)} + b_0u, \quad (2.1)$$

где y и u — выходная и входная переменные, соответственно. При $m < n$, модель вход-состояние-выход имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (2.2)$$

Причем координаты вектора состояния x и коэффициенты матриц A , B и C зависят от выбора базиса в пространстве состояний. Преобразование вектора состояния, связанное с заменой базиса, задается выражениями

$$x = M\hat{x}, \quad \hat{x} = M^{-1}x, \quad (2.3)$$

где \hat{x} — вектор состояния в "новом" базисе, M — неособая $n \times n$ матрица преобразования координат. Преобразование (2.3) обеспечивает переход от модели (2.2) к подобной модели

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u, \\ y = \hat{C}\hat{x}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Матрицы подобных моделей связаны соотношениями:

$$\hat{A} = M^{-1}AM, \quad \hat{B} = M^{-1}B, \quad \hat{C} = CM.$$

Если известно, что модели (2.2) и (2.4) являются различными формами описания одной и той же динамической системы, то матрица преобразования координат M может быть найдена из выражения

$$M = N_y \hat{N}_y^{-1},$$

где $N_y = [b: Ab: \dots: A^{n-1}b]$ — матрица управляемости модели (2.2),

$\hat{N}_y = [\hat{b}: \hat{A}\hat{b}: \dots: \hat{A}^{n-1}\hat{b}]$ — матрица управляемости модели (2.4).

Переход от модели вход-состояние-выход (2.2) к модели вход-выход (2.1) является однозначным и определяется соотношением

$$W(s) = C(sI - A)^{-1}B,$$

где $W(s)$ — передаточная функция системы. Очевидно, что по известной передаточной функции может быть легко записано дифференциальное уравнение (2.1).

Переход от модели вход-выход (2.1) к модели вход-состояние-выход (2.2) является неоднозначным, что связано с возможностью достаточно произвольного назначения вектора состояния. На практике наиболее часто используются следующие две, так называемые, канонические формы представления моделей вход-состояние-выход: *каноническая наблюдаемая форма* и *каноническая управляемая форма*. Удобство канонических форм состоит в возможности непосредственного определения параметров матриц A , B и C на основе коэффициентов a_i и b_j дифференциального уравнения (2.1) без каких-либо дополнительных вычислений. Кроме того, использование канонических форм позволяет упростить решение целого ряда прикладных задач анализа и синтеза систем управления.

Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход удобнее всего совершать через схему моделирования. При этом в качестве переменных состояния выбираются выходы интеграторов, а уравнения состояния записываются в соответствии со структурой схемы моделирования.

Метод построения схемы моделирования в канонической наблюдаемой форме соответствует методу, рассмотренному в лабораторной работе № 1. При этом, в случае дифференциального уравнения n -го порядка, схема моделирования принимает вид, приведенный на рис.2.1. Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, легко получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}, \quad C^T = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

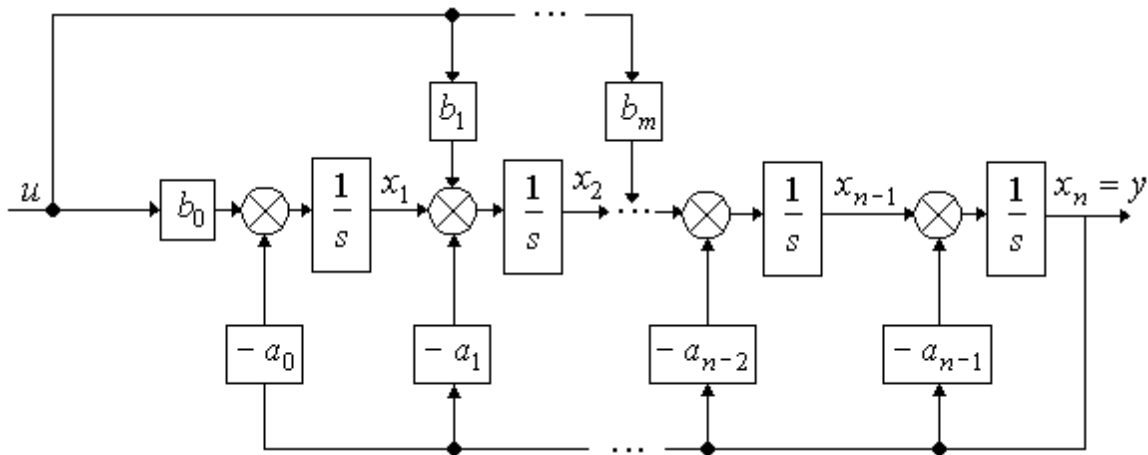


Рис.2.1. Схема моделирования в канонической наблюдаемой форме

При этом требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ могут быть определены из системы алгебраических уравнений

$$y^{(i)}(0) = CA^{(i)}x(0), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (2.5)$$

