МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОСТОЧНО-СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Основы вычислительной математики

Выпуск 5: Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Методические указания

Составители: Ширапов Д.Ш.,
Ширапов Б.Д.,
Чимитова Е.Г.

Улан-Удэ, 2004

Рецензент Л.В. Найханова, к.т.н., доцент

Методические указания содержит краткое описание аналитических и численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Даны варианты заданий для решения на компьютере с применением описанных методов. Методические указания предназначены для студентов специальностей 220400 – «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем», 351500 – «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем» и 220100 – «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети».

Ключевые слова: метод, система, дифференциальное уравнение, задача, решение, погрешность, аппроксимация, схема, разность, условие, начальное, оценка, шаг, сетка.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Дифференциальные уравнения являются инструментом познания мира и, как любой инструмент, они развиваются и совершенствуются. «Познание мира» с помощью дифференциальных уравнений обычно состоит из двух этапов:

1. Составление модели (дифференциального уравнения, описывающего то или иное явление). Например,

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = F\left(t, r, \frac{d^2r}{dt^2}\right) \text{ – второй закон Ньютона,}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \text{ – уравнение Лапласа,}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z) \text{ – уравнение Пуассона.}$$

2. Исследование с помощью получившейся модели и самой модели.

1. Постановка задачи

А. Простейшим обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) является уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y). \qquad (1.1)$$

Основная задача, относящаяся к этому уравнению, есть задача Коши:

Найти решение уравнения (1.1)

$y = y(x)$,

удовлетворяющее начальному условию

$$y(x_0) = y_0. \qquad (1.2)$$

Другими словами, требуется найти интегральную кривую y=y(x), проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ (см. рис.1).

Б. Для дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

задачи Коши состоит в нахождении решения

$y = y(x)$,

удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ - заданные числа.

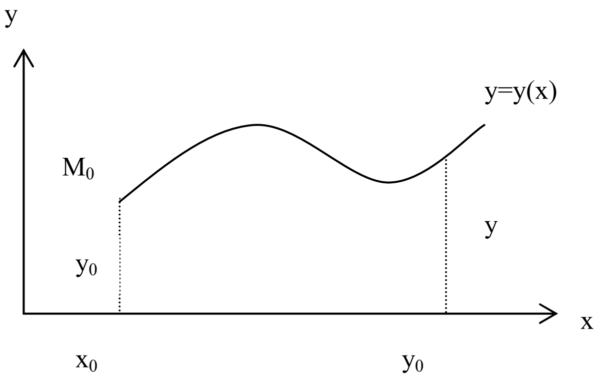

Рис.1.

B. В приложениях часто встречаются системы ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n), \\ . \quad . \quad . \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n), \end{cases} \qquad (1.3)$$

где x – независимая переменная; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – искомые функции. Задача Коши (1.3) заключается в отыскании $y_1, y_2, \ldots, y_n$, удовлетворяющих системе (1.3) и начальным условиям

$y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20}$, …, $y_n(x_0)=y_{n0}$.

Примечание. Даже для простейшего ОДУ первого порядка (1.1) нахождение решения бывает невыполнимо с помощью конечного числа математических операций. Тем более это затруднено для системы ОДУ.

Указанное обстоятельство привело к созданию большого числа методов приближенного решения. Эти методы в зависимости от формы можно разделить на три основные группы:

1. Аналитические методы, дающие приближенное решение ОДУ в виде аналитического выражения.
2. Графические методы, дающие приближенное решение в виде графика.
3. Численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы.

2. Метод разложения в ряды

Исторически первым методом решения ОДУ, которое использовал его автор Ньютон, был метод разложения в ряды. Искомое решение разлагается в ряд с неизвестными коэффициентами. Решение сводится к нахождению этих коэффициентов.

А. Сначала рассмотрим дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \qquad (2.1)$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0 . \qquad (2.2)$$

Пусть правая часть (2.1) является аналитической функцией в начальной точке (x_0, y_0), то есть в некоторой окрестности этой точки может быть разложена в степенной ряд вида

$$f(x, y)= \sum_{p,q=0}^{\infty} c_{pq}(x-x_0)^p (y-y_0)^q ,$$

где p, q – целые неотрицательные числа; c_{pq} - постоянные коэффициенты.

Тогда существует единственное решение y=y(x) уравнения (2.1), удовлетворяющее условию (2.2), причем это решение является аналитическим в точке x_0 и может представлено в виде ряда Тейлора

$$y \equiv y(x)= \sum_{p=0}^{\infty} c_p (x-x_0)^p , \qquad (2.3)$$

где $c_p = \frac{1}{p!} y^{(p)}(x_0)$, $\quad p = 0, 1, 2, ...;$

Коэффициент c_0 определяется из условия (2.2):

$c_0 = y(x_0)=y_0$.

