Графо-теоретический подход к синтезу топологии

Для схем с однослойной коммутацией синтез топологии по традиционной схеме размещение-трассировка не оправдан, т.к. при этом учитываются метрические, а не топологические критерии и ограничения.
При неравномерном использовании коммутационных слоев (например, когда слои изготавливаются на основе алюминия и поликремния) проектирование двухслойных схем оказывается близким к проектированию однослойных схем.

Графо-теоретический подход к синтезу топологии состоит из следующих этапов.

1. Построение графовой модели схемы.
2. Анализ планарности графа.
3. Планаризация графа.
4. Реализация непланарных соединений.
5. Построение плоского чертежа схемы.
6. Синтез геометрии схемы.

Одной из основных топологических задач проектирования коммутации является возможность разложения соединений на плоскости без пересечений. Эта задача связана с определением планарности графа.

Среди критериев планарности графа наиболее известен ***критерий Понтрягина-Куратовского***:

Граф $G(X, U)$ – планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомеоморфных полному графу K_5 или полному двудольному графу $K_{3,3}$.

Однако он неконструктивен (требует перебора). Известны другие критерии, но их также трудно использовать. Разработан ряд алгоритмов определения планарности графа удобных для реализации на ЭВМ.

Критерий Бадера. Граф $G(X,U)$ планарен, если его граф пересечений G' является бихроматическим (двудольным) графом. Критерий справедлив для графов, имеющих гамильтонов цикл.

Разбиение графа на планарные суграфы

При разработке топологии возникает задача выделения из графа, описывающего схему, максимальных планарных суграфов (добавление любого ребра делает его не планарным).

Граф *G(X,U)* называется *m*-планарным, если существует *m* планарных суграфов $L_1(X,Z_1)$, $L_2(X,Z_2)$,…, $L_m(X,Z_m)$, таких, что $U = \bigcup_{i=1}^{m} Z_i$.

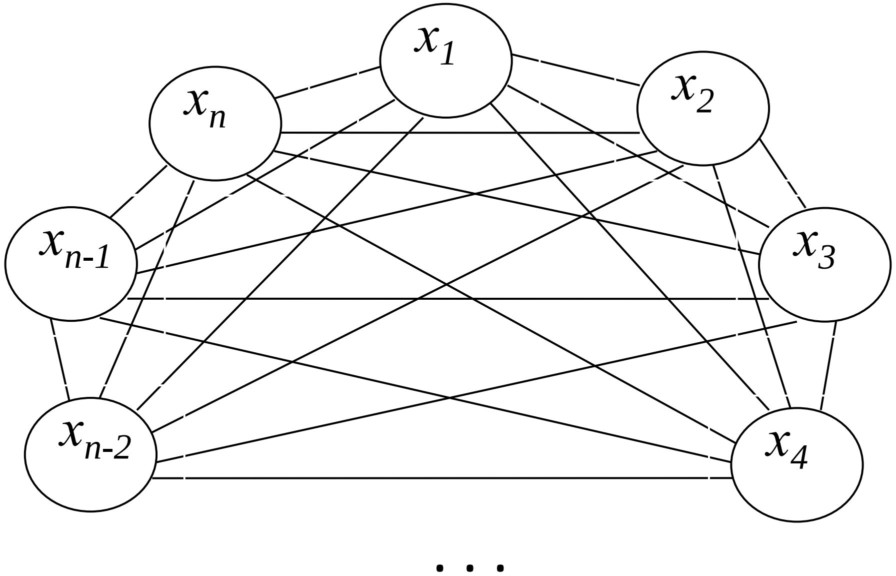
Наименьшее *m* называется *толщиной графа*.

Построение графа пересечений *G'*

Приняты следующие допущения:

1. Граф *G* имеет гамильтонов цикл;
2. Два ребра пересекаются только один раз;
3. Ребра, инцидентные одной вершине, не пересекаются;
4. Ребра графа не пересекают ребер гамильтонова цикла;
5. Ребра вершины x_j могут пересекать ребра вершины x_i при условии, что $j > i$.

Рассмотрим некоторый граф *G(X,U)*



p_i – число пересечений ребер i-ой вершины.

Согласно п. 5 принятых допущений $p_1=0$.