В системе (2.5) слагаемые с начальными значениями входного сигнала и его производных отсутствуют, так как для начальных условий слева имеем $u(-0) = u^{(1)}(-0) = \dots = 0$ (см. лабораторную работу №1).

Для построения схемы моделирования в канонической управляемой форме, введем вспомогательную переменную $z(t)$, являющуюся решением дифференциального уравнения

$$z^{(n)} + a_{n-1}z^{(n-1)} + \dots + a_1z^{(1)} + a_0z = u.$$

Следовательно

$$z^{(n)} = -a_{n-1}z^{(n-1)} - \dots - a_1z^{(1)} - a_0z + u. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) позволяет определить структуру обратных связей схемы моделирования (см. рис.2.2). Для формирования прямых связей заметим, что в силу свойств линейных систем

$$y = b_m z^{(m)} + b_{m-1} z^{(m-1)} + \dots + b_1 z^{(1)} + b_0 z.$$

Нумеруя координаты вектора состояния в указанной на рисунке последовательности, можно получить следующие выражения для матриц системы вход-состояние-выход

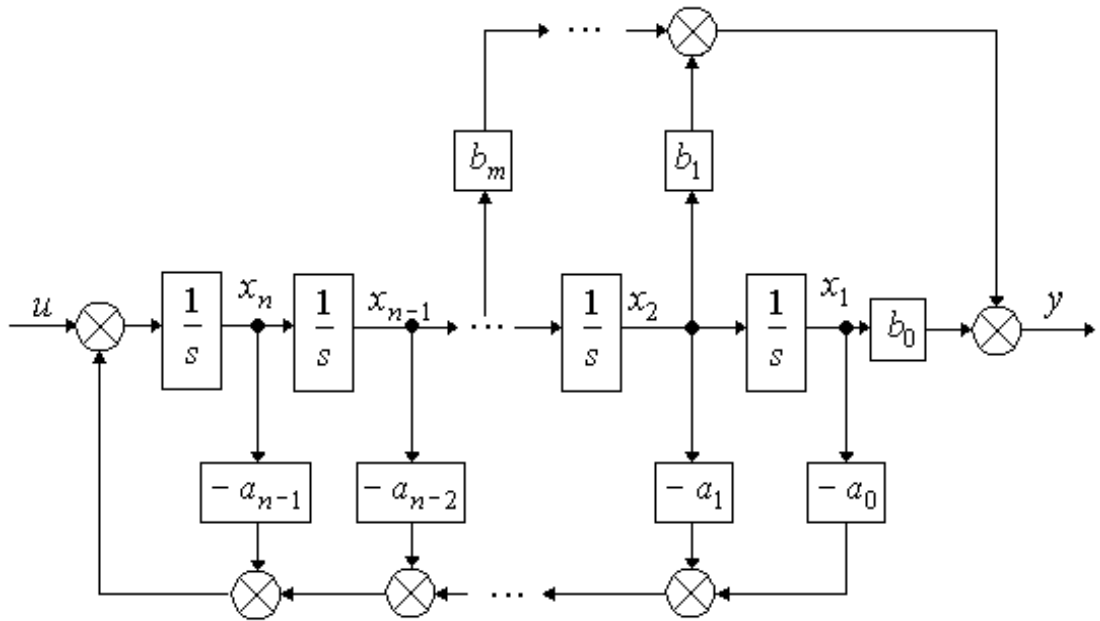


Рис.2.2. Схема моделирования в канонической управляемой форме

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad C^T = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Требуемые начальные условия координат вектора состояния $x(0)$ рассчитываются из системы алгебраических уравнений (2.5).

Порядок выполнения работы.

1. Переход от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход.

1.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.1), построить математические модели вход-состояние-выход в канонической управляемой и канонической наблюдаемой формах. Определить передаточную функцию системы.