Коэффициент c_1 находится из (2.1):

$c_1=y'(x_0)=f(x_0, y_0)$.

Далее найдем

$$y'' = f'_x(x, y) + f'_y(x, y)\, y'_x ,$$

отсюда

$$c_2 = \frac{1}{2} y''(x_0) = \frac{1}{2}\left[f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\, y'_0\right] ,$$

где $y'_0 = f(x_0, y_0)$.

Далее находим y''', y^{IV} и т.д. и аналогично могут быть определены коэффициенты c_4, c_5 и т.д. Следовательно, формально построено аналитическое решение (2.3).

Б. Вышеизложенный способ нахождения решения дифференциального уравнения методом разложения в ряды легко обобщается на случай дифференциального уравнения n-го порядка.

Пусть имеем дифференциальное уравнение 2-го порядка

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.4}$$

с начальными условиями

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0'. \tag{2.5}$$

Предполагая, что функция $f(x, y, y')$ аналитическая в начальной точке (x_0, y_0, y_0') будем искать решение задачи Коши (2.4) и (2.5) в виде ряда Тейлора

$$y(x)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{y_0^{(p)}}{p!}(x-x_0)^p . \tag{2.6}$$

Здесь y_0 и y_0' известны из (2.5). Из (2.4) получим

$$y_0'' = f(x_0, y_0, y_0').$$

Дифференцируя последовательно (2.4) по x согласно правилу дифференцирования сложной функции и полагая $x = x_0$, будем иметь

$$y''' = f_x'(x_0, y_0, y_0') + f_y'(x_0, y_0, y_0')\, y_0' + f_{y'}'(x_0, y_0, y_0')\, y_0''$$

и так далее. Таким образом, может быть построен ряд (2.6), который является решением задачи (2.4) и (2.5).

3. Метод последовательных приближений

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$y(x_0)=y_0. \tag{3.2}$$

Предположим, что в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ уравнение (3.1) удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности решения.

Ищем решение $y=y(x)$ для значений $x \ge x_0$ (случай $x \le x_0$ аналогичен). Интегрируя правую и левую части (3.1) в пределах от x_0 до x получим

$$y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx$$

в силу условия (3.2) будем иметь

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)dx \tag{3.3}$$

Тогда, заменяя в (3.3) неизвестную функцию y данным значением y_0, получим первое приближение

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)dx$$

далее

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)dx$$

. . . .

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})dx \quad (n=1, 2, \dots). \tag{3.4}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$ удовлетворяющий уравнению (3.1) и условию (3.2) является решением (3.1).

Оценка погрешности метода последовательных приближений (МПП) производится по формуле

$$\varepsilon_n(x) \le MN^n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},\ n = 0, 1, 2, \dots; \tag{3.5}$$

где N – постоянная Липшица, $M \ge \max\limits_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

Из (3.5) следует, что $\varepsilon_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Замечания:

1. При использовании МПП в качестве начального приближения y_0 выбирается любая функция, достаточно близкая к точному решению.
2. При использовании МПП аналитичность правой части дифференциального уравнения не обязательна.

4. Метод Эйлера

Дано дифференциальное уравнение

$y' = f(x, y)$ (4.1)

с начальным условием

$y(x_0) = y_0$.

Выбрав достаточно малый шаг h построим систему равноотстоящих точек на отрезке [a,b]

$x_i = x_0 + i\,h \quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$ (4.2)

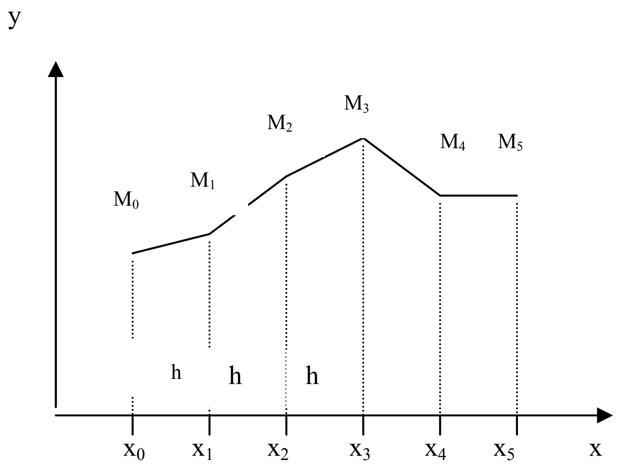

Рис.2

Искомую интегральную кривую $y=y(x)$, проходящую через точку $M_0(x_0, y_0)$, приближенно заменим ломаной $M_0. M_1. M_2. \ldots$, с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, звенья которой $M_i\, M_{i+1}$ прямолинейны между прямыми $x=x_i$, $x=x_{i+1}$. Тогда уравнение (4.1) можно заменить следующим уравнением:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} \approx f(x_i, y_i) \qquad (4.3)$$

для точки $M_i(x_i, y_i)$. Прямые $\frac{y_{i+1} - y_i}{h}$ аппроксимирующие решение задачи (4.1) называются ломанными Эйлера (i = 0, 1, 2, …).

