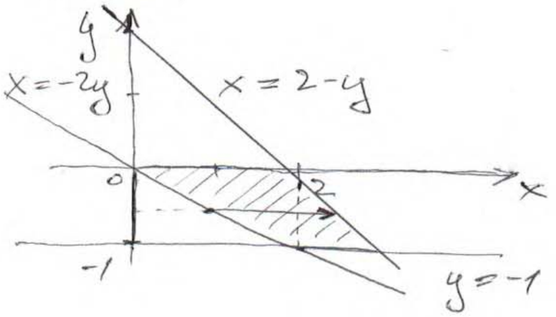
① Найти интеграл $\iint\limits_D (1-3xy)\,dx\,dy$ по области D, ограниченной линиями: $x=-2y$, $y=-1$, $x+y=2$, $y=0$.

Решение



$$\iint\limits_D (1-3xy)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{-2y}^{2-y} (1-3xy)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x - \frac{3x^2y}{2}\right)\Bigg|_{-2y}^{2-y} dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} \left(\left(2-y-\frac{3}{2}y(4-4y+y^2)\right) - \left(-2y-\frac{3}{2}\cdot 4y^2\cdot y\right)\right)dy =$$

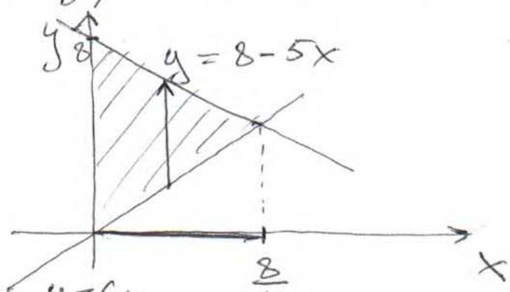
$$= \int_{-1}^{0} \left(2-5y+6y^2+\frac{9}{2}y^3\right)dy = \left(2y-\frac{5}{2}y^2+\frac{6}{3}y^3+\frac{9}{8}y^4\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{43}{8}$$

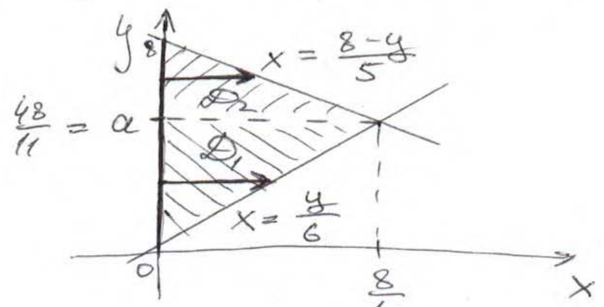
② Найти значение a, при котором верно равенство:

$$\int_0^{8/11} dx \int_{6x}^{8-5x} f(x,y)\,dy = \int_0^{a} dy \int_0^{y/6} f(x,y)\,dx + \int_a^{8} dy \int_0^{(8-y)/5} f(x,y)\,dx.$$

Решение

1) Изображаем область, по которой берётся интеграл в левой части.





2) Меняем порядок интегрирования.

$$\int_0^{8/11} dx \int_{6x}^{8-5x} f(x,y)\,dy = \iint\limits_{D_1} + \iint\limits_{D_2} = \int_0^{a} dy \int_0^{y/6} f(x,y)\,dx + \int_a^{8} dy \int_0^{\frac{8-y}{5}} f(x,y)\,dx$$

a – ордината точки пересечения прямых $x=\frac{y}{6}$ и $x=\frac{8-y}{5}$, поэтому