1.2. Используя блоки "Transfer Fcn" и "State-Space" пакета SIMULINK, осуществить моделирование моделей вход-выход, вход-состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. Схема моделирования иллюстрируется рис.2.3, где блок с именем "Transfer Fcn" задает модель вход-выход в форме передаточной функции, блок "State-Space"— модель вход-состояние-выход в канонической управляемой форме, а блок "State-Space1"— модель вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме.

2. Переход от модели вход-состояние-выход к модели вход-выход.

2.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.2.1), осуществить расчет передаточной функции системы, а также канонических моделей вход-состояние-выход.

2.2. Используя блоки "Transfer Fcn" и "State-Space" пакета SIMULINK, осуществить моделирование исходной модели и полученных моделей вход-выход, вход-

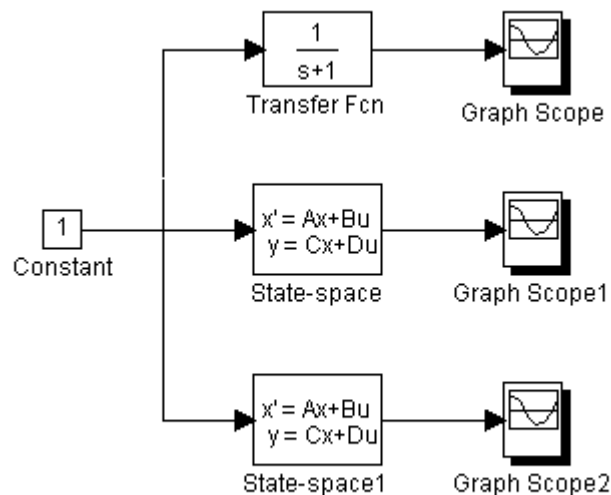


Рис. 2.3 Схема эксперимента

состояние-выход в канонической управляемой форме и вход-состояние-выход в канонической наблюдаемой форме, при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

2.3. Рассчитать матрицы преобразования исходной модели к каноническим формам.

3. Замена базиса в пространстве состояний.

3.1. В соответствии с вариантом матрицы преобразования координат (см. табл.2.2), построить модель, подобную модели из п.2.1.

3.2. Используя блоки "State-Space", осуществить моделирование исходной и преобразованной систем при ступенчатом единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях. На экран вывести выходные переменные двух систем.

Содержание отчета.

1. Аналитический вывод математических моделей канонических форм, подобных систем и матриц преобразования координат.

2. Результаты моделирования.

3. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. В каком смысле понимается эквивалентность подобных математических моделей вход-состояние-выход?

2. Выведете в общем виде матрицу преобразования координат M для перехода от канонической управляемой формы к канонической наблюдаемой форме модели второго порядка.

3. Чем вызвана неоднозначность перехода от модели вход-выход к модели вход-состояние-выход?

4. Используя схему моделирования, приведенную на рис.2.2, составьте модель вход-состояние-выход, отличную от канонической управляемой формы.

Таблица 2.1

Варианты значений матриц A , B и C

Номер варианта	n	A	B	C^T	Номер варианта	n	A	B	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0,5 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	7	2	$\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 0,5 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 1 \end{vmatrix}$
2	2	$\begin{vmatrix} -0,5 & 2 \\ -12 & -4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0,5 \end{vmatrix}$	8	2	$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -15 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 10 \\ 1 \end{vmatrix}$
3	2	$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -10 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \end{vmatrix}$	9	2	$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -15 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 1 \end{vmatrix}$
4	2	$\begin{vmatrix} 0,5 & 1 \\ -15 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$	10	2	$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -10 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8 \\ 2 \end{vmatrix}$
5	2	$\begin{vmatrix} 0,5 & -10 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$	11	2	$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -10 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 6 \\ 1,5 \end{vmatrix}$
6	2	$\begin{vmatrix} 1 & -15 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	12	2	$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 1 \end{vmatrix}$

Таблица 2.2

Варианты элементов матрицы преобразования координат $M = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix}$

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m_{11}	2	1	0,5	2	4	5	2	2	2,5	-1	1	5
m_{12}	1	5	0	0	0	0	3	8	2	0	2	0
m_{21}	0	0	6	5	-2	6	0	0	0	0	0	5
m_{22}	4	2	2	0,5	0,5	2	5	2	4	-1	2	1