Рассмотрим ребро (x_2x_n). Число его пересечений с ребрами вершины x_1

$$p_{2n} = r_{2n}\sum_{i=3}^{n-1} r_{1i}.$$

Ребро (x_2x_{n-1}) пересекает $p_{2(n-1)} = r_{2(n-1)}\sum_{i=3}^{n-2} r_{1i}$ ребер.

Общее число пересечений ребер вершины x_2 $p_2 = \sum_{j=4}^{n} r_{2j}.$

Для вершины x_k $p_k = \sum_{j=4}^{n} r_{kj}.$

Общее число пересечений ребер графа $P(G) = \sum_{k=2}^{n-2} p_k.$

Проще определять число пересечений по матрице соединений R. Будем использовать треугольную часть матрицы. Учитывая, что ребра графа не пересекают ребер гамильтонова цикла, в матрице "1", соответствующие гамильтонову циклу, заменим на "×".

$$
R(G)= \begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n\text{-}1 & n \\
\hline
1 & 0 & \times & \multicolumn{3}{|c|}{R_{2n}} & \times \\
2 & & 0 & \times & & & \boxed{r_{2n}} \\
3 & & & 0 & \times & & \\
\ldots & & & & & \times & \\
n\text{-}1 & & & & & 0 & \times \\
n & & & & & & 0
\end{array}
$$

Определим p_{2n}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{2n}. Сумма единиц подматрицы R_{2n} соответствует p_{2n}. Для $p_{2(n-1)}$ выделим $R_{2(n-1)}$ и т.д. от R_{2n} до $R_{(n-2)n}$. Одновременно строим граф пересечений G'. Ребра графа G, не имеющие пересечений в G' не учитываются.

Для определения двудольности G' используем максимальные внутренне устойчивые множества.

Нахождение максимальных внутренне устойчивых множеств

Для нахождения МВУМ при раскраске графа применялся метод Магу. Рассмотрим другой алгоритм, а именно - модифицированный алгоритм *Г.А. Петухова.*

1. В матрице R заменим все диагональные элементы на "1", $r_{jj}=1$. Положим $i=1$, $\alpha=1$;
2. В i-той строке находим элементы $r_{ij} = 0$ $(j>i)$. Номера нулевых элементов помещаем в список $J(j)$. Если все $r_{ij}=1$, то $\psi_\alpha=\{x_i\}$, $\alpha=\alpha+1$, перейти к п.7;
3. Записываем дизъюнкцию $M_{ij}= r_i \vee r_j$;
4. В строке M_{ij} находим $m_k=0$ $(k>j)$, если все $m_k=1$, то перейти к п. 6;
5. Записываем дизъюнкцию $M_{ijk}= M_{ij} \vee r_k$; Переходим к п. 4.
6. Если в дизъюнкции нет ни одного нулевого элемента, $\psi_\alpha=\{x_i, x_j, x_k\dots\}$, $\alpha = \alpha+1$.

Пока в списке $J(j)$ есть не рассмотренные элементы, выбрать следующий нулевой элемент и перейти к п. 3;

7. Положить $i= i+1$, пока $i<n$ перейти к п.2;

8. Семейство внутренне устойчивых множеств $\Psi_{G'}$ построено.

Выделение из *G'* максимального двудольного подграфа *H'*

Введем следующий критерий

$$\alpha_{\gamma\delta}=|\psi_\gamma| + |\psi_\delta| - |\psi_\gamma \cap \psi_\delta|.$$

Отсюда граф пересечений *G'* двудольный, а соответствующий ему граф *G* – планарен, если

$$\alpha_{\gamma\delta}=|\psi_\gamma| + |\psi_\delta| = |X'|, \text{ а } |\psi_\gamma \cap \psi_\delta| = \emptyset.$$

Естественно, что чем ближе $\alpha_{\gamma\delta}$ к $|X'|$, тем большее число вершин содержит выделяемый двудольный подграф *H'*. Для его выделения необходимо определить $\alpha_{\gamma\delta}$ для всех пар $(\psi_\gamma, \psi_\delta)$ Ψ и выбрать ψ_γ и ψ_δ с max$\alpha_{\gamma\delta}$.