Из (4.3) можно записать

$y_{i+1} = y_i + h\,f(x_i, y_i)$ или при $\Delta y_i = h\,f(x_i, y_i)$

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. (4.4)

Формула (4.4) позволяет при заданном начальном условии $y(x_0)=y_0$ численно решить уравнение (4.1). Недостатки метода:

1. Малая точность;
2. Накопление ошибок.

4.1. Модификации метода Эйлера

А. Согласно методу Эйлера ищем решение уравнения (4.1) формулой (4.4). Более точным является усовершенствованный метод ломаных, при котором сначала вычисляются промежуточные значения

$$x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \frac{h}{2}, \quad y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)$$

и находят значение интегральных кривых в средней точке $(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, т.е.

$f_{i+\frac{1}{2}} = f(x_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}})$, а затем полагают $y_{i+1} = y_i + h\, f_{i+\frac{1}{2}}$.

Б. Другой модификацией метода Эйлера является усовершенствованный метод Эйлера-Коши, при котором сначала определяется

$\tilde{y}_{i+1} = y_i + h\,f_i$, $\quad x_i = x_0 + i\,h$, $\quad (i = 0, 1, 2, \ldots)$

исходя из которого находится направление поля интегральных кривых

$\tilde{f}_{i+1} = f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$

затем приближенно вычисляют

$$y_{i+1} = y_i + h\,\frac{f_i + f_{i+1}}{2}.$$

В. Метод Эйлера-Коши можно еще более уточнить, применяя итерационную обработку следующим образом:

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y^{(k-1)}_{i+1})\right], \ (k = 1, 2, \ldots;\ i = 0, 1, 2, \ldots),$$

$x_i = x_0 + i\,h$.

Итерация заканчивается при выполнении условия

$$\left|\; y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)} \;\right| < \varepsilon, \quad 0<\varepsilon<1.$$

Погрешность метода Эйлера можно оценивать неравенством

$$\delta \le \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}\left| f''(x) \right| h^2 m = \frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}\left| f''(x) \right| (b-a)h \;.$$

Это означает, что метод Эйлера имеет первый порядок точности. В частности, при уменьшении h в 10 раз погрешность уменьшится примерно в 10 раз.

Практическую оценку погрешности решения, найденного на сетке с шагом $h/2$, в точке $x_i \in [\,a, b\,]$ производят с помощью приближенного равенства - правила Рунге:

$$| f(x_i) - y_i(h/2) | \approx \frac{| y_i(h) - y_i(h/2) |}{2^p - 1} \;, \qquad (4.5)$$

где p - порядок точности численного метода. Таким образом, оценка полученного результата по формуле (4.5) вынуждает проводить вычисления дважды: первый раз с шагом h, второй - с шагом $h/2$.

5. Методы Рунге-Кутта

Методы решения задачи Коши

$y' = f(x, y)$,

$y(x_0)=y_0$

на равномерной сетке $\{x_0 = a, x_1, x_2, \ldots , x_m = b\}$ отрезка $[a, b]$ с шагом $h=(b - a)/m$ являются методами Рунге-Кутта, если начиная с данных (x_0, y_0) решение ведется по следующим рекуррентным формулам:

$$\left[\begin{array}{l} x_i = x_{i-1} + h, \qquad y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1} \qquad (i = \overline{1,m}) \;, \\ \Delta y_{i-1} = \sum\limits_{j=1}^{p} d_j k_j^{[i-1]} \quad , k_j^{[i-1]} = h\, f(x_{i-1} + c_j h,\, y_{i-1} + c_j k_{j-1}^{[i-1]}) \end{array}\right. \qquad (5.1)$$

Метод называют методом Рунге-Кутта порядка p, если он имеет p-ый порядок точности по шагу h на сетке. Порядок точности p достигается с помощью формул (5.1) при определенных значениях коэффициентов c_j и d_j $(j = \overline{1,p})$. При чем $c_1 = 0$ всегда. Эти коэффициенты вычисляют по следующей схеме:

1. Точное решение $f(x_0 + h)$ и его приближение $y_1=y_0 + \Delta y_0$ представляют в виде разложения по формуле Тейлора с центром в точке x_0 вплоть до слагаемого порядка h^{p+1};

2. Из равенств подобных членов при одинаковых степенях h в двух разложениях получают уравнения, решая которые находят c_j и d_j.