$$\frac{a}{6} = \frac{8-a}{5} \Rightarrow a = \frac{48}{11}.$$

(3) С помощью перехода к полярным координатам найти интеграл

$\iint\limits_D (x+5y)\,dx\,dy$ по области $D = A \setminus B$, где

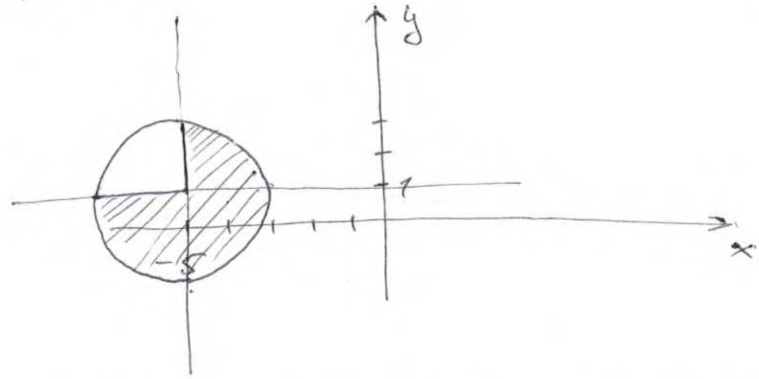
$A = \{(x,y) : x^2+y^2+22 \le 2y-10x\}$, $B = \{(x,y) : x \le -5,\ y \ge 1\}$.

Решение

Граница области A имеет уравнение

$$x^2+y^2+22 = 2y-10x$$

$$(x+5)^2+(y-1)^2 = 2^2$$



(Напоминание: $A \setminus B$ – множество точек из A, не лежащих в B)

Произведём замену переменных

$x+5 = r\cos\varphi$

$y-1 = r\sin\varphi$

Якобиан $J = \dfrac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r$

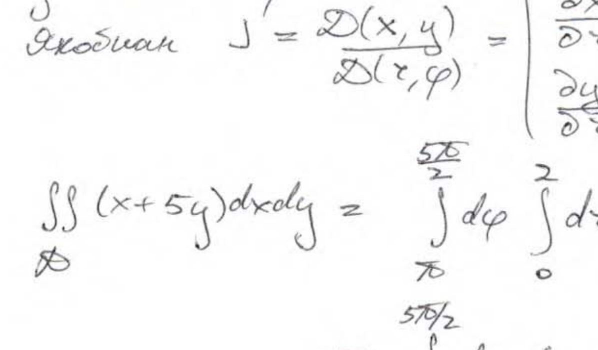
не забываем якобиан!

$$\iint\limits_D (x+5y)\,dx\,dy = \int\limits_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 dr \cdot \big((r\cos\varphi-5)+5(r\sin\varphi+1)\big)r =$$

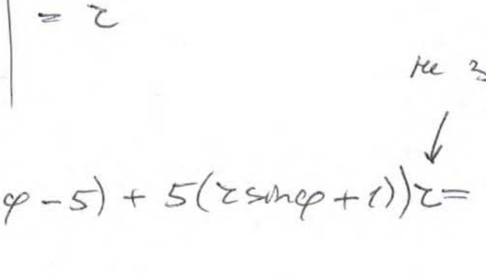
$$= \int\limits_{\pi}^{5\pi/2} d\varphi \cdot (\cos\varphi+5\sin\varphi)\frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3}(\sin\varphi-5\cos\varphi)\Big|_{\pi}^{\frac{5\pi}{2}} = -\frac{32}{3}$$

(4) Найти $\iiint\limits_G \dfrac{4\,dx\,dy\,dz}{3y-5x+15}$ по области G, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{5}-\dfrac{z}{7} = 1$.

Решение



Сторона ABD:



$$\iiint\limits_G \frac{4\,dx\,dy\,dz}{3y-5x+15} = \int_0^3 dx \int_{5(\frac{x}{3}-1)}^0 dy \int_{7(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}-1)}^0 dz \cdot \frac{4}{3y-5x+15} =$$

$$= \int_0^3 dx \int_{\frac{5x}{3}-5}^0 \frac{4}{3y-5x+15}\cdot 7\left(\frac{y}{5}-\frac{x}{3}+1\right)dy =$$

$$= \frac{4\cdot 7}{15}\int_0^3 dx \int_{\frac{5x}{3}-5}^0 dy = \frac{28}{15}\cdot 5\int_0^3\left(1-\frac{x}{3}\right)dx = \frac{28}{3}\cdot\left(x-\frac{x^2}{6}\right)\Big|_0^3 = 14.$$

(5) Вычислить $\int\limits_{AB}(4y-3x)\,ds$, где AB — отрезок с концами в точках $A(5,4,-2)$ и $B(7,6,-1)$.