Максимальному *H'* в исходном графе *G* соответствует суграф *H*, содержащий максимальное число непересекающихся ребер. В графе *H* ребра, вошедшие в одно внутренне устойчивое множество, проводятся внутри гамильтонова цикла, а во второе – вне его.

Из множеств семейства $\Psi_{G'}$ исключаются ребра, вошедшие в ψ_γ и ψ_δ. Одинаковые множества объединяются в одно.

Описанная процедура повторяется до тех пор, пока $\Psi_{G'}$ не станет пусто.
Напомним, что критерий Бадера справедлив для графов, имеющих гамильтонов цикл.

Нахождение гамильтонова цикла. Алгоритм Робертса-Флореса

Цикл, включающий все вершины один раз, называется гамильтоновым.
Алгоритм Робертса-Флореса состоит в следующем. Некоторая начальная вершина (x_1) выбирается в качестве отправной и образует первый элемент множества *S*, которое будет хранить уже найденные вершины цепи. К *S* добавляется первая вершина *a*, смежная с x_1, $a \in \Gamma x_1$. Затем к множеству *S* добавляется первая возможная вершина *b*.

Под "возможной" вершиной понимается вершина:

1. $b \in \Gamma a$;
2. $b \notin S$.

Существует две причины, препятствующие включению некоторой вершины на шаге *r* в множество $S = \{x_1, a, b, \ldots, x_r\}$:

1. у x_r нет "возможной" вершины;

2. цепь S имеет длину $|S|=n$. В этом случае:

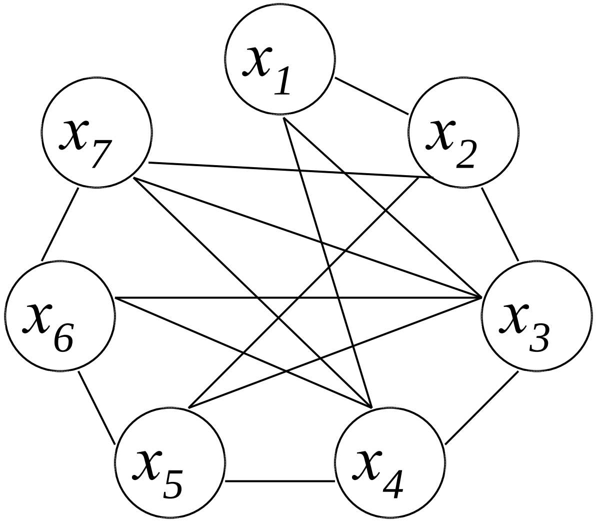
а) есть ребро (x_r, x_1) и гамильтонов цикл найден;

б) такого ребра нет и найдена гамильтонова цепь.

В случаях 1 и 2 б) следует прибегнуть к возвращению, которое заключается в удалении из S последней включенной вершины x_r и добавлении к S новой первой "возможной", следующей за x_r вершины. Если не существует никакой возможной вершины, делается следующий шаг возвращения и т.д.

Поиск заканчивается в случае когда S состоит из одной x_1 и нет не рассмотренных "возможных" вершин.

Планаризовать граф $G(X,U)$



$$R(G)=\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & \\
x_2 & 1 & 0 & 1 & & 1 & & 1 \\
x_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
x_4 & 1 & & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
x_5 & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & \\
x_6 & & & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
x_7 & & 1 & 1 & 1 & & 1 & 0
\end{array}$$

Нахождение гамильтонова цикла

Включаем в *S* начальную вершину $S=\{x_1\}$.

Первая "возможная" вершина $x_2\ \Gamma x_1$, $S=\{x_1, x_2\}$ и т.д. до вершины x_7: $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$. Ребра (x_7, x_1) нет. Найдена гамильтонова цепь.

Прибегнем к возвращению. Удалим из *S* вершину x_7. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$.