Отметим, что метод Эйлера можно называть методом Рунге-Кутта первого порядка. Действительно, для $p = 1$, $c_1 = 0$, $d_1 = 1$ формулы (5.1) преобразуются в соотношения:

$x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$, $\quad (i = \overline{1,m})$,

$\Delta y_{i-1} = d_1 k_1^{[i-1]} = k_1^{[i-1]}$, $\quad k_1^{[i-1]} = h \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})$

или получим формулы Эйлера

$x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + h\, f(x_{i-1}, y_{i-1})$.

Формулы метода Рунге-Кутта второго порядка совпадают с формулами метода Эйлера-Коши.

Метод Рунге-Кутта четвертого порядка называют классическим методом Рунге-Кутта. При $p = 4$, $c_1=0$, $c_2=c_3=\frac{1}{2}$, $c_4=1$, $d_1 = d_4 = \frac{1}{6}$, $d_2 = d_3 = \frac{1}{3}$ из формул (5.1) получим алгоритм решения задачи Коши классическим методом Рунге-Кутта:

$x_i = x_{i-1} + h$, $y_i = y_{i-1} + \Delta y_{i-1}$, $\quad (i = \overline{1,m})$,

$$\left[\begin{array}{l} \Delta y_{i-1} = \frac{1}{6}[\, k_1^{[i-1]} + 2\, k_2^{[i-1]} + 2\, k_3^{[i-1]} + k_4^{[i-1]}] \,, \\ k_1^{[i-1]} = h\; f\;(\,x_{i-1}, y_{i-1}) \,, \\ k_2^{[i-1]} = h\; f\;(\,x_{i-1} + \frac{1}{2}h,\, y_{i-1} + \frac{1}{2}\, k_1^{[i-1]}) \,, \\ k_3^{[i-1]} = h\; f\;(\,x_{i-1} + \frac{1}{2}h,\, y_{i-1} + \frac{1}{2}\, k_2^{[i-1]}) \,, \\ k_4^{[i-1]} = h\; f\;(\,x_{i-1} + h,\, y_{i-1} + k_3^{[i-1]}) \,. \end{array}\right. \qquad (5.2)$$

Правило Рунге (4.5) практической оценки погрешности решения для численного метода четвертого порядка имеет вид

$$| f(x_i) - y_i(h/2) | \approx \frac{1}{15} | y_i(h) - y_i(h/2) | \,.$$

6. Метод Адамса

Недостатком методов Рунге-Кутта является необходимость вычислять p – раз правую часть уравнение $f(x, y)$. От этого недостатка свободны многошаговые методы, которые для вычисления значения решения y_{i+1} используют значения решения не в одной точке y_i, как это делается в одношаговых методах, а в нескольких предыдущих точках $y_i, y_{i-1}, y_{i-2},\ldots, y_{i-k+1}$. Здесь рассмотрим два многошаговых методов – методы Адамса и Милна.

Имеем дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (6.1)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 . \qquad (6.2)$$

Пусть x_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$) система равноотстоящих значений с шагом h и $y_i = y(x_i)$.

Очевидно, что

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y' dx. \qquad (6.3)$$

В силу второй интерполяционной формулы Ньютона с точностью до разностей четвертого порядка получаем

$$y' = y'_i - q\Delta y'_{i-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y'_{i-3},$$

где $q = (x - x_i)/h$.

Подставляя полученное y' в (6.3) и учитывая, что $dx = hdq$ получим

$$\Delta y_i = h\int_0^1 (y'_i + q\Delta y'_{i-1} + \frac{q^2+q}{2}\Delta^2 y'_{i-2} + \frac{q^3+3q^2+2q}{6}Д^3 y'_{i-3})dq.$$

Отсюда получаем экстраполяционную формулу Адамса

$$Дy_i = hy'_i + \frac{1}{2}Д(hy'_{i-1}) + \frac{5}{12}Д^2(hy'_{i-2}) + \frac{3}{8}Д^3(hy'_{i-3}). \qquad (6.4)$$

Для того, чтобы использовать формулу (6.4) нужны 4 начальных значения: y_0, y_1, y_2, y_3, так называемый «начальный отрезок», который определяют исходя из начального условия (6.2), каким-нибудь численным методом. Зная y_0, y_1, y_2, y_3 из (6.1) можно найти производные y'_0, y'_1, y'_2, y'_3 и составить таблицу разностей:

$$Д(hy'_0), Д(hy'_1), Д(hy'_2), Д^2(hy'_0), Д^2(hy'_1), Д^3(hy'_0) . \qquad (6.5)$$

Дальнейшие значения y_i ($i=4,5,\ldots$) искомого решения можно вычислить по формуле (6.4), пополняя по мере необходимости таблицу разностей (6.5).

