

Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики  
Кафедра информатики и прикладной математики

Вычислительная математика

Реферат на тему

***«Метод Милна для решения ОДУ».***

Выполнил Кудряшов А.А.

Группа 2121

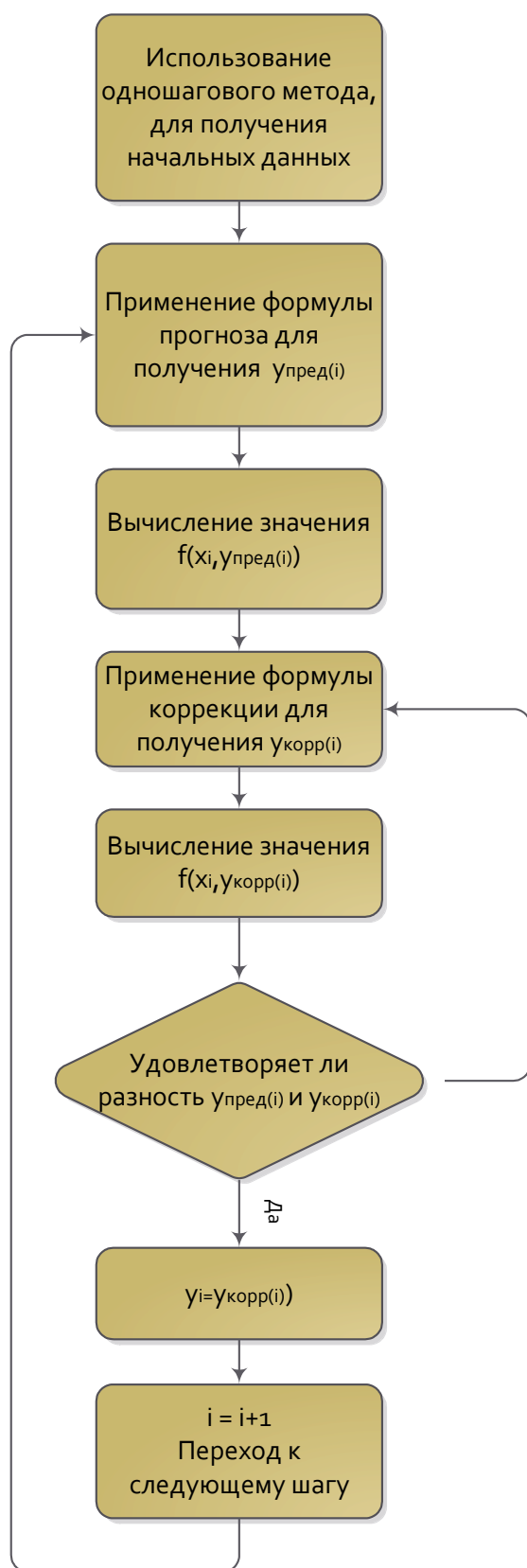
2012 г.

## Оглавление

Описание метода .....	3
Примеры: .....	5
Источники: .....	9

## Описание метода

### Метод Милна



Метод Милна относится к многошаговым методам и представляет один из методов прогноза и коррекции. Решение в следующей точке находится в два этапа. На первом этапе осуществляется по специальной формуле прогноз значения функции, а затем на втором этапе - коррекция полученного значения. Если полученное значение  $u$  после коррекции существенно отличается от спрогнозированного, то проводят еще один этап коррекции. Если опять имеет место существенное отличие от предыдущего значения (т.е. от предыдущей коррекции), то проводят еще одну коррекцию и т.д. Однако очень часто ограничиваются одним этапом коррекции.

Блок-схема метода прогноза и коррекции представлена на рисунке.

Пусть для уравнения  $y' = f(x, y)$  кроме начального условия  $y(x_0) = y_0$  известен "начальный отрезок", то есть значения искомой функции  $y(x_i) = y_i$  в точках  $x_i = x_0 + ih, (i = 1, 2, 3)$ , данные значения можно найти каким-либо одношаговым методом (для примера, в дальнейшем используется Метод Рунге-Кутты 4-го порядка)

Метод Милна имеет следующие вычислительные формулы:

а) этап предположения (прогноза):

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

где для компактности записи использовано следующее обозначение  $f_i = f(x_i, y_i)$ ;

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

б) этап коррекции:

Абсолютная погрешность определяется по формуле

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29} |y_i^{\text{корр}} - y_i^{\text{пред}}|$$

Метод требует несколько меньшего количества вычислений (например, достаточно только два раза вычислить  $f(x, y)$ , остальные запомнены с предыдущих этапов), но требует дополнительного "расхода" памяти. Кроме этого, как уже указывалось выше, невозможно "запустить" метод: для этого необходимо предварительно получить одношаговыми методами первые три точки.

