Логика предикатов

Основные задачи

Задача 1. На множестве натуральных чисел заданы трехместные предикаты $S(x, y, z) \Leftrightarrow x + y = z$, $P(x, y, z) \Leftrightarrow x \cdot y = z$. На языке первого порядка с предикатными символами S, P записать:

- формулы с одной свободной переменной a, истинные тогда и только тогда, когда $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, a — чётное число, a — нечётное число;
- формулы с двумя свободными переменными a и b, истинные тогда и только тогда, когда $a = b$, $a \leq b$, a делит b;
- формулы с тремя свободными переменными a, b и c, истинные тогда и только тогда, когда a — наименьшее общее кратное чисел b и c, a — наибольший общий делитель чисел b и c.

Задача 2. Доказать, что формула

$$\forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \forall y (P(x, y) \to \neg P(y, x)) \wedge$$
$$\wedge \forall x \forall y \forall z (P(x, y) \to (P(y, z) \to P(x, z)))$$

выполнима, но не выполнима ни в какой конечной модели.

Задача 3. Привести к предварённой нормальной форме формулу

$$\neg \forall x \forall y P(x, y) \vee \forall x \exists y Q(x, y).$$

Задача 4. Выразимы ли следующие предикаты в данных интерпретациях?

- $a = b$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{N}, x \vdots y)$,
- $a = b$, $b = a + 1$, $c = a + b$ в $(\mathbf{Z}, <)$,
- $a = 0$, $a < b$ в $(\mathbf{Z}, +, =)$,
- $a = b$, $|a - b| = 2$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

Задача 5.

1. На языке с предикатными символами $=, <$ записать аксиомы теории частичных порядков **Ord**, теории линейных порядков **LO**, теории плотных линейных порядков без первого и последнего элементов **DLO**.
2. Доказать, что теории **Ord** и **LO** не являются полными.
3. Привести примеры двух неизоморфных счетных моделей теории **LO**, которые не являются моделями теории **DLO**.
4. На множестве $\mathbf{N}$ задано отношение $\prec$: $m \prec n$ тогда и только тогда, когда m и n оба четны или оба нечетны и при этом $m < n$ или же когда m четно, а n нечетно. Является ли интерпретация $(\mathbf{N}, \prec)$ моделью теорий **Ord**, **LO**, **DLO**?

Дополнительные задачи

Задача 6.

1. На множестве всех подмножеств данного множества A задан двуместный предикат $Q(x, y) \Leftrightarrow x \subseteq y$. На языке первого порядка с предикатным символом Q записать формулы, выражающие предикаты $a = b$, $a = \emptyset$, $a = A$, $a = b \cap c$, $a = b \cup c$, $a = A \setminus b$.

2. Выразить в модели $(\mathbb{R}^2; =, B, \cong)$ следующие предикаты:

- $P(a, b, c, a', b', c') \Leftrightarrow \angle abc = \angle a'b'c'$
- $Q(a, b, c) \Leftrightarrow \angle abc$ прямой.

3. Сформулировать в языке данной модели теорему о сумме углов треугольника.

Задача 7. Среди следующих формул найти все пары равносильных формул:

1) $\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$; 2) $\forall x \exists y (P(x) \to Q(y))$; 3) $\exists y \forall x (P(x) \to Q(y))$,
4) $\forall y \exists x (P(x) \to Q(y))$; 5) $\exists x \forall y (P(x) \to Q(y))$; 6) $\exists x \exists y (P(x) \to Q(y))$.

Задача 8. Доказать, что следующие формулы истинны во всякой конечной интерпретации, но не общезначимы:

$$\forall x \forall y \forall z (R(x, x) \wedge (R(x, z) \to (R(x, y) \vee R(y, z)))) \to \exists x \forall y R(x, y),$$

$$\exists x \forall y \exists z ((Q(y, z) \to Q(x, z)) \to (Q(x, x) \to Q(y, x))).$$

Задача 9. Привести к предварённой нормальной форме формулы

$$\forall x \neg \exists y P(x, y) \wedge \exists x \forall y Q(x, y),$$

$$\forall x \exists y P(x, y) \to \forall x \exists y Q(x, y).$$

Задача 10. Выразимы ли следующие предикаты в данных интерпретациях?

