Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет

информационных технологий, механики и оптики

Кафедра информатики и прикладной математики

Вычислительная математика

Реферат на тему

«Метод Милна для решения ОДУ».

Выполнил Кудряшов А.А.

Группа 2121

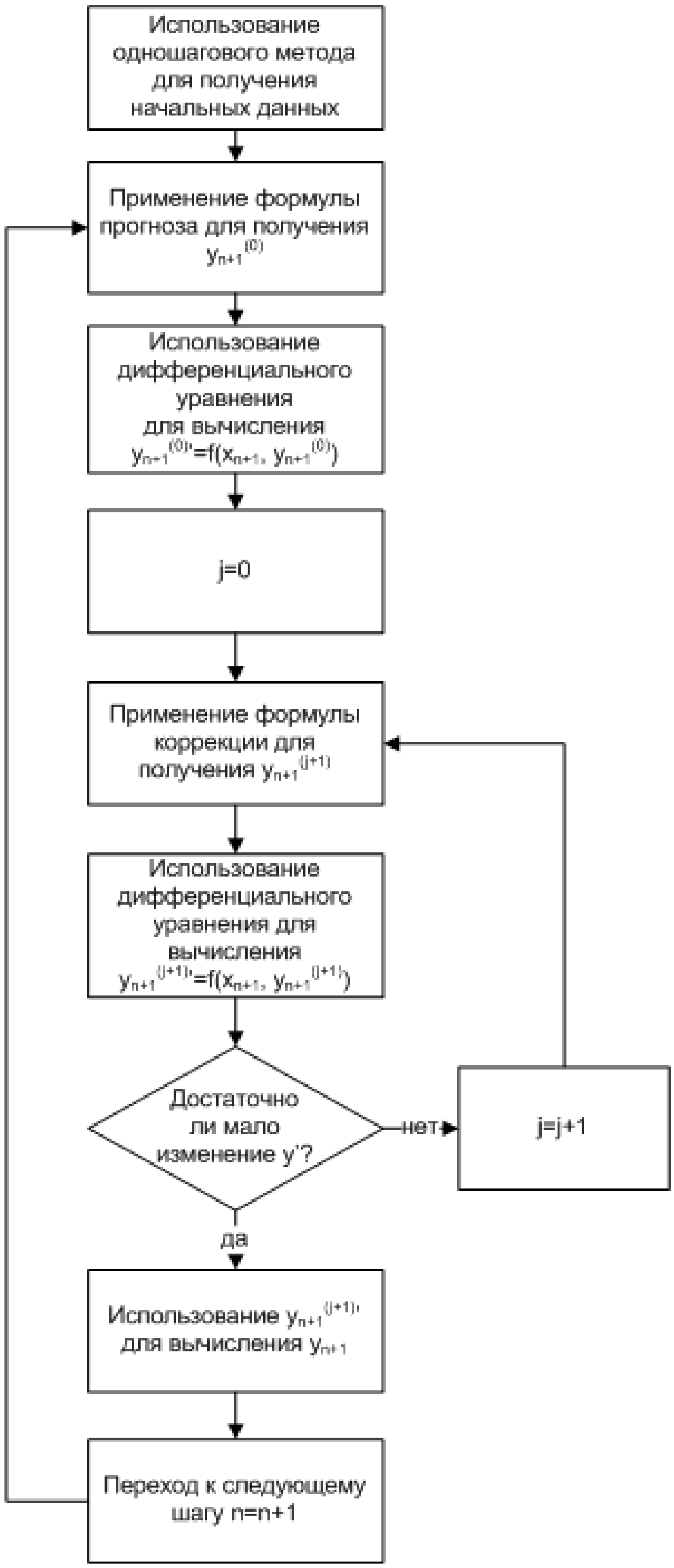
2012 г.

Оглавление

Описание метода

Метод Милна

Метод Милна относится к многошаговым методам и представляет один из методов прогноза и коррекции. Решение в следующей точке находится в два этапа. На первом этапе осуществляется по специальной формуле прогноз значения функции, а затем на втором этапе - коррекция полученного значения. Если полученное значение y после коррекции существенно отличается от спрогнозированного, то проводят еще один этап коррекции. Если опять имеет место существенное отличие от предыдущего значения (т.е. от предыдущей коррекции), то проводят еще одну коррекцию и т.д. Однако очень часто ограничиваются одним этапом коррекции.



Блок-схема метода прогноза и коррекции представлена на рисунке.