У x_6 больше нет "возможных" вершин. Удалим и ее. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

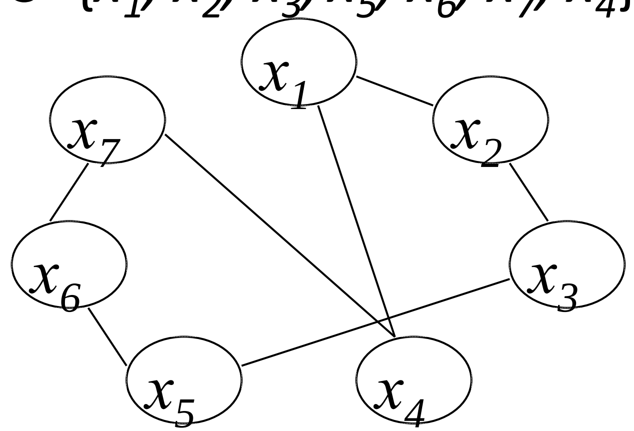
У x_5 больше нет "возможных" вершин. Удалим ее. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Следующая "возможная" вершина x_6. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$.

Следующая "возможная" вершина x_5. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_5\}$.
У x_5 больше нет "возможных" вершин. Удалим ее. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$. Следующая "возможная" вершина x_7. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7\}$.
У x_7 больше нет "возможных" вершин. Удалим из S вершину x_7. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}$. У x_6 больше нет "возможных" вершин. Удалим ее. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Следующая "возможная" вершина x_7. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7\}$. Следующая "возможная" вершина x_6. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_6\}$.
Следующая "возможная" вершина x_5. $S=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_6, x_5\}$.
Ребра (x_5, x_1) нет. Найдена гамильтонова цепь. Удаляем вершины x_4, x_7, x_6, x_5. $S=\{x_1, x_2, x_3\}$.

И т.д., пока последней не окажется вершина x_4, которая образует цикл с вершиной x_1. Гамильтонов цикл будет

$$S=\{x_1, x_2, x_3, x_5, x_6, x_7, x_4\}.$$

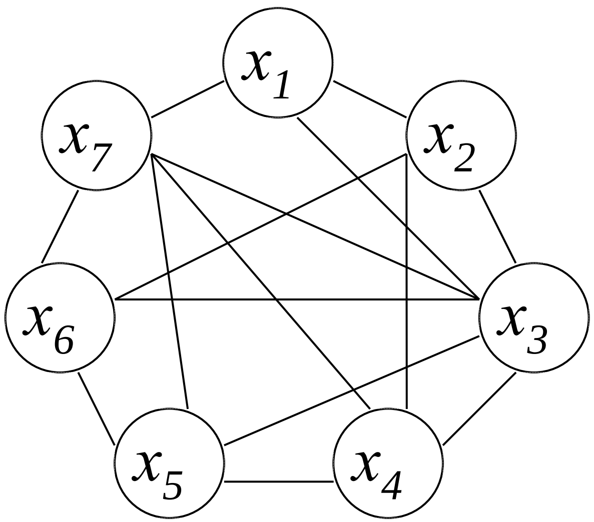


Построение графа пересечений G'

Перенумеруем вершины графа таким образом, чтобы ребра гамильтонова цикла были внешними.

до перенумерации	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7	x_4
после перенумерации	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

Тогда граф $G\ (X,U)$ будет выглядеть так



$$R(G)=\begin{array}{c|ccccccc|c|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & p_i \\
\hline
x_1 & 0 & \times & 1 & & & & \times & \\
x_2 & & 0 & \times & 1 & & 1 & & 2 \\
x_3 & & & 0 & \times & 1 & 1 & 1 & 4 \\
x_4 & & & & 0 & \times & & 1 & 3 \\
x_5 & & & & & 0 & \times & 1 & 2 \\
x_6 & & & & & & 0 & \times & \\
x_7 & & & & & & & 0 &
\end{array}$$

$$\sum p_i = 11$$

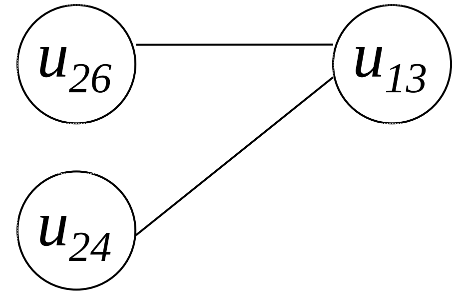
Определим p_{26}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{26}. Ребро (x_2x_6) пересекается с ребром (x_1x_3).