1) $a < b$, $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{N}, +, =)$,

2) "a — простое число" в $(\mathbf{N}, a \vdots b)$,
3) $a = 1$, $a = 2$ в $(\mathbf{Z}, +, =)$,
4) $a = 0$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$,
5) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$,
6) $a = b + 1$ в $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$,
7) $|a - b| = 3$ в $(\mathbf{R}, |a - b| = 1)$.

Задача 11. Определить интерпретации

а) поля комплексных чисел $(\mathbb{C}; =, +, \cdot, 0, 1)$ в поле действительных чисел $(\mathbb{R}; =, +, \cdot, 0, 1)$;

б) поля рациональных чисел в кольце целых чисел.

Задача 12. Полны ли следующие теории: а) теория плотных линейных порядков, б) теория отношения эквивалентности, в) теория абелевых групп? Почему?

Исчисление предикатов

Основные задачи

Задача 1. Построить вывод формулы

$$\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$$

в исчислении предикатов.

Задача 2. Построить вывод формулы $\exists x\, Q(x)$ из множества гипотез

$$\Gamma = \{\forall y(P(y) \to Q(y)),\ \exists z\, P(z)\}.$$

Задача 3. Доказать допустимость следующих правил вывода:

- *правило введения* $\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash A(c)}{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, c — константа, не входящая в формулы из Γ, или свободная переменная;
- *правило удаления* $\forall$: $\dfrac{\Gamma \vdash \forall x\, A(x)}{\Gamma \vdash A(t)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;
- *правило введения* $\exists$: $\dfrac{\Gamma \vdash A(t)}{\Gamma \vdash \exists x\, A(x)}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм;
- *правило удаления* $\exists$: $\dfrac{\Gamma \cup \{A(c)\} \vdash B}{\Gamma \cup \{\exists x\, A(x)\} \vdash B}$, где Γ — произвольное множество замкнутых формул, B — замкнутая формула, c — константа, не входящая в формулы из Γ и формулу B.

Задача 4. С помощью допустимых правил вывода доказать выводимость следующих формул:

$$\forall x \neg P(x) \to \neg \exists x\, P(x),$$

$$\neg \exists x\, P(x) \to \forall x \neg P(x).$$

Задача 5. Пусть T — теория первого порядка в языке с равенством, K — класс всех ее нормальных моделей.

- Найти систему аксиом, нормальные модели которой — в точности все бесконечные модели из K.
- Доказать, что если в классе K имеются модели сколь угодно большой конечной мощности, то в K имеется бесконечная модель.

Дополнительные задачи

Задача 6. Построить вывод формулы

$$\exists x P(x) \to \exists y P(y)$$

в исчислении предикатов.

Задача 7. Построить вывод формулы $\forall x\, Q(x)$ из множества гипотез

$$\Gamma = \{\forall y(P(y) \to Q(y)),\ \forall z\, P(z)\}.$$

Задача 8. С помощью допустимых правил вывода доказать выводимость следующих формул:

$$\neg\forall x P(x) \to \exists x\, \neg P(x),$$

$$\exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x P(x).$$

Задача 9. Написать систему аксиом в языке теории групп, нормальные модели которой суть

- все группы порядка 6,
- все бесконечные группы.

Задача 10. Доказать, что не существует системы аксиом в языке теории групп, нормальными моделями которой были бы в точности все конечные группы.

Указания, ответы, решения

Логика предикатов

Основные задачи

Задача 1.

$$a = 0 \Leftrightarrow \forall x\, S(a, x, x)$$

$$a = 1 \Leftrightarrow \forall x\, P(a, x, x)$$

$$a = 2 \Leftrightarrow \exists y(\forall x\, P(y, x, x) \wedge S(y, y, a))$$

$$a \text{ — чётное число } \Leftrightarrow \exists x\, S(x, x, a)$$

$$a \text{ — нечётное число } \Leftrightarrow \neg\exists x\, S(x, x, a)$$

$$a = b \Leftrightarrow \exists y(\forall x\, S(y, x, x) \wedge S(a, y, b))$$

$$a \leq b \Leftrightarrow \exists x\, S(a, x, b)$$

$$a \text{ делит } b \Leftrightarrow \exists x\, P(a, x, b)$$

$$a \text{ — наименьшее общее кратное чисел } b \text{ и } c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, P(b, x, a) \wedge \exists x\, P(c, x, a) \wedge \forall y(\exists x\, P(b, x, y) \wedge \exists x\, P(c, x, y) \rightarrow \exists x\, P(a, x, y))$$