Для контроля рекомендуется, вычислив первое приближение для $\Delta y_i \approx Дy_i^{(1)}$ по формуле (6.4) определить $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i^{(1)}$, подсчитать конечные разности

$$Д(hy'_i), Д^2(hy'_{i-1}), Д^3(hy'_{i-2}) \qquad (6.6)$$

и затем найти второе приближение по более точной формуле

$$Дy_i^2 = hy'_i + \frac{1}{2}Д(hy'_i) - \frac{1}{12}Д^2(hy'_{i-1}) - \frac{1}{24}Д^3(hy'_{i-2}). \qquad (6.7)$$

Если $\Delta y_i^{(1)}$ и $\Delta y_i^{(2)}$ отличаются с требуемой точностью, то можно положить $\Delta y_i = Дy_i^{(2)}$, а затем найдя $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, перевычислить конечные разности (6.6). После этого, следует снова найти Δy_i по (6.7).

Если расхождение величин $\Delta y_i^{(1)}$ и $\Delta y_i^{(2)}$ значительно, то необходимо уменьшить шаг h. Обычно шаг уменьшают в два раза.

7. Метод Милна

Одним из наиболее простых и практически удобных методов численного решения дифференциальных уравнений является метод Милна.

Пусть дано уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (7.1)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0 \qquad (7.2)$$

Выбрав, шаг h положим

$$x_i = x_0 + ih, \quad y_i = y(x_i), \quad y'_i = f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Первые 4 значения начального отрезка y_0, y_1, y_2, y_3 находим, применив метод Рунге-Кутта. Тем самым будут известны y'_i ($i = 0, 1, 2, 3$).

Дальнейшие значения $y_i = y(x_i)$ ($i = 4, 5, 6, \ldots$) определяются по следующей схеме:

1) вычисляем первое приближение $y_i^{(1)}$ по формуле

$$y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y'_{i-3} - y'_{i-2} + 2y'_{i-1}) \quad (i = 4, 5, 6, \ldots) \qquad (7.3)$$

2) значение $y_i^{(1)}$ подставляем в (7.1.) и определяем $y_i^{'(1)} = f(x_1, y_i^{(1)})$;

3) находим второе приближение $y_i^{(2)}$ по формуле

$$y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(y'_{i-2} + 4y'_{i-1} + y_i'^{(1)}) \qquad (i = 4, 5, 6, \ldots). \qquad (7.4)$$

Милн показал, что абсолютная погрешность значения $y_i^{(2)}$ приближенно равна

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}\left|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}\right|. \qquad (7.5)$$

Поэтому, если $\varepsilon_i \le \varepsilon$, где ε - заданная предельная погрешность решения, то можно положить $y_i \approx y_i^{(2)}$ и $y'_i = f(x_i, y_i^{(2)})$.

Далее переходим к вычислению следующего значения y_{i+1}, повторяя указанную выше схему. В случае, если точность ε не обеспечена, следует уменьшить шаг h и сделать пересчет.

***Замечания*:**

Суммарная ошибка метода Милна есть величина порядка h^4.

Метод Милна не обладает устойчивостью, поэтому его рекомендуют использовать, когда предполагаемое число шагов не велико.

8. Явная и неявная схемы аппроксимации задачи Коши

Рассматривается задача Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \qquad (8.1)$$

Сделаем аппроксимацию (8.1) правой разностью

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), i = \overline{1, n};$$

$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$ - явная схема, потому что формула дает возможность вычислить значения y_{i+1} в точке x_{i+1} по известному значению y_i.

Сделаем аппроксимацию (8.1) левой разностью

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} = f(x_i, y_i), i = \overline{1, n};$$

$y_i = y_{i-1} + hf(x_i, y_i)$ - неявная схема, потому что по этой формуле значение y_i в точке x_i вычисляется с использованием в $f(x_i, y_i)$ вычисляемого значения y_i.

Сделаем аппроксимацию (8.1) центральной разностью

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = f(x_i, y_i), i = \overline{1, n};$$

Эта схема незамкнутая, потому что система состоит из n уравнений при n+1 неизвестных. Замкнуть систему можно по-разному, но чтобы не потерять второй порядок точности аппроксимации, сделаем следующее

$$f(x_i, y_i) = \frac{1}{2}[f(x_{I-1}, y_{i-1}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})].$$

Тогда

$$\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{1}{2}\left[f(x_{i-1}, y_{i-1}) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$

или

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{2h} = \frac{1}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right].$$

В этом случае n +1 уравнением будет

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right].$$

9. Решение системы дифференциальнных уравнений первого порядка

Пусть дана система двух дифференцированных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(x, y_1, y_2), \\ y'_2 = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases} \qquad (9.1)$$

Решением системы (9.1) называется пара функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, при подстановке которых в систему получаются тождества

$$\varphi'_1(x) \equiv f_1(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)); \varphi'_2(x) \equiv f_2(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x)).$$

Решению $\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x), \\ y_2 = \varphi_2(x) \end{cases}$

системы уравнений (9.1) соответствует интегральная кривая в трехмерном пространстве (x, y_1, y_2) (см. рис.3).