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

СВОБОДНОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Цель работы. Исследование динамических свойств линейных систем второго порядка.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. К занятию допускаются студенты, выполнившие требуемые расчеты и заполнившие табл.5.2. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. При исследовании движений линейных динамических систем принято различать свободную и вынужденную составляющие. Свободная составляющая описывает движение системы при отсутствии воздействия на систему со стороны окружающей среды (автономной системы) и обусловлено ее состоянием в начальный момент времени. Вынужденная составляющая представляет собой реакцию системы на входное воздействие и не зависит от ее начального состояния.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = bg, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (5.1)$$

где $g = g(t)$ - входное воздействие, $y = y(t)$ — выход системы, a_1, a_0, b - параметры системы. Переменные состояния рассматриваемой системы могут быть определены как $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$. Тогда система уравнений вход-состояние-выход принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + bg, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (5.2)$$

с начальными условиями $x_{10} = x_1(0) = y_0$, $x_{20} = x_2(0) = \dot{y}_0$. Структурная схема, соответствующая уравнениям (5.2) приведена на рис. 5.1.

Примером такой системы является тело массой m (рис. 5.2), которое подвешено на пружине и может совершать вертикальные движения. При условии, что сила трения пропорциональна скорости движения тела, а сила, с которой действует пружина на тело, пропорциональна его смещению y относительно положения равновесия, движение такой системы описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y} + l\dot{y} + ky = F,$$

где l — коэффициент трения, k — коэффициент жесткости пружины, F — внешняя сила, приложенная к телу. Полагая $a_1 = \frac{l}{m}$, $a_0 = \frac{k}{m}$, $b = \frac{1}{m}$, получим уравнение (5.1).

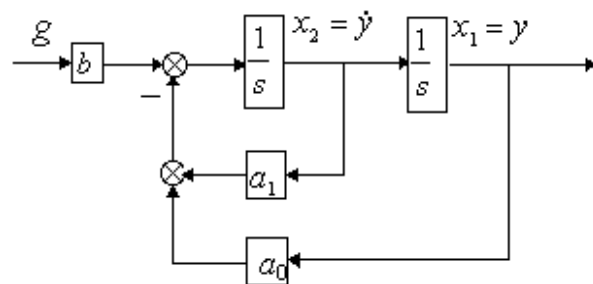


Рис. 5.1. Структурная схема

Движение рассматриваемой динамической системы описывается решением $y(t)$ дифференциального уравнения (5.1) и содержит две составляющие

$$y(t) = y_{св}(t) + y_в(t),$$

где $y_{св}(t)$ и $y_в(t)$ — соответственно свободная и вынужденная составляющая движения. Свободная составляющая $y_{св}(t)$ находится как частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0 \tag{5.3}$$

с начальными условиями $y_{св}(0) = y_0, \dot{y}_{св}(0) = \dot{y}_0$. Вынужденная составляющая $y_в(t)$ находится как частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5.1) при нулевых начальных условиях $y_в(0) = \dot{y}_в(0) = 0$. Таким образом, исследование рассматриваемых процессов сводится к изучению свойств решений дифференциальных уравнений (5.1) и (5.3).

Для интегрирования дифференциального уравнения (5.3) надо найти корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{5.4}$$

Если корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения вещественны и различны, то решение дифференциального уравнения (5.3) есть

$$y_{св}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5.5}$$

где постоянные C_1, C_2 определяются по начальным условиям. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то

$$y_{св}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \tag{5.6}$$

Когда корни характеристического уравнения (5.4) комплексные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$, решение дифференциального уравнения (5.3)

$$y_{св}(t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \tag{5.7}$$

где постоянные A, φ определяются по начальным условиям.

При $a_1 = 0$ корни характеристического уравнения (5.3) чисто мнимые $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$ и выражение (5.7) будет иметь вид

$$y_{св}(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \tag{5.8}$$

Соотнося приведенные выше формулы для свободной составляющей движения с параметрами l, k механической системы (рис. 5.2), можно сделать следующий вывод. При увеличении коэффициента трения l и фиксированном значении коэффициента жесткости пружины k характер свободной составляющей изменяется от гармоническо-

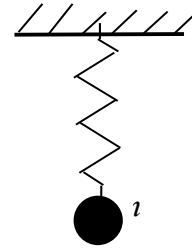


Рис.5.2. Механическая система

го незатухающего (5.8) (при $l = 0$) до колебательного затухающего (5.7) (при $0 < l^2 < 4km$). При дальнейшем увеличении коэффициента трения характер свободной составляющей принимает монотонный затухающий характер (5.4).