Решение

Уравнение прямой AB в параметрической форме:

$$t = \frac{x-5}{7-5} = \frac{y-4}{6-4} = \frac{z-(-2)}{(-1)-(-2)}$$

Следовательно,

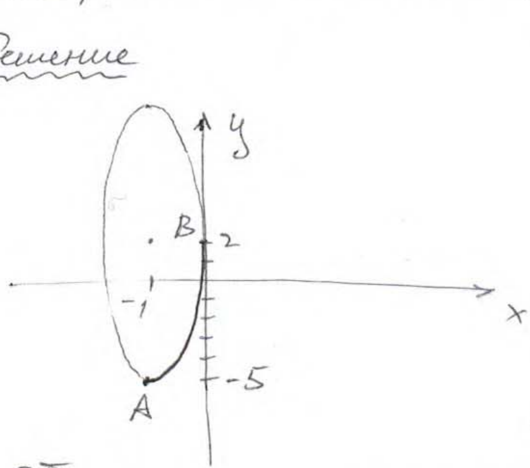
$$\begin{cases} x = 2t+5 \\ y = 2t+4 \\ z = t-2. \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB}(4y-3x)\,ds = \int_0^1\left(4(2t+4)-3(2t+5)\right)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt =$$

$$= 3\int_0^1(2t+1)\,dt = 3\left(t^2+t\right)\Big|_0^1 = 6.$$

(6) Найти массу дуги кривой $(x+1)^2+\frac{(y-2)^2}{49}=1$ при $x\geq -1$, $y\leq 2$, если её плотность $\rho(x,y)=2x-y-xy+2$.

Решение



$$M = \int\limits_{AB}\rho(x,y)\,ds = \left|\begin{matrix} x+1=\cos t \\ y-2=7\sin t\end{matrix}\right| =$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\Big(2(\cos t-1)-(7\sin t+2)-$$

$$-(\cos t-1)(7\sin t+2)+2\Big)\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt =$$

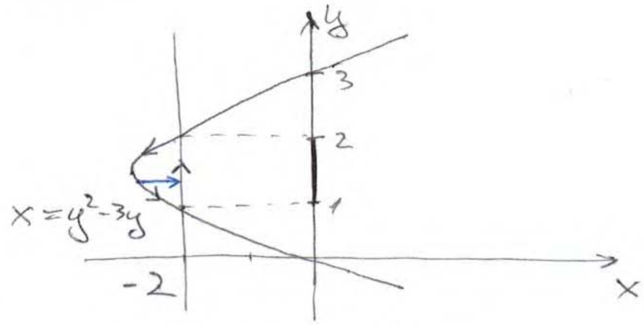
$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}(-7\cos t\sin t)\sqrt{\sin^2 t+7^2\cos^2 t}\,dt =$$

$$= 7 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (-\cos t \sin t)\sqrt{1+48\cos^2 t}\,dt = \left| \begin{array}{l} u = 1+48\cos^2 t \\ du = 48\cdot 2\cos t\cdot(-\sin t)dt \end{array}\right| =$$

$$= \frac{7}{48\cdot 2}\int_1^{49} u^{\frac12}\,du = \frac{7}{48\cdot 2}\cdot\frac23\cdot u^{\frac32}\Big|_1^{49} = \frac{7\cdot 342}{48\cdot 3} = \frac{133}{8}$$

(7) Вычислить $\oint\limits_{\partial G} 8y\,dx - 3x\,dy$, если область G ограничена линиями $x = y^2-3y$, $x=-2$ (обход положительный).