$$a \text{ — наибольший общий делитель чисел } b \text{ и } c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists x\, P(a, x, b) \wedge \exists x\, P(a, x, c) \wedge \forall y(\exists x\, P(y, x, b) \wedge \exists x\, P(y, x, c) \rightarrow \exists x\, P(y, x, a))$$

Задача 2. Формула выполнима, так как она истинна, например, в интерпретации $(\mathbf{N}, P)$, где $P(x, y) \Leftrightarrow x < y$. Докажем, что любая модель данной формулы бесконечна. Пусть интерпретация $\mathfrak{M} = (M, P)$ является моделью этой формулы. Тогда в $\mathfrak{M}$ истинны формулы

$$\forall x \exists y P(x, y), \tag{1}$$

$$\forall x \forall y(P(x, y) \rightarrow \neg P(y, x)), \tag{2}$$

$$\forall x \forall y \forall z(P(x, y) \rightarrow (P(y, z) \rightarrow P(x, z))). \tag{3}$$

В силу истинности формулы (2)

$$P(m, m) \text{истинно для всех } m \in M. \tag{4}$$

Так как предметная область M непуста, существует элемент $a_0 \in M$. В силу истинности формулы (1) существует такой элемент a_1, что истинно $P(a_0, a_1)$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $a_0, a_1, \ldots$ элементов множества M, где $P(a_i, a_{i+1})$ истинно для любого i. Все эти элементы различны. Действительно, в силу истинности формулы (3) $P(a_i, a_j)$ истинно, если $i < j$, а тогда $a_i \neq a_j$ в силу (4). Таким образом, множество M бесконечно.

Задача 3. При приведении формул к предваренной нормальной форме используются следующие равносильности, где v — произвольная связанная переменная; $A(a)$ и $C(a)$ — произвольные формулы; u — произвольная связанная переменная, не входящая в $A(a)$; B — формула, не содержащая переменную v:

1) $\neg\forall v\, A(v) \equiv \exists v \neg A(v)$
2) $\neg\exists v\, A(v) \equiv \forall v \neg A(v)$
3) $\forall v\, A(v) \wedge B \equiv \forall v(A(v) \wedge B)$
4) $B \wedge \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \wedge A(v))$
5) $\exists v\, A(v) \wedge B \equiv \exists v(A(v) \wedge B)$
6) $B \wedge \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \wedge A(v))$
7) $\forall v\, A(v) \vee B \equiv \forall v(A(v) \vee B)$
8) $B \vee \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \vee A(v))$
9) $\exists v\, A(v) \vee B \equiv \exists v(A(v) \vee B)$
10) $B \vee \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \vee A(v))$
11) $\forall v\, A(v) \to B \equiv \exists v(A(v) \to B)$
12) $B \to \forall v\, A(v) \equiv \forall v(B \to A(v))$
13) $\exists v\, A(v) \to B \equiv \forall v(A(v) \to B)$
14) $B \to \exists v\, A(v) \equiv \exists v(B \to A(v))$
15) $\forall v\, A(v) \wedge \forall v\, C(v) \equiv \forall v(A(v) \wedge C(v))$
16) $\exists v\, A(v) \vee \exists v\, C(v) \equiv \exists v(A(v) \vee C(v))$
17) $\forall v\, A(v) \equiv \forall u\, A(u)$
18) $\exists v\, A(v) \equiv \exists u\, A(u)$
19) $\forall v\, B \equiv B$
20) $\exists v\, B \equiv B$

Приведение данной формулы к предваренной форме состоит в построении цепочки формул, каждая из которых получается из предыдущей применением одной из указанных равносильностей (ее номер указывается в индексе при $\equiv$).