Рассмотрим на примере поиск свободной составляющей системы с параметрами $a_1 = 2$, $a_0 = 1$ и начальными условиями $y_{ce}(0) = 1$, $\dot{y}_{ce}(0) = 0$. В этом случае корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Свободную составляющую ищем в виде (5.5) и, следовательно, при $t = 0$ имеем: $y_{ce}(0) = C_1 = 1$, $\dot{y}_{ce}(0) = -C_1 + C_2 = 0$. Таким образом, $C_1 = C_2 = 1$ и $y_{ce}(t) = (1+t)e^{-t}$.

Для исследования свободного движения динамических систем часто оказывается удобным изобразить его на плоскости в Декартовой прямоугольной системе координат Ox_1x_2 . Координаты $x_1 = y$ и $x_2 = \dot{y}$ в этом случае называют *фазовыми координатами*, а плоскость Ox_1x_2 - *фазовой плоскостью*. В каждом частном случае движения системы (5.3) при $t = t_0$ состояние системы изображается на фазовой плоскости точкой с фиксированными координатами $x_1 = y(t_0)$, $x_2 = \dot{y}(t_0)$. При изменении времени t изображающая точка перемещается по фазовой плоскости, прочерчивая на ней линию, называемую *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий системы (5.3) образует *фазовый портрет*.

Вынужденная составляющая $y_e(t)$ движения системы есть решение неоднородного уравнения (5.1) при нулевых начальных условиях. Установившейся реакцией на заданное воздействие $g(t)$ называют, такую функцию $y_y(t)$, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_y(t)| = 0$$

Для некоторых видов воздействий, т.е. некоторых функций $g(t)$, удается указать очень простые способы вычисления установившейся реакции системы при условии, что действительная часть каждого корня характеристического уравнения (5.3) отрицательна, т.е. $\text{Re} \lambda_i < 0$ ($i = 1, 2$). Так реакция системы на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^n A_k t^k,$$

где n - любое неотрицательное целое число, есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^n C_k t^k,$$

а на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^n [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)]$$

есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^n [C_k \cos(k\omega t) + D_k \sin(k\omega t)].$$

Неизвестные постоянные C_k, D_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), участвующие в определении установившейся реакции, определяются из условия обращения уравнения (5.1) в тождество при подстановке в него соответствующего воздействия и реакции. Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть требуется определить установившуюся реакцию системы с параметрами $a_1 = 3$, $a_0 = 2$, $b = 2$ на воздействие $g(t) = 2 \cos(t)$. В этом случае, корни характеристического уравнения: $\lambda_1 = -1 < 0$, $\lambda_2 = -2 < 0$. Установившуюся реакцию ищем в виде $y_y(t) = C_0 + C_1 \cos(t) + D_1 \sin(t)$. После подстановки функций $y_y(t)$, $g(t)$ в уравнение (5.1) и группировки подобных членов, получим

$$2C_0 + (C_1 + 3D_1 - 4)\cos(t) + (D_1 - 3C_1)\sin(t) = 0.$$

Для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы постоянные C_0, C_1, D_1 удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + 3D_1 = 4, \\ D_1 - 3C_1 = 0, \\ 2C_0 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем $C_0 = 0, C_1 = 0.4, D_1 = 1.2$. Таким образом, установившаяся реакция системы будет иметь вид

$$y_y(t) = 0.4 \cos(t) + 1.2 \sin(t).$$

Порядок выполнения работы

1. Для каждого из вариантов (Табл. 5.1) задано по шесть наборов значений корней λ_1, λ_2 характеристического уравнения (5.4) и начальных условий $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$. Вычислить коэффициенты a_1, a_0 и найти аналитическое выражение для свободной составляющей $y_{св}(t)$. Результаты вычислений занести в табл. 5.2. Осуществить моделирование свободного движения системы при $t \geq 0$ с соответствующими заданной функции $y_{св}(t)$ параметрами a_1, a_0 и начальными условиями $y(0), \dot{y}(0)$. На экран монитора выводить графики $y(t), \dot{y}(t)$.