Решение



Применим формулу Грина

$$\oint\limits_{\partial G} 8y\,dx - 3x\,dy = \iint\limits_G\left(\frac{\partial(-3x)}{\partial x} - \frac{\partial(8y)}{\partial y}\right)dx\,dy = I$$

Выясним ординаты точек пересечения прямой $x=-2$ и параболы $x=y^2-3y$

$y^2-3y=-2$

$y^2-3y+2=0$

$D = 9-4\cdot 2=1$, $\quad y=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2} = 2; 1$.

$$I = \int_1^2 dy\int_{y^2-3y}^{-2} dx\cdot(-3-8) = -11\int_1^2 dy\cdot(-2-y^2+3y) =$$

$$= 11\left(\frac{y^3}{3} - \frac32 y^2+2y\right)\Big|_1^2 = 11\left(\frac83 - 6+4-\frac13+\frac32-2\right) = -\frac{11}{6}$$

(8) Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec a = (2xy - xz)\vec i + (3xy+4yz)\vec j + (yz-6xz)\vec k$$

в точке $M(1, 7, -5)$.

Решение

$$\operatorname{div}\vec a = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (2y-z)+(3x+4z)+(y-6x)$$

Осталось подставить $x=1$, $y=7$, $z=-5$. Ответ: $\operatorname{div}\vec a\big|_M = 3$.

(9) Найти сумму координат ротора векторного поля

$\vec{a} = y^3 z^{-4}\vec{i} + xz^{-2}\vec{j} + x^4 y\vec{k}$ в точке $M(1,1,1)$.

Решение

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + (-1)\left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k} =$$

$$= \left(x^4 - x(-2)z^{-3}\right)\vec{i} - \left(4x^3y - y^3(-4)z^{-5}\right)\vec{j} + \left(z^{-2} - 3y^2z^{-4}\right)\vec{k}$$

Сумма координат в точке $M(1,1,1)$:

$$S = (1+2) - (4+4) + (1-3) = -7.$$

(10) Найти $\frac{1}{\pi}V(T)$, где $V(T)$ – объём тела, ограниченного поверхностями: $3x^2 + 7y^2 + \frac{19}{6} = z$, $9x^2 + \frac{4}{9}y^2 = 1$, $z = 3$.

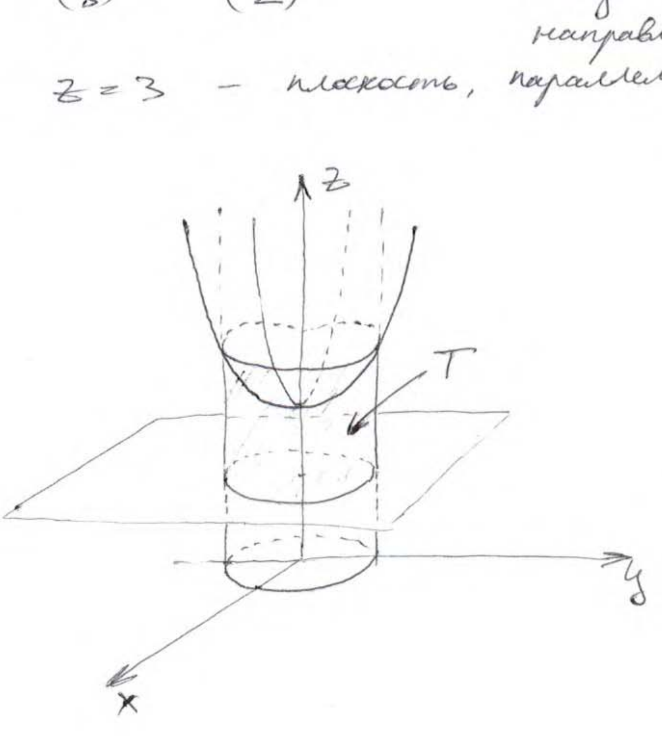
Решение

Перепишем уравнения поверхностей.

$\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2} = z - \dfrac{19}{6}$ – параболоид с вершиной $\left(0, 0, \frac{19}{6}\right)$

$\dfrac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$ – цилиндр, для которого эллипс с полуосями $a = \frac{1}{3}$ и $b = \frac{3}{2}$ является направляющей

$z = 3$ – плоскость, параллельная xOy.