$$\neg\forall x\forall y P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_1 \exists x\neg\forall y P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_1$$
$$\equiv_1 \exists x\exists y\neg P(x,y) \vee \forall x\exists y Q(x,y) \equiv_{19} \exists x\exists y\neg P(x,y) \vee \forall z\exists y Q(z,y) \equiv_9$$
$$\equiv_9 \exists x(\exists y\neg P(x,y) \vee \forall z\exists y Q(z,y)) \equiv_8 \exists x\forall z(\exists y\neg P(x,y) \vee \exists y Q(z,y)) \equiv_{16}$$
$$\equiv_{16} \exists x\forall z\exists y(\neg P(x,y) \vee Q(z,y))$$

Последняя формула является предваренной формулой, которая равносильна исходной формуле.

Задача 4. Пусть P — такой двуместный предикат на $\mathbf{N}$, что

$$P(a,b) \Leftrightarrow a \vdots b.$$

В интерпретации $(\mathbf{N}, P)$

- предикат $a = b$ выразим формулой $P(a, b) \wedge P(b, a)$;
- предикат $a = 0$ выразим формулой $\forall x\, P(a, x)$; $a = 0$
- предикат $a = 1$ выразим формулой $\forall x\, P(x, a)$;
- предикат $a = 2$ невыразим, так как существует автоморфизм φ данной интерпретации, не сохраняющий этот предикат. А именно, положим $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, а для любого $a > 1$, разложив его на простые множители, представим в виде $a = 2^m \cdot 3^n \cdot c$, где c не делится на 2 и на 3, и положим $\varphi(a) = 2^n \cdot 3^m \cdot c$. Очевидно, что отображение φ является автоморфизмом, но не сохраняет предикат $a = 2$, так как $\varphi(2) = 3$.

В интерпретации $(\mathbf{Z}, <)$

- предикат $a = b$ выразим формулой $\neg(a < b \vee b < a)$;
- предикат $b = a + 1$ выразим формулой $\forall x(x < b \to \neg\, a < x)$;
- предикат $c = a + b$ невыразим, так как автоморфизм $\varphi(a) = a + 1$ не сохраняет этот предикат.

В интерпретации $(\mathbf{Z}, +, =)$

- предикат $a = 0$ выразим формулой $\forall x\, x + a = x$;
- предикат $a < b$ невыразим, так как автоморфизм $\varphi(x) = -x$ не сохраняет этот предикат.

Пусть Q — такой двуместный предикат на $\mathbf{R}$, что

$$Q(a, b) \Leftrightarrow |a - b| = 1.$$

В интерпретации $(\mathbf{R}, Q)$

- предикат $a = b$ выразим формулой $\forall x(Q(x, a) \to Q(x, b))$;
- предикат $|a - b| = 2$ выразим формулой

$$\exists x(Q(x, a) \wedge Q(x, b)) \wedge \exists x(Q(x, a) \wedge \neg Q(x, b)).$$

Задача 5.

1. Аксиомы теории частичных порядков **Ord**:
   1) $\forall x \neg(x < x)$ (*иррефлексивность*)
   2) $\forall x \forall y(x < y \to \neg(y < x))$ (*антисимметричность*)
   3) $\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ (*транзитивность*)

Аксиомами теории линейных порядов **LO** являются формулы 1)–3) и

4) $\forall x \forall y (x < y \lor y < x \lor x = y)$ (*трихотомия*).

Аксиомами теории плотных линейных порядков без первого и последнего элементов **DLO** являются формулы 1)–4) и

5) $\forall x \forall y (x < y \to \exists z (x < z \land z < y))$ (*плотность*)

6) $\forall x \exists y (x < y)$ (*отсутствие последнего элемента*)

7) $\forall x \exists y (y < x)$ (*отсутствие первого элемента*)

2. Теория **Ord** неполна, так как, например, ни формула 4), ни ее отрицание не являются теоремами этой теории.

   Теория **LO** неполна, так как, например, ни формула 5), ни ее отрицание не являются теоремами этой теории.

3. Примеры неизоморфных счетных моделей теории **LO**, которые не являются моделями теории **DLO**: $(\mathbf{N}, <)$ и $(\mathbf{Z}, <)$.