## Примеры:

Задание:

Используя метод Милна, составить таблицу приближенных значений интеграла дифференциального уравнения  $y' = f(x, y)$ , удовлетворяющего начальным условиям  $y(x_0) = y_0$  на отрезке  $[a, b]$ ; шаг  $h$ ; все вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

### Пример 1

$$y'(x) = 1,6x + 0,5y^2, y(0) = 0,3, \text{ на отрезке } [0,7], \text{ шаг } h = 0,1;$$

Методом Рунге-Кутты определим начальный отрезок:

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right),$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Получим:

$$y(0,1) = 0,3127; y(0,2) = 0,3420; y(0,3) = 0,3886$$

Последующие значения функции  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  ( $i = 3, 4, \dots, 6$ ) будем определять методом Милна. Согласно этому методу, по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения  $y_i$  и  $f'(x_i, y_i)$  (таблица 1).

Таблица 1

$i$	$x_i$	$y_i$	$1,6x_i$	$0,5y_i^2$	$f(x, y)$
0	0	0,3	0	0,0450	0,0450
1	0,1	0,3127	0,16	0,0489	0,2089
2	0,2	0,3420	0,32	0,0585	0,3785
3	0,3	0,3886	0,48	0,0755	0,5555
4	0,4	0,4534	0,64	0,1028	0,7428
5	0,5	0,5376	0,80	0,1445	0,9445
6	0,6	0,6430	0,96	0,2067	0,1667
7	0,7	0,7719	1,12	0,2979	0,4179

На каждом шаге вычисление ведется в два этапа. Сначала по первой формуле Милна находим:

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

а затем по второй формуле Милна находим скорректированное значение

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

- 4)  $y_4^{\text{пред}} = y_0 + 4h/3(2f_1 - f_2 + 2f_3) = 0,3 + 0,1 \cdot 4/3(2 \cdot 0,62089 - 0,63785 + 2 \cdot 0,5555) = 0,4534$   
 $f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 0,64 + 0,1028 = 0,7428$   
 $y_4^{\text{корр}} = y_2 + h/3(f_2 + 4f_3 + f(x_4, y_4^{\text{пред}}))$   
 $= 0,3420 + 0,1/3(0,3785 + 4 \cdot 0,5555 + 0,7428) = 0,4534$   
 Из сравнения  $y_4^{\text{корр}}$  и  $y_4^{\text{пред}}$   
 $y_4 = 0,4534$ ;
- 5)  $y_5^{\text{пред}} = y_1 + 4h/3(2f_2 - f_3 + 2f_4) = 0,3127 + 4 \cdot 0,1/3 \cdot (2 \cdot 0,3785 - 0,5555 + 2 \cdot 0,7428) = 0,5376$   
 $f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 0,80 + 0,1445 = 0,9445$   
 $y_5^{\text{корр}} = y_3 + h/3(f_3 + 4f_4 + f(x_5, y_5^{\text{пред}})) = 0,3886 + 0,1/3 \cdot (0,5555 + 4 \cdot 0,7428 + 0,9445) = 0,5376$   
 Из сравнения  $y_5^{\text{корр}}$  и  $y_5^{\text{пред}}$   
 $y_5 = 0,5376$ ;
- 6)  $y_6^{\text{пред}} = y_2 + 4h/3(2f_3 - f_4 + 2f_5) = 0,6430$   
 $f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 0,96 + 0,2067 = 1,1667$   
 $y_6^{\text{корр}} = y_4 + h/3(f_4 + 4f_5 + f(x_6, y_6^{\text{пред}})) = 0,6430 + 1/3 \cdot (0,96 + 4 \cdot 1,1667 + 1,1667) = 0,6430$   
 Из сравнения  $y_6^{\text{корр}}$  и  $y_6^{\text{пред}}$   
 $y_6 = 0,6430$ ;
- 7)  $y_7^{\text{пред}} = y_3 + 4h/3(2f_4 - f_5 + 2f_6) = 0,7719$   
 $f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 0,12 + 0,2979 = 0,4179$   
 $y_7^{\text{корр}} = y_5 + h/3(f_5 + 4f_6 + f(x_7, y_7^{\text{пред}})) = 0,7719 + 1/3 \cdot (0,4179 + 4 \cdot 0,4179 + 0,4179) = 0,7719$   
 Из сравнения  $y_7^{\text{корр}}$  и  $y_7^{\text{пред}}$   
 $y_7 = 0,7719$ ;

Стоит отметить, что в случае машинного счета или аналитического счета с большей точностью, значения  $y_i^{\text{корр}}$  и  $y_i^{\text{пред}}$  разнятся и при достаточно малой заданной погрешности  $\varepsilon$  в некоторых итерациях потребуется повторение этапа коррекции.