Строим граф пересечений G'

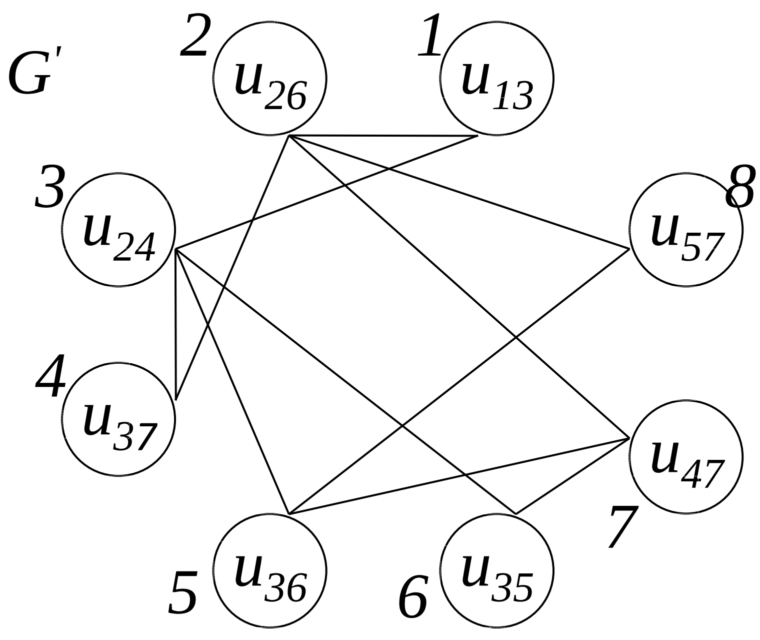
Определим p_{24}, для чего в матрице R выделим подматрицу R_{24}.

Ребро $(x_2 x_4)$ пересекается с ребром $(x_1 x_3)$. $p_2=2$.

Продолжаем строить граф пересечений G'.



После обработки остальных ребер получим граф пересечений G'



$$R(G') = \begin{array}{c|cccccccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\ 2 & 1 & 1 & & 1 & & & 1 & 1 \\ 3 & 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\ 4 & & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 5 & & & 1 & & 1 & & 1 & 1 \\ 6 & & & 1 & & & 1 & 1 & \\ 7 & & 1 & & & 1 & 1 & 1 & \\ 8 & & 1 & & & 1 & & & 1 \end{array}$$

Число пересечений ребер графа $P(G) = p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 11.$

Построение семейства $\Psi_{G'}$

В первой строке матрицы *R(G')* находим номера нулевых элементов.

Составляем список $J(j) = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

Для первого нулевого элемента составляем дизъюнкцию

$$M_{14} = r_1 \vee r_4 = \{11110000\}.$$

В строке M_{14} находим номера нулевых элементов. Составляем список $J'(j') = \{5, 6, 7, 8\}$.

Записываем дизъюнкцию $M_{145} = M_{14} \vee r_5 = \{11111011\}$.

В строке M_{145} находим $m_6=0$. Записываем дизъюнкцию

$$M_{1456} = M_{145} \vee r_6 = \{11111111\}.$$

В строке M_{1456} все «1».

Построено $\boldsymbol{\psi_1 = \{u_{13}, u_{37}, u_{36}, u_{35}\}}$.

Из списка $J'(j')$ выбираем следующий элемент. Записываем дизъюнкцию $M_{146} = M_{14} \vee r_6 = \{11110110\}$.

В строке M_{146} находим $m_8=0$. Записываем дизъюнкцию

$$M_{1468} = M_{146} \vee r_8 = \{11111111\}.$$

В строке M_{1468} все «1».

Построено $\boldsymbol{\psi_2 = \{u_{13}, u_{37}, u_{35}, u_{57}\}}$.

Из списка $J'(j')$ выбираем следующий элемент. Записываем дизъюнкцию $M_{147}= M_{14} \vee r_7= \{11111110\}$.

И, наконец, $M_{1478}= M_{147} \vee r_8= \{11111111\}$.

В строке M_{1478} все «1».

Построено $\boldsymbol{\psi_3=\{u_{13}, u_{37}, u_{47}, u_{57}\}}$.

Из списка $J'(j')$ выбираем следующий элемент. Записываем дизъюнкцию $M_{148}= M_{14} \vee r_8= \{11110001\}$.

В строке остались незакрытые «0».