4. Интерпретация $(\mathbf{N}, \prec)$ является моделью теорий **Ord** и **LO**, но не является моделью теории **DLO**.

Дополнительные задачи

Задача 6.

$$a = b \Leftrightarrow (Q(a,b) \land Q(b,a))$$

$$a = \emptyset \Leftrightarrow \forall x\, Q(a,x)$$

$$a = A \Leftrightarrow \forall x\, Q(x,a)$$

$$a = b \cap c \Leftrightarrow (Q(a,b) \land Q(a,c) \land \forall x((Q(x,b) \land Q(x,c)) \to Q(x,a)))$$

$$a = b \cup c \Leftrightarrow (Q(b,a) \land Q(c,a) \land \forall x((Q(b,x) \land Q(c,x)) \to Q(a,x)))$$

$$a = A \setminus b \Leftrightarrow \exists x \exists y (x = a \cap b \land x = \emptyset \land y = a \cup b \land y = A)$$

Задача 7. Равносильны формулы 2) и 3); 4) и 5).

Задача 8. Достаточно доказать, что отрицание каждой из данных формул выполнимо, но не имеет конечных моделей.

Замечаем, что

$$\neg \forall x \forall y \forall z (R(x,x) \land (R(x,z) \to (R(x,y) \lor R(y,z)))) \to \exists x \forall y R(x,y) \equiv$$

$$\equiv \forall x\, R(x,x) \land \forall x \forall y \forall z (\neg R(x,y) \land \neg R(y,z) \to \neg R(x,z)) \land \forall x \exists y \neg R(x,y),$$

полагаем $P(x,y) \Leftrightarrow \neg R(x,y)$ и рассуждаем, как в задаче 2.

Аналогично,

$$\neg \exists x \forall y \exists z ((Q(y,z) \to Q(x,z)) \to (Q(x,x) \to Q(y,x))) \equiv$$

$$\equiv \forall x \exists y (\neg Q(y,x) \land \forall z (\neg Q(x,z) \to \neg Q(y,z))) \land \forall x\, Q(x,x).$$

Полагаем $P(x,y) \Leftrightarrow \neg Q(y,x)$ и далее рассуждаем, как в задаче 2.

Задача 10. В интерпретации $(\mathbf{N}, +, =)$

$$a < b \Leftrightarrow \exists x\,(a + x = b) \wedge \neg\, a = b$$

$$a = 0 \Leftrightarrow \forall x(x + a = x)$$

$$a = 1 \Leftrightarrow \forall x(x < a \to x = 0)$$

$$a = 2 \Leftrightarrow \forall x(x < a \to (x = 0 \vee x = 1))$$

Пусть P — такой двуместный предикат на $\mathbf{N}$, что

$$P(a,b) \Leftrightarrow a \vdots b.$$

Тогда в интерпретации $(\mathbf{N}, P)$

$$a \text{ — простое число} \Leftrightarrow \forall x(P(a,x) \to x = a \vee x = 1) \wedge \neg(a = 1).$$

В интерпретации $(\mathbf{Z}, +, =)$

$$a = 1 \Leftrightarrow \forall x(x = 0 \to \forall y(x < y \to (a < y \vee a = y)))$$

$$a = 2 \Leftrightarrow \forall x(x = 1 \to \forall y(x < y \to (a < y \vee a = y)))$$

Предикат $a = 0$ невыразим в интерпретации $(\mathbf{Z}, a = b + 1)$, так как не сохраняется при автоморфизме $\varphi(x) = x + 1$.

Предикат $a = b + 1$ невыразим в интерпретации $(\mathbf{Z}, a = b + 2)$, так как не сохраняется при автоморфизме

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \text{ четно} \\ x + 2, & \text{если} \quad x \text{ нечетно} \end{cases}$$

Предикат $a = b + 1$ невыразим в интерпретации $(\mathbf{Z}, |a - b| = 1)$, так как не сохраняется при автоморфизме $\varphi(x) = -x$.