## Пример 2

Рассмотрим пример уравнения, правая часть которого зависит только от  $x$ . Данный частный случай приведет к тому что значения  $y_i^{\text{корр}}$  и, что очевидно,  $f(x_i, y_i^{\text{пред}})$  не зависят от  $y_i^{\text{пред}}$ , следовательно  $f(x_i, y_i^{\text{пред}}) = f(x_i)$ , что упростит задачу вычисления. Тем не менее, рассчитаем значения  $y_i^{\text{пред}}$ , так как при практическом использовании данное значение потребуется при сравнении  $y_i^{\text{корр}}$  и  $y_i^{\text{пред}}$  для достижения заданной точности.

$$y'(x) = 2x, y(0) = 0, \text{ на отрезке } [0,7], \text{ шаг } h = 1;$$

Методом Рунге-Кутты определим начальный отрезок (формулы для вычислений приведены в предыдущем примере):

Получим:

$$y(1) = 1; y(2) = 4; y(3) = 9$$

Последующие значения функции  $y_{i+1} = y(x_{i+1})$  ( $i = 3, 4, \dots, 7$ ) будем определять методом Милна. Согласно этому методу, по ходу вычислений следует составить таблицу, содержащую значения  $y_i$  и  $f'(x_i, y_i)$  (таблица 1).

Таблица 2

$i$	$x_i$	$y_i$	$f'(x)$
0	0	0	0
1	1	1	2
2	2	4	4
3	3	9	6
4	4	16	8
5	5	25	10
6	6	36	12
7	7	49	14

Напомним формулы Милна, для вычисления значений  $y_i$ :

$$y_i^{\text{пред}} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1})$$

$$y_i^{\text{корр}} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(f_{i-2} + 4f_{i-1} + f_i^{\text{пред}})$$

$$4) y_4^{\text{пред}} = y_0 + 4h/3(2f_1 - f_2 + 2f_3) = 0 + 4 * 1/3 * (2 * 2 - 4 + 2 * 6) = 16$$

$$f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 2 * 4 = 8$$

$$y_4^{\text{корр}} = y_2 + h/3(f_2 + 4f_3 + f(x_4, y_4^{\text{пред}})) = 4 + 1/3 * (4 + 24 + 8) = 16$$

Из сравнения  $y_4^{\text{корр}}$  и  $y_4^{\text{пред}}$

$$y_4 = 16;$$

$$5) y_5^{\text{пред}} = y_1 + 4h/3(2f_2 - f_3 + 2f_4) = 1 + 4 * 1/3 * (2 * 4 - 6 + 2 * 8) = 25$$

$$f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 2 * 5 = 10$$

$$y_5^{\text{корр}} = y_3 + h/3(f_3 + 4f_4 + f(x_5, y_5^{\text{пред}})) = 9 + 1/3 * (6 + 4 * 8 + 10) = 25$$

Из сравнения  $y_5^{\text{корр}}$  и  $y_5^{\text{пред}}$

$$y_5 = 25;$$

$$6) y_6^{\text{пред}} = y_2 + 4h/3(2f_3 - f_4 + 2f_5) = 4 + 4 * 1/3 * (2 * 6 - 8 + 2 * 10) = 36$$

$$f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 2 * 6 = 12$$

$$y_6^{\text{корр}} = y_4 + h/3(f_4 + 4f_5 + f(x_6, y_6^{\text{пред}})) = 16 + 1/3 * (8 + 4 * 10 + 12) = 36$$

Из сравнения  $y_6^{\text{корр}}$  и  $y_6^{\text{пред}}$

$$y_6 = 36;$$

$$7) y_7^{\text{пред}} = y_3 + 4h/3(2f_4 - f_5 + 2f_6) = 9 + 4 * 1/3 * (2 * 8 - 10 + 2 * 12) = 49$$

$$f(x_4, y_4^{\text{пред}}) = 2 * 7 = 14$$

$$y_7^{\text{корр}} = y_5 + h/3(f_5 + 4f_6 + f(x_7, y_7^{\text{пред}})) = 25 + 1/3 * (10 + 4 * 12 + 14) = 49$$

Из сравнения  $y_7^{\text{корр}}$  и  $y_7^{\text{пред}}$

$$y_7 = 49;$$



**Источники:**

- 1) «Основы вычислительной математики» Ширапов Д.Ш., Ширапов Б.Д., Чимитова Е.Г.
- 2) «Основы вычислительной математики» Э.В. Денисова, А.В. Кучер
- 3) «Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль» Мудров А.Е.