Условия, при которых через точку $P_0(x_0, y_{10}, y_{20})$ области D трехмерного пространства проходит единственная интегральная кривая, содержатся в теореме существования и единственности решения.

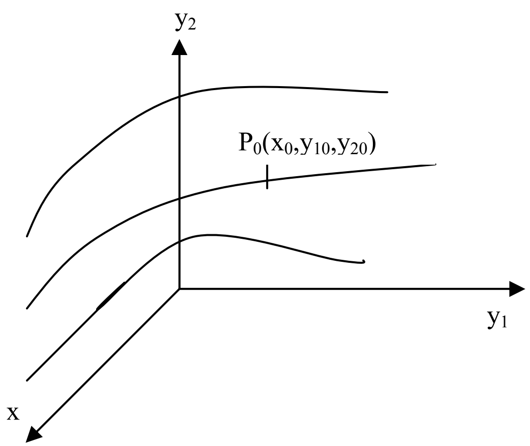

Рис.3.

Теорема 1. Если функции $f_1(x, y_1, y_2)$ и $f_2(x, y_1, y_2)$ - правые части дифференциальных уравнений системы (9.1) - непрерывны вместе со своими частными производными по y_1 и y_2 в некоторой области D трехмерного пространства, то для любой точки $(x_0, y_{10}, y_{20})\in D$ система (9.1) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}. \tag{9.2}$$

Задача Коши для системы (9.1) состоит в нахождении решения удовлетворяющего начальным условием (9.2).

Постановка задачи Коши для системы n дифференциальных уравнений первого порядка аналогична задаче (9.1) - (9.2), а именно: требуется найти решение системы

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2,..., y_n), \\ --- \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2,..., y_n) \end{cases} \tag{9.3}$$

при начальных условиях

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{9.4}$$

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (9.3) - (9.4) имеет формулировку, аналогичную приведенной для частного случая n = 2.

Если ввести векторные обозначения

$$Y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ --- \\ y_n(x) \end{bmatrix},\quad Y'(x)=\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ --- \\ y_n'(x) \end{bmatrix},\quad F(x, y)=\begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \\ --- \\ f_n(x, y) \end{bmatrix},\quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ --- \\ y_{n0} \end{bmatrix},$$

то задача Коши (9.3) - (9.4) в векторной форме запишется так:

$$Y' = F(x, y),\ \ Y(x_0) = Y_0. \tag{9.5}$$

Численное решения задачи Коши (9.5) состоит в том, что на отрезке [a, b] требуется получить приближенные значения координат вектора Y(x) в узлах сетки x_i $(i = \overline{1,m})$.

Обозначим вектор решения через $Y_i \approx Y(x_i)$ $(i = \overline{1,m})$, а его координаты - через $y_{k\,i}$ $(k = \overline{1,n}\,; i = \overline{1,m})$ так, что $y_{k\,i} \approx y_k(x_i)$ или

$$y_i = \begin{bmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ -- \\ y_{ni} \end{bmatrix} \approx y(x_i) = \begin{bmatrix} y_1(x_i) \\ y_2(x_i) \\ --- \\ y_n(x_i) \end{bmatrix} \qquad (i = \overline{1,m}).$$

Будем искать решение на сетке с шагом h = (b - a)/m.

Погрешность численного метода оценивается формулой, $\delta = \max\limits_{1\le i\le m}\{\delta_i\}$, где δ_i - погрешность решения на сетке с шагом h в точке x_i

$$\text{д}_i(h) = \max_{1\le i\le n}\{|\, y_{ki}(h) - y_k(x_i)\,|\}.$$

На практике погрешность в точке x_i оценивается по формуле Рунге, аналогичной (4.5). А именно, пусть

$Y_i(h) = \begin{bmatrix} y_{1i}(h) \\ y_{2i}(h) \\ --- \\ y_{ni}(h) \end{bmatrix}$, $Y_i(h/2) = \begin{bmatrix} y_{1i}(h/2) \\ y_{2i}(h/2) \\ ----- \\ y_{ni}(h/2) \end{bmatrix}$ значения численного решения в точке x_i, полученные для шагов h и h/2, соответственно. Тогда погрешность δ_i в точке x_i для вычислений с шагом h/2 выражается формулой

$$\delta_i(h/2) \approx \frac{\max\limits_{1\le i\le n}\{|\, y_{ki}(h) - y_{ki}(h/2)\,|\}}{2^p - 1}, \qquad (9.6)$$

где р- порядок точности численного метода.