Из списка $J(j)$ выбираем следующий нулевой элемент r_5. Составляем дизъюнкцию $M_{15}= r_1 \vee r_5=\{11101011\}$.

В строке M_{15} находим нулевой элемент – m_6=0. Записываем дизъюнкцию $M_{156}= M_{15} \vee r_6= \{11101111\}$.

В строке остался незакрытый «0». Понятно, что «0» в четвертой позиции элементами с номерами $j>4$ закрыть не удастся.

Во второй строке ищем первый нулевой элемент – r_{23}. Составляем дизъюнкцию $M_{23}= r_2 \vee r_3= \{11111111\}$.

В строке M_{23} все «1».

Построено $\boldsymbol{\psi_4=\{u_{26}, u_{24}\}}$.

Во второй строке ищем следующий нулевой элемент – r_{25}.
Составляем дизъюнкцию $M_{25}= r_2 \vee r_5= \{11111011\}$.
И, наконец, $M_{256}= M_{25} \vee r_6= \{11111111\}$.
Построено $\boldsymbol{\psi_5=\{u_{26}, u_{36}, u_{35}\}}$.

Во второй строке ищем следующий нулевой элемент – r_{26}.
Составляем дизъюнкцию $M_{26}= r_2 \vee r_6= \{11110111\}$.
В строке остался незакрытый «0».
В третьей строке ищем первый нулевой элемент – r_7. Составляем дизъюнкцию $M_{37}= r_3 \vee r_7= \{11111110\}$.
И, наконец, $M_{378}= M_{37} \vee r_8= \{11111111\}$.
Построено $\boldsymbol{\psi_6=\{u_{24}, u_{47}, u_{57}\}}$.
В третьей строке ищем следующий нулевой элемент – r_{38}.
Составляем дизъюнкцию $M_{38}= r_3 \vee r_8= \{1111101\}$.
В строке остался незакрытый «0».

Из матрицы $R(G')$ видно, что строки с номерами $j >3$ «0» в первой позиции закрыть не смогут.

Семейство максимальных внутренне устойчивых множеств $\Psi_{G'}$ построено. Это

$$\boldsymbol{\psi_1 = \{u_{13}, u_{37}, u_{36}, u_{35}\};}$$
$$\boldsymbol{\psi_2 = \{u_{13}, u_{37}, u_{35}, u_{57}\};}$$
$$\boldsymbol{\psi_3 = \{u_{13}, u_{37}, u_{47}, u_{57}\};}$$
$$\boldsymbol{\psi_4 = \{u_{26}, u_{24}\};}$$
$$\boldsymbol{\psi_5 = \{u_{26}, u_{36}, u_{35}\};}$$
$$\boldsymbol{\psi_6 = \{u_{24}, u_{47}, u_{57}\}.}$$

Для каждой пары множеств вычислим значение критерия

$$\alpha_{\gamma\delta} = |\psi_\gamma| + |\psi_\delta| - |\psi_\gamma \cap \psi_\delta|.$$

Результаты вычислений запишем в матрицу $A = ||\alpha_{\gamma\delta}||$.

$\alpha_{12} = |\psi_1| + |\psi_2| - |\psi_1 \cap \psi_2| = 4+4-3=5.$

$\alpha_{13} = |\psi_1| + |\psi_3| - |\psi_1 \cap \psi_3| = 4+4-2=6$ и т.д.

$$A = \begin{array}{c|cccccc|}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
1 & 0 & 5 & 6 & 6 & 5 & \mathbf{7} \\
2 & & 0 & 5 & 6 & 6 & 6 \\
3 & & & 0 & 6 & \mathbf{7} & 5 \\
4 & & & & 0 & 4 & 4 \\
5 & & & & & 0 & 6 \\
6 & & & & & & 0
\end{array}$$