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ кроме начального условия $y(x_0) = y_0$ известен "начальный отрезок", то есть значения искомой функции $y(x_i) = y_i$ в точках $x_i = x_0 + ih, (i = 1,2,3)$, данные значения можно найти каким-либо одношаговым методом (для примера, в дальнейшем используется Метод Рунге-Кутты 4-го порядка)

Метод Милна имеет следующие вычислительные формулы:

а) этап предположения (прогноза):

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

где для компактности записи использовано следующее обозначение $f_i = f(x_i, y_i)$;

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

б) этап коррекции:

Абсолютная погрешность определяется по формуле

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29}\left|y_i^{\text{корр}} - y_i^{\text{пред}}\right|$$

Метод требует несколько меньшего количества вычислений (например, достаточно только два раза вычислить $f(x, y)$, остальные запомнены с предыдущих этапов), но требует дополнительного "расхода" памяти. Кроме этого, как уже указывалось выше, невозможно "запустить" метод: для этого необходимо предварительно получить одношаговыми методами первые три точки.

Примеры:

Задание:

Используя метод Милна, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$ на отрезке $[a, b]$; шаг h; все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

Пример 1

$y'(x) = 1{,}6x + 0{,}5y^2$, $y(0) = 0{,}3$, на отрезке [0,7], шаг $h = 0{,}1$;

Методом Рунге-Кутты определим начальный отрезок:

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$
$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right),$$
$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Получим:

$y(0{,}1) = 0{,}3127;\ y(0{,}2) = 0{,}3420;\ y(0{,}3) = 0{,}3886$

Последующие значения функции $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ $(i = 3, 4, \dots, 6)$ будем определять методом Милна. Согласно этому методу, по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения y_i и $f'(x_i, y_i)$ (таблица 1).

Таблица 1

i	x_i	y_i	$1{,}6x_i$	$0{,}5y_i^2$	$f(x,y)$
0	0	0,3	0	0,0450	0,0450
1	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089
2	0,2	0,3420	0,32	0,0585	0,3785
3	0,3	0,3886	0,48	0,0755	0,5555
4	0,4	0,4534	0,64	0,1028	0,7428
5	0,5	0,5376	0,80	0,1445	0,9445
6	0,6	0,6430	0,96	0,2067	0,1667
7	0,7	0,7719	1,12	0,2979	0,4179

На каждом шаге вычисление ведется в два этапа. Сначала по первой формуле Милна находим:

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

а затем по второй формуле Милна находим скорректированное значение

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

4) $y_4^{\text{пред}}$=y_0 + 4h/3(2f_1 –f_2 + 2f_3) = 0,3+0,1*4/3(2*0,62089 – 0,63785 +2*0,5555)=0,4534
   f(x_4,$y_4^{\text{пред}}$) = 0,64 +0,1028 = 0,7428
   $y_4^{\text{корр}}$ =y_2 + h/3(f_2 +4f_3 + f(x_4,$y_4^{\text{пред}}$))
   =0,3420+0,1/3(0,3785+4*0,5555+0,7428)=0,4534
   Из сравнения $y_4^{\text{корр}}$ и $y_4^{\text{пред}}$
   y_4 = 0,4534;

5) $y_5^{\text{пред}}$ =y_1 + 4h/3(2f_2 –f_3 + 2f_4) =0,3127 +4*0,1/3*(2*0,3785 -0,5555+2*0,7428)=0,5376
   f(x_4,$y_4^{\text{пред}}$) = 0,80+0,1445 = 0,9445
   $y_5^{\text{корр}}$ =y_3 + h/3(f_3 +4f_4 + f(x_5,$y_5^{\text{пред}}$))=0,3886+0,1/3*(0,5555+4*0,7428+0,9445)=0,5376
   Из сравнения $y_5^{\text{корр}}$ и $y_5^{\text{пред}}$
   y_5 = 0,5376;

6) $y_6^{\text{пред}}$ =y_2 + 4h/3(2f_3 –f_4 + 2f_5)=0,6430
   f(x_4,$y_4^{\text{пред}}$) = 0,96+0,2067 = 1,1667
   $y_6^{\text{корр}}$ =y_4 + h/3(f_4 +4f_5 + f(x_6,$y_6^{\text{пред}}$)) = 16 +1/3*(8+4*10+12) = 0,6430
   Из сравнения $y_6^{\text{корр}}$ и $y_6^{\text{пред}}$
   y_6 = 0,6430;