Пусть Q — такой двуместный предикат на $\mathbf{R}$, что

$$Q(a,b) \Leftrightarrow |a - b| = 1.$$

В интерпретации $(\mathbf{R}, Q)$ предикат $|a - b| = 3$ выразим формулой

$$\exists x \exists y(\neg(x = b) \wedge \neg(y = a) \wedge Q(a,x) \wedge Q(x,y) \wedge Q(y,b))$$

Исчисление предикатов

Основные задачи

Задача 1. Схемы аксиом исчисления предикатов — десять схем аксиом исчисления высказываний и следующие схемы:

11. $\forall x\, A[x/a] \to A[t/a]$

12. $A[t/a] \to \exists x\, A[x/a]$

Вывод в исчислении предикатов — конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо получается из предшествующих формул по правилу *modus ponens* (MP) или одному из *правил Бернайса*:

$$\frac{A \to B(a)}{A \to \forall x B[x/a]} \quad (\mathrm{I}) \qquad \frac{B(a) \to A}{\exists x B[x/a] \to A} \quad (\mathrm{II})$$

где a не входит в A.

Вывод формулы $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$:

1) $\forall x\, P(x) \to P(a)$ (аксиома)

2) $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$ (получено из 1) по правилу (I)).

Задача 2. Вывод из гипотез в исчислении предикатов — конечная последовательность формул, каждая из которых либо является аксиомой, либо является гипотезой, либо получается из предшествующих формул по одному из правил вывода.

Вывод формулы $\exists x\, Q(x)$ из гипотез $\forall y(P(y) \to Q(y))$, $\exists z\, P(z)$:

1) $\forall y(P(y) \to Q(y))$ (гипотеза)

2) $\exists z\, P(z)$ (гипотеза)

3) $\forall y(P(y) \to Q(y)) \to (P(a) \to Q(a))$ (аксиома)

4) $P(a) \to Q(a)$ (получено из 1) и 3) по правилу MP)

5) $Q(a) \to \exists x\, Q(x)$ (аксиома)

6) $(Q(a) \to \exists x\, Q(x)) \to (P(a) \to (Q(a) \to \exists x\, Q(x)))$ (аксиома)

7) $P(a) \to (Q(a) \to \exists x\, Q(x))$ (получено из 5) и 6) по правилу MP)

8) $(P(a) \to (Q(a) \to \exists x\, Q(x))) \to ((P(a) \to Q(a)) \to (P(a) \to \exists x\, Q(x)))$ (аксиома)

9) $((P(a) \to Q(a)) \to (P(a) \to \exists x\, Q(x))$ (получено из 7) и 8) по правилу MP)

10) $P(a) \to \exists x\, Q(x)$ (получено из 4) и 9) по правилу MP)

11) $\exists z\, P(z) \to \exists x\, Q(x)$ (получено из 10) по правилу (II))

12) $\exists x\, Q(x)$ (получено из 2) и 11) по правилу MP)

Задача 3. Докажем допустимость правила введения $\forall$:

$$\text{если } \Gamma \vdash A(c), \text{ то } \Gamma \vdash \forall x\, A(x),$$

где Γ — произвольное множество замкнутых формул, c — константа, не входящая в формулы из Γ, или свободная переменная. Пусть $\ldots, A(c)$ — вывод формулы $A(c)$ из Γ. Очевидно, что если в этом выводе константу c заменить на свободную переменную, то снова получится вывод из Γ, так что можно считать, что c — свободная переменная. Пусть B — какая-нибудь фиксированная замкнутая аксиома исчисления предикатов. Продолжим данный вывод из Γ формулы $A(c)$ следующим образом:

$\ldots$

i) $A(c)$

i+1) B (аксиома)

i+2) $A(c) \to (B \to A(c))$ (аксиома)

i+3) $B \to A(c)$ (получено из i) и i+2) по правилу MP)

i+4) $B \to \forall x\, A(x)$ (получено из i+3) по правилу (I))

i+5) $\forall x\, A(x)$ (получено из i+1) и i+4) по правилу MP)

Получили вывод из Γ формулы $\forall x\, A(x)$, что и требовалось.

Докажем допустимость правила удаления $\forall$:

$$\text{если } \Gamma \vdash \forall x\, A(x), \text{ то } \Gamma \vdash A(t),$$

где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм. Пусть $\ldots, \forall x\, A(x)$ — вывод формулы $A(c)$ из Γ. Продолжим его следующим образом:

$\ldots$

i) $\forall x\, A(x)$

i+1) $\forall x\, A(x) \to A(t)$ (аксиома)

i+2) $A(t)$ (получено из i) и i+1) по правилу MP)

Получили вывод из Γ формулы $A(t)$, что и требовалось.