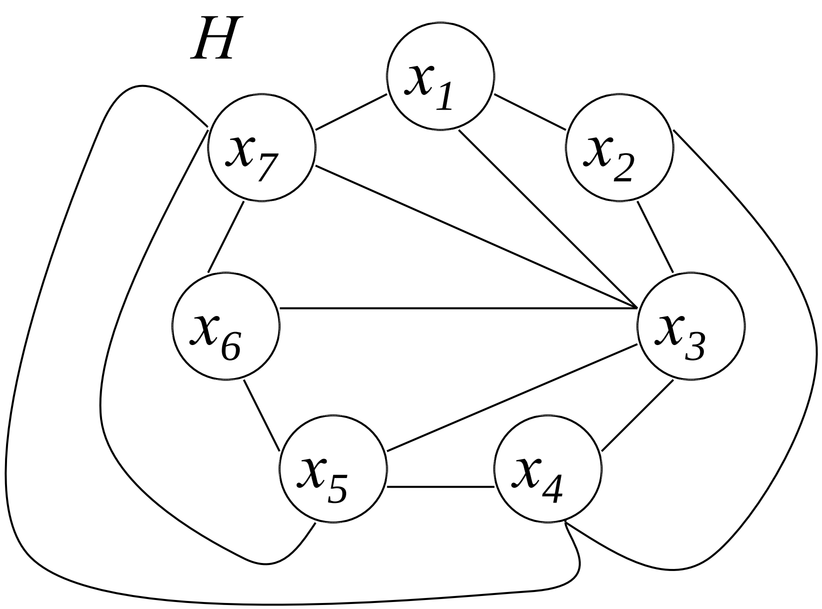
$\max\alpha_{\gamma\delta} = \alpha_{16} = \alpha_{35} = 7$, дают две пары множеств ψ_1, ψ_6 и ψ_3, ψ_5.

Возьмем множества

$\boldsymbol{\psi_1 = \{u_{13}, u_{37}, u_{36}, u_{35}\}}$ и

$\boldsymbol{\psi_6 = \{u_{24}, u_{47}, u_{57}\}}$.

В суграфе H, содержащем максимальное число непересекающихся ребер, ребра, вошедшие в $\boldsymbol{\psi_1}$, проводим внутри гамильтонова цикла, а в $\boldsymbol{\psi_6}$ – вне его



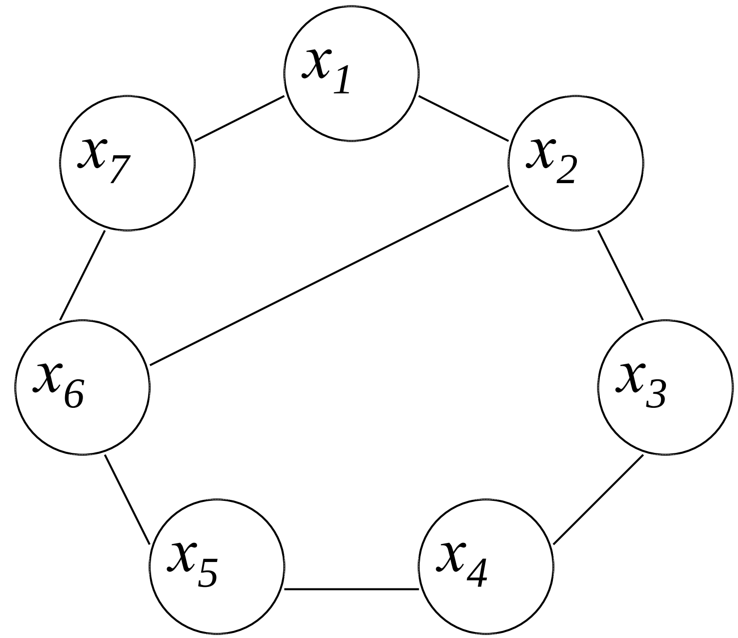
Удалим из $\Psi_{G'}$ ребра, вошедшие в ψ_1 и ψ_6 $\boldsymbol{\psi_4 = \{u_{26}\}}$; $\boldsymbol{\psi_5 = \{u_{26}\}}$.

Объединим одинаковые множества, не реализованным осталось единственное ребро $\boldsymbol{\psi_4 = \{u_{26}\}}$.

Проведем его.

Все ребра графа *G* реализованы.

Толщина графа *m = 2.*



Если взять множества $\boldsymbol{\psi_3 = \{u_{13}, u_{37}, u_{47}, u_{57}\}}$ и $\boldsymbol{\psi_5 = \{u_{26}, u_{36}, u_{35}\}}$, то не реализованным окажется ребро $\boldsymbol{\{u_{24}\}}$.