Численное решение задачи Коши для системы дифференцированных уравнений можно найти с помощью метода Рунге-Кутта четвертого порядка. Векторная форма, алгоритма метода Рунге-Кутта для задачи (9.5) соответствует рекуррентным формулам (5.2) и имеет вид

$x_i = x_{i-1} + h, \quad Y_i = Y_{i-1} + \Delta Y_{i-1}, \quad (i = \overline{1, m}),$

$$ДY_{i-1} = \frac{1}{6}(K_1^{[i-1]} + 2K_2^{[i-1]} + 2K_3^{[i-1]}) + K_4^{[i-1]}),$$

$$K_1^{[i-1]} = hF(x_{i-1}, y_{i-1}),$$

$$K_2^{[i-1]} = hF(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, Y_{i-1} + \frac{1}{2}K_1^{[i-1]}),$$

$$K_3^{[i-1]} = hF(x_{i-1} + \frac{1}{2}h, Y_{i-1} + \frac{1}{2}K_2^{[i-1]}),$$

$$K_4^{[i-1]} = hF(x_{i-1} + h, Y_{i-1} + K_3^{[i-1]}),$$

где векторы $K_j^{[i-1]} = \begin{bmatrix} k_{j1}^{[i-1]} \\ k_{j2}^{[i-1]} \\ --- \\ k_{jn}^{[i-1]} \end{bmatrix}$ (j = 1, 2, 3, 4).

10. Решение дифференцированных уравнений высших порядков

Задача Коши для дифференцированного уравнения n-го порядка ставится так: найти решение уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \qquad (10.1)$$

при начальных условиях

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (10.2)$$

Задачи Коши (10.1) - (10.2) для дифференциального уравнения n-го порядка приводится к задаче Коши для системы n дифференциальных уравнений первого порядка (9.3) - (9.4), к которой затем применяют численные методы решения систем.

Положим

$y_1 = y, y_2 = y_1', y_3 = y_2', ..., y_n = y_{n-1}'$

и выразим функцию y(x) вместе с её производными до (n -1)-го порядка включительно через введенные функции:

$y = y_1, y' = y_2, y'' = y_3, ..., y^{(n-1)} = y_n.$

Теперь вместо задачи (10.1) - (10.2) имеем задачу для системы уравнений

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_3, \\ --- \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (10.3)$$

при начальных условиях

$$y_1(x_0) = y_0, y_2(x_0) = y_0', ... y_n(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (10.4)$$

Отметим, что численное решение задачи Коши (10.1) - (10.2.) - это таблица значений $y_i = y_{1i}$ в точках x_i $(i = \overline{1, m})$.

11. Замечания об оценке погрешностей решений дифференциальных уравнений

Гарантией правильности решения дифференциальных уравнений может служить:

1) проверка выполнения условий задачи (например, проверка подстановкой, полученного приближенного решения в решаемое уравнение и оценка расхождения правой и левой части);
2) двойной пересчет по возможности другим методом;
3) применение более грубой схемы;
4) качественный анализ задачи.

Пусть y(x) - искомая функция (решение задачи Коши), значения $y_i = y(x_i)$ которой обычно определяются в узлах.

Обозначим через $\tilde{y}_i = \tilde{y}(x_i)$ - приближенное решение. Тогда абсолютная погрешность приближенного решения $\tilde{y}(x)$ выразится формулой

$$\delta_i \ge |\tilde{y}_i - y_i|. .$$

В свою очередь $\delta_i = \delta_i^* + \varepsilon_i$, где $\delta_i^* = \left|\tilde{y}_i^* - y_i\right|$ - погрешность метода; $\tilde{y}_i^*$ - результат применения приближенного метода; $\varepsilon_i = \left|\tilde{y}_i - \tilde{y}_i^*\right|$ - текущая погрешность. Значительную роль в текущей погрешности играет округление промежуточных результатов счета. Погрешность δ_i^* представляет собой ошибку, происходящую от замены точного алгоритма приближенным. Эта погрешность – неустранима.

13. Задания для решения

Цель заданий:

1. Практическая реализация на ПК различных численных методов решения ОДУ;
2. Оценка погрешности использованного метода;
3. Визуальное сравнение точного и приближенного решений после их выводов на монитор в графическом виде;
4. Совершенствование способов программирования.

Задание 1.

Решить методом разложения в ряды:

1. Получить решение уравнения

$$y' = \frac{y}{x+y}, \qquad y(1) = 2$$ включительно до 4-х членов в ряде.

2. Получить решение дифференциального уравнения

$$y'' + xy' + y = 0$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$ включительно до 6-ти членов в ряде.

3. Найти решение уравнения

$$x'' + (1 + 0.1t)x + 0.1x'^2 = 0$$

при $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

4. Найти решение $y'' = xe^x$ при $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
5. Найти решение $y'' = e^{2y}$ при $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Задание 2.

Решить методом последовательных приближений:

1. $y' = x - y$, $y(0) = 1$.
2. $y' = 1 + y$, $y(1) = 1$.