Докажем допустимость правила введения $\exists$:

$$\text{если } \Gamma \vdash A(t), \text{ то } \Gamma \vdash \exists x\, A(x),$$

где Γ — произвольное множество замкнутых формул, t — произвольный терм. Пусть $\ldots, A(t)$ — вывод формулы $A(c)$ из Γ. Продолжим его следующим образом:

$\ldots$

i) $A(t)$

i+1) $A(t) \to \exists x\, A(x)$ (аксиома)

i+2) $\exists x\, A(x)$ (получено из i) и i+1) по правилу MP)

Получили вывод из Γ формулы $\exists x\, A(x)$, что и требовалось.

Докажем допустимость правила удаления $\exists$:

$$\text{если } \Gamma \cup \{A(c)\} \vdash B, \text{ то } \Gamma \cup \{\exists x\, A(x)\} \vdash B,$$

где Γ — произвольное множество замкнутых формул, B — замкнутая формула, c — константа, не входящая в формулы из Γ и формулу B. Пусть $\Gamma \cup \{A(c)\} \vdash B$. По теореме о дедукции $\Gamma \vdash A(c) \to B$. Если в выводе формулы $A(c) \to B$ из Γ константу c заменить на свободную переменную a, то получится вывод из Γ формулы $A(a) \to B$. Применяя правило (II), получим вывод из Γ формулы $\exists x\, A(x) \to B$. Продолжим этот вывод до вывода из $\Gamma \cup \{\exists x\, A(x)\}$ формулы B:

...

i) $\exists x\, A(x) \to B$

i+1) $\exists x\, A(x)$ (гипотеза)

i+2) B (получено из i) и i+1) по правилу MP)

Задача 4. Докажем, что

$$\vdash \forall x \neg P(x) \to \neg \exists x\, P(x).$$

В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\forall x \neg P(x) \vdash \neg \exists x\, P(x).$$

В силу принципа приведения к абсурду (правила введения $\neg$) достаточно доказать, что из множества

$$\{\forall x \neg P(x),\ \exists x\, P(x)\}$$

можно вывести противоречие. Зафиксируем какую-нибудь замкнутую формулу B, и докажем, что

$$\{\forall x \neg P(x),\ \exists x\, P(x)\} \vdash B, \neg B.$$

В силу правила удаления $\exists$ достаточно доказать, что

$$\{\forall x \neg P(x),\ P(c)\} \vdash B, \neg B,$$

где c — произвольная константа, не входящая в формулу B. Очевидно, что

$$\{\forall x \neg P(x),\ P(c)\} \vdash P(c),$$

а в силу правила удаления $\forall$ имеем

$$\{\forall x \neg P(x),\ P(c)\} \vdash \neg P(c).$$

Это означает, что множество $\{\forall x \neg P(x),\ P(c)\}$ противоречиво. Следовательно, из него выводится любая формула, в частности,

$$\{\forall x \neg P(x),\ P(c)\} \vdash B, \neg B,$$

что и требовалось доказать. Задача решена.

Докажем, что

$$\vdash \neg \exists x\, P(x) \to \forall x \neg P(x).$$

В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\neg \exists x\, P(x) \vdash \forall x \neg P(x).$$

В силу правила введения $\forall$ достаточно доказать, что

$$\neg\exists x\, P(x) \vdash \neg P(c),$$

где c — произвольная константа. В силу принципа приведения к абсурду достаточно доказать, что противоречиво множество

$$\{\neg\exists x\, P(x),\ P(c)\}.$$

Очевидно, что $\Gamma \vdash \neg\exists x\, P(x)$, а в силу правила введения $\exists$ имеем $\Gamma \vdash \exists x\, P(x)$. Так что действительно мержество Γ противоречиво. Задача решена.