$$V(T) = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz$$

Перейдём к обобщённым цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} r\cos\varphi \\ y = \frac{3}{2} r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3}\cos\varphi & -\frac{1}{3}r\sin\varphi & 0 \\ \frac{3}{2}\sin\varphi & \frac{3}{2}r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{r}{2}$$

$$V(T) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_3^{3x^2+7y^2+\frac{19}{6}} \frac{r}{2}\, dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \cdot \left(3x^2 + 7y^2 + \frac{1}{6}\right)\frac{r}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \cdot \left(3\frac{r^2\cos^2\varphi}{3^2} + 7 \cdot \frac{3^2}{2^2} r^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{6}\right)\frac{r}{2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos^2\varphi}{24} + \frac{63}{32}\sin^2\varphi + \frac{1}{24}\right) d\varphi$$

Замечаем, что $\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, d\varphi = \pi$

Аналогично, $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$

$$V(T) = \left(\frac{1}{24} + \frac{63}{32}\right)\pi + \frac{2\pi}{24} = \frac{67}{32}\pi$$

Ответ: $\frac{V(T)}{\pi} = \frac{67}{32}$

(11) Найти $\frac{V(T)}{\pi\sqrt{2}}$, где $V(T)$ — объём тела $T = \{(x,y,z):$
$x^2+y^2+z^2+8x-4z \leq 5,\ (x+4)^2+y^2 \geq (z-2)^2,\ y-4 \geq x,\ z \leq 2\}$.

Решение

$(x+4)^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 25$ — внутренность шара с центром $(-4, 0, 2)$ и радиусом 5.

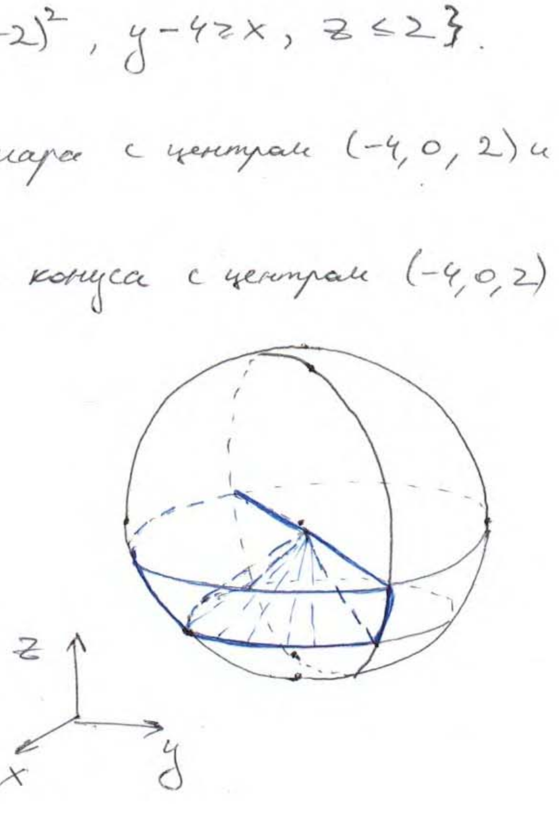
$(x+4)^2 + y^2 - (z-2)^2 \geq 0$ — внешняя часть конуса с центром $(-4, 0, 2)$

$z \leq 2,\ y-4 \leq x$ — полупространства

Перейдём к сферическим координатам.

$$\begin{cases} x+4 = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z-2 = r\cos\theta \end{cases}$$

Якобиан: $J = r^2\sin\theta$



Уравнение сферы примет вид: $r = 5$

Уравнение конуса:

$$r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta - r^2\cos^2\theta = 0$$

$$\sin\theta = \pm\cos\theta$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \quad (\text{интересует только нижняя часть})$$

Уравнения плоскостей:

$$\theta = \frac{\pi}{2}\ ; \quad \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \pi + \frac{\pi}{4}.$$

$$V(T) = \iiint\limits_T dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} d\theta \int_0^5 r^2\sin\theta\,dr =$$

в силу осевой симметрии тела можно брать любой промежуток длиной π

$$= \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/2}^{3\pi/4} \frac{125}{3}\sin\theta\,d\theta = \frac{125}{3}\int_0^{\pi} (-\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi = \frac{125\sqrt{2}}{6}\cdot\pi$$

Ответ: $\dfrac{V(T)}{\pi\sqrt{2}} = \dfrac{125}{6}$.