3. $y' = y - x^2$, $y(0) = 1$.
4. $y' = x + y$, $y(0) = 1$.
5. $y' = \frac{xy}{2}$, $y(0) = 1$.

Задание 3.

Решить методом Эйлера:

1. $y' = \frac{1+xy}{x^2}$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 2$.

   Точное решение $y(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2. $y' = y - \frac{2x}{y}$, $y(0) = 1$, $0 \le x \le 1$.

   Точное решение $y(x) = \sqrt{2x+1}$.

3. $y' = x + \frac{3y}{x}$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 2$.

   Точное решение $y(x) = x^2(x-1)$.

4. f i + $\frac{1}{2}$

   Точное решение $y(x) = e^{x^2/2}$

5. $y' = \frac{y^2 + xy}{x^2}$, $y(1) = 1$, $1 \le x \le 2$.

   Точное решение $y(x) = x/(1 - \ln x)$.

Задание 4.

Решить методом Рунге-Кутта:

1. $y' = \frac{1 - y + \ln x}{x}$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 2$.

   Точное решение $y(x) = \ln x$.

2. $y' = \frac{x+y}{x}$, $y(1) = 0$, $1 \le x \le 2$.

   Точное решение $y(x) = x\ln x$.

3. $y' = xe^{-x^2} - 2xy$, $y(0) = 0$, $0 \le x \le 1$.

Точное решение $y(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-x^2}$.

4. $y'+y\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0)=0, \quad 0\le x\le 1$.

Точное решение $y(x)=\sin x+e^{-\sin x}-1$.

5. $y'+y\mathrm{tg}x=\sin 2x, \quad y(0)=-1, \quad 0\le x\le 1$.

Точное решение $y(x)=(1-2\cos x)\cos x$.

Задание 5.

Решить методом Адамса:

1. $xy'-y^2\ln x+y=0, \quad y(1)=1, \quad 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=1/(1+\ln x)$.

2. $(x^2+1)y'+xy-1=0, \quad y(0)=0, \quad 0\le x\le 1$.

Точное решение $y(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})/\sqrt{x^2+1}$.

3. $xy'-y=x^2\sin x, \quad y(\frac{\pi}{2})=0, \quad \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}+1$.

Точное решение $y(x)=-x\cos x$.

4. $y'+e^{x-y}=e^{x(1-x)}+2x, \quad y(0)=0, \quad 0\le x\le 1$.

Точное решение $y(x)=x^2$.

5. $xy'=y\ln y, \quad y(1)=e, \quad 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=e^x$.

Задание 6.

Решить методом Милна:

1. $xy'-y(\ln(xy)-1)=0$, $y(1)=e$, $1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=e^x/x$.

2. $xy'=x\sin\frac{y}{x}+y, \quad y(1)=\frac{\pi}{2}, \quad 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=2x\,\mathrm{arctg}\,x$.

3. $x^2y'=(x-1)y, \quad y(1)=e, \quad 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=xe^{1/x}$.

4. $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x, \quad y(e)=\frac{e^2}{2}, \quad e\le x e+1$.

Точное решение $y(x)=\frac{x^2}{2}\ln x$.

5. $y'-y\,\mathrm{ctg}x=\sin x, \quad y(\frac{\pi}{2})=0, \quad \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}+1$.

Точное решение $y(x)=(x-\frac{\pi}{2})\sin x$.

Задание 7.

Задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка преобразовать к задаче Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти решение последней задачи методом Рунге-Кутта на отрезке [a, b]. Вычисления провести дважды с шагами h и h/2 при h = 0,2. Найти численное решение дифференциального уравнения и оценить его погрешность формулой Рунге.

1. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0, y(1)=e^2, y'(1)=2e^2, 1\le x\le 2$

Точное решение $y(x)=e^{2x}$.

2. $x^2y''+xy'-y=3x^2, y(1)=1, y'(1)=1, 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=\frac{1}{2}(2x^2-x+\frac{1}{x})$.

3. $x^2y''-6y=0, y(1)=1, y'(1)=3, 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=x^3$.

4. $x^2y''-12y=0, y(1)=1, y'(1)=4, 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=x^4$.

5. $x^2y''+xy'=0, y(1)=0, y'(1)=1, 1\le x\le 2$.

Точное решение $y(x)=\ln x$.

Рекомендуемая литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа.- М.: Наука, 1967.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы.- М.: Наука, 1987.
3. Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений.- М.: Мир, 1990.
4. Ракитин В.И., Первушин В.Е. Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров.- М.: Высшая школа, 1998.

Редактор Т.А. Стороженко
Подписано в печать 31.03.2004 г.
Формат 60x84 1/16. Усл.п.л. 1,63,
уч.-изд.л. 1,5. Тираж 50 экз. Заказ №

Издательство ВСГТУ. г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в.
Отпечатано в типографии ВСГТУ.
г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 42.