Задача 5. Система аксиом, нормальные модели которой — это все бесконечные модели теории T, получается добавлением к T формул $\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots$, где $\mathcal{E}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ есть формула

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \le i < j \le n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Формула $\mathcal{E}_n$ истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда предметная область содержит не менее n элементов. Поэтому моделями теории $T \cup \{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots\}$ являются те и только те интерпретации, которые

1) являются моделями теории T и

2) бесконечны.

Докажем, что если теория T имеет сколь угодно большие конечные модели, то T имеет бесконечную модель. Рассмотрим теорию

$$T_\infty = T \cup \{\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3, \ldots\}.$$

Любое конечное множество $\Gamma \subset T_\infty$ имеет вид T' или $T' \cup \{\mathcal{E}_{i_1}, \ldots, \mathcal{E}_{i_k}\}$, где T' — конечное подмножество T. Пусть $m = \max\{1, i_1, \ldots, i_k\}$. Так как T имеет сколь угодно большие конечные модели, существует модель $\mathfrak{M}$ теории T, содержащая $\ge m$ элементов. Очевидно, что $\mathfrak{M} \models \Gamma$. Таким образом, любое конечное подмножество теории T_∞ имеет модель. В силу локальной теоремы Мальцева теория T_∞ имеет модель. Эта модель бесконечна и является моделью теории T. Задача решена.

Дополнительные задачи

Задача 6. Вывод формулы $\exists x P(x) \to \exists y P(y)$:

1) $P(a) \to \exists y P(y)$
2) $\exists x P(x) \to \exists y P(y)$

Задача 7. Вывод формулы $\forall x\, Q(x)$ из множества

$$\{\forall y (P(y) \to Q(y)),\ \forall z\, P(z)\}:$$

1) $\forall y(P(y) \to Q(y))$
2) $\forall z\, P(z)$
3) $\forall y(P(y) \to Q(y)) \to (P(a) \to Q(a))$
4) $P(a) \to Q(a)$
5) $\forall z\, P(z) \to P(a)$
6) $(P(a) \to Q(a)) \to (\forall z\, P(z) \to (P(a) \to Q(a)))$
7) $\forall z\, P(z) \to (P(a) \to Q(a))$
8) $(\forall z\, P(z) \to P(a)) \to ((\forall z\, P(z) \to (P(a) \to Q(a))) \to (\forall z\, P(z) \to Q(a)))$
9) $(\forall z\, P(z) \to (P(a) \to Q(a))) \to (\forall z\, P(z) \to Q(a))$
10) $\forall z\, P(z) \to Q(a)$
11) $\forall z\, P(z) \to \forall x\, Q(x)$
12) $\forall x\, Q(x)$
Задача 8. Докажем, что

$$\vdash \neg\forall x P(x) \to \exists x\, \neg P(x).$$

В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\neg\forall x P(x) \vdash \exists x\, \neg P(x).$$

В силу правила доказательства от противного достаточно доказать противоречивость множества

$$\Gamma = \{\neg\forall x P(x),\ \neg\exists x\, \neg P(x)\}.$$

Очевидно, что $\Gamma \vdash \neg\forall x P(x)$. Докажем, что $\Gamma \vdash \forall x P(x)$. В силу правила введения $\forall$ достаточно доказать, что $\Gamma \vdash P(c)$, где c — произвольная константа. В силу правила доказательства от противного достаточно доказать противоречивость множества

$$\Delta = \Gamma \cup \{\neg P(c)\} = \{\neg\forall x P(x),\ \neg\exists x\, \neg P(x),\ \neg P(c)\}.$$

Очевидно, что $\Delta \vdash \neg\exists x\, \neg P(x)$. В силу правила введения $\exists$, $\Delta \vdash \exists x\, \neg P(x)$. Так что действительно множество Δ противоречиво. Задача решена.

Докажем, что

$$\vdash \exists x\, \neg P(x) \to \neg\forall x P(x).$$

В силу теоремы о дедукции достаточно доказать, что

$$\exists x\, \neg P(x) \vdash \neg\forall x P(x).$$

В силу правила приведения к абсурду достаточно доказать противоречивость множества

$$\{\exists x\, \neg P(x),\ \forall x P(x)\}.$$

В силу правила удаления $\exists$ достаточно доказать, что противоречиво множество

$$