7) $y_7^{\text{пред}}$ =y_3 + 4h/3(2f_4 –f_5 + 2f_6) = 0.7719
   f(x_4,$y_4^{\text{пред}}$) =0,12+0.2979 = 0,4179
   $y_7^{\text{корр}}$ =y_5 + h/3(f_5 +4f_6 + f(x_7,$y_7^{\text{пред}}$)) = 25 + 1/3 * (10+4*12+14) = 0.7719
   Из сравнения $y_7^{\text{корр}}$ и $y_7^{\text{пред}}$
   y_7 = 0.7719;

Стоит отметить, что в случае машинного счета или аналитического счета с большей точностью, значения $y_i^{\text{корр}}$ и $y_i^{\text{пред}}$ разнятся и при достаточно малой заданной погрешности ε в некоторых итерациях потребуется повторение этапа коррекции.

Пример 2

Рассмотрим пример уравнения, правая часть которого зависит только от x. Данный частный случай приведет к тому что значения $y_i^{корр}$ и, что очевидно, $f(x_i,y_i^{пред})$ не зависят от $y_i^{пред}$, следовательно $f(x_i,y_i^{пред}) = f(x_i)$, что упростит задачу вычисления. Тем не менее, рассчитаем значения $y_i^{пред}$, так как при практическом использовании данное значение потребуется при сравнении $y_i^{корр}$ и $y_i^{пред}$ для достижения заданной точности.

$y'(x) = 2x$, $y(0) = 0$, на отрезке $[0,7]$, шаг $h = 1$;

Методом Рунге-Кутты определим начальный отрезок (формулы для вычислений приведены в предыдущем примере):

Получим:

$y(1) = 1;\ \ y(2) = 4;\ \ y(3) = 9$

Последующие значения функции $y_{i+1} = y(x_{i+1})$ $(i = 3, 4, \dots, 7)$ будем определять методом Милна. Согласно этому методу, по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения y_i и $f'(x_i, y_i)$ (таблица 1).

Таблица 2

i	x_i	y_i	f'(x)
0	0	0	0
1	1	1	2
2	2	4	4
3	3	9	6
4	4	16	8
5	5	25	10
6	6	36	12
7	7	49	14

Напомним формулы Милна, для вычисления значений y_i:

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

4) $y_4^{пред} = y_0 + 4h/3(2f_1 - f_2 + 2f_3) = 0+4*1/3*(2*2-4+2*6) = 16$

$f(x_4,y_4^{пред}) = 2*4 = 8$

$y_4^{корр} = y_2 + h/3(f_2 + 4f_3 + f(x_4,y_4^{пред})) = 4+1/3*(4+24+8) = 16$

Из сравнения $y_4^{корр}$ и $y_4^{пред}$

$y_4 = 16$;

5) $y_5^{пред} = y_1 + 4h/3(2f_2 - f_3 + 2f_4) = 1+4*1/3*(2*4-6+2*8) = 25$

$f(x_4,y_4^{пред}) = 2*5 = 10$

$y_5^{корр} = y_3 + h/3(f_3 + 4f_4 + f(x_5,y_5^{пред})) = 9+1/3(6+4*8+10) = 25$

Из сравнения $y_5^{корр}$ и $y_5^{пред}$

$y_5 = 25$;

6) $y_6^{пред} = y_2 + 4h/3(2f_3 - f_4 + 2f_5) = 4+4*1/3*(2*6-8+2*10) = 36$

$f(x_4,y_4^{пред}) = 2*6 = 12$

$y_6^{корр} = y_4 + h/3(f_4 + 4f_5 + f(x_6,y_6^{пред})) = 16 +1/3*(8+4*10+12) = 36$

Из сравнения $y_6^{корр}$ и $y_6^{пред}$

$y_6 = 36$;

7) $y_7^{пред} = y_3 + 4h/3(2f_4 - f_5 + 2f_6) = 9 + 4*1/3*(2*8-10+2*12) = 49$

$f(x_4,y_4^{пред}) = 2*7 = 14$

$y_7^{корр} = y_5 + h/3(f_5 + 4f_6 + f(x_7,y_7^{пред})) = 25 + 1/3 * (10+4*12+14) = 49$

Из сравнения $y_7^{корр}$ и $y_7^{пред}$

$Y_7 = 49$;

Источники:

1) «Основы вычислительной математики» Ширапов Д.Ш., Ширапов Б.Д., Чимитова Е.Г.

2) «Основы вычислительной математики» Э.В. Денисова, А.В. Кучер

3) «Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль» Мудров А.Е.