2. Для 2-го, 3-го и 4-го набора значений корней λ_1, λ_2 и начальных условий $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ (Табл. 5.1) экспериментально построить фазовые траектории автономной системы. На экран монитора выводить зависимости $\dot{y}(y)$

3. Для каждого входного воздействия $g(t)$ осуществить моделирование вынужденного движения системы при $t \geq 0$ с начальными условиями $y_0 = -1; 0; 1$ и $\dot{y}_0 = 0$. Параметры системы и входные воздействия приведены в Табл. 5.3. На экран монитора выводить графики $y(t), g(t)$.

Содержание отчета

1. Математическая модель исследуемой динамической системы и соответствующая ей схема моделирования.

2. Результаты расчетов (Табл. 5.2).

3. Результаты вычислительных экспериментов (шесть графиков свободного движения, три графика фазовых траекторий и три графика вынужденного движения системы).

4. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы

1. Как связаны знаки вещественных частей корней характеристического уравнения и коэффициентов ?

2. Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы с течением времени стремилась к нулю ?

3. Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы подчинялась гармоническому закону ?

4. Определите корни характеристического уравнения, если свободная составляющая движения системы равна $e^{2t} \sin(2t)$.

5. Определите установившуюся реакцию системы $\ddot{y} + 2\dot{y} + 1y = 3f$, если $f(t) = 2t$.

Таблица 5.1

Варианты начальных условий и корней характеристического уравнения

Вариант	Номер эксперимента											
	1		2		3		4		5		6	
	Начальные условия											
	y_0	\dot{y}_0	y_0	\dot{y}_0	y_0	\dot{y}_0	y_0	\dot{y}_0	y_0	\dot{y}_0	y_0	\dot{y}_0
	1	0	1	0	1	0	0.05	0	0.05	0	0	0.1
	Корни характеристического уравнения											
	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2	λ_1	λ_2
1	-1	-1	-0.5+j3	-0.5-j3	j3	-j3	0.5+j3	0.5-j3	1	1	-0.1	0.1
2	-1	-1.5	-0.6+j4	-0.6-j4	j4	-j4	0.6+j4	0.6-j4	1	1.5	-0.2	0.2
3	-1	-2	-0.7+j5	-0.7-j5	j5	-j5	0.7+j5	0.7-j5	1	2	-0.3	0.3
4	-2	-1.5	-0.8+j6	-0.8-j6	j6	-j6	0.8+j6	0.8-j6	2	1.5	-0.4	0.4
5	-2	-2	-0.9+j7	-0.9-j7	j7	-j7	0.9+j7	0.9-j7	2	2	-0.5	0.5
6	-2.5	-2.5	-1+j8	-1-j8	j8	-j8	1+j8	1-j8	2.5	2.5	-0.6	0.6
7	-3	-1	-1.1+j9	-1.1-j9	j9	-j9	1.1+j9	1.1-j9	3	1	-0.7	0.7
8	-3	-1.5	-1.2+j10	-1.2-j10	j10	-j10	1.2+j10	1.2-j10	3	1.5	-0.8	0.8
9	-3	-2	-1.3+j11	-1.3-j11	j11	-j11	1.3+j11	1.3-j11	3	2	-0.9	0.9
10	-3	-3	-1.4+j12	-1.4-j12	j12	-j12	1.4+j12	1.4-j12	3	3	-1	1
11	-4	-3	-1.6+j13	-1.6-j13	j13	-j13	1.6+j13	1.6-j13	4	3	-1.2	1.2
12	-4	-4	-1.7+j14	-1.7-j14	j14	-j14	1.7+j14	1.7-j14	4	4	-1.3	1.3

Таблица 5.2

Результаты вычислений

№	Корни		Параметры системы		Начальные условия		Свободная составляющая $y_{ce}(t)$
	λ_1	λ_2	a_0	a_1	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	
1							
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
6							

Таблица 5.3

Варианты параметров системы и входного воздействия

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
a_0	4	1	4	4	3	1	4	1	4	4	3	1
a_1	2	2	3	4	3	3	2	2	3	4	3	3
b	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$g_1(t)$	1	1.5	2	2.5	2	2.5	1	1.5	2	2.5	1	1.5
$g_2(t)$	$0.5t$	$0.4t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.5t$	$0.4t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.5t$	$0.4t$
$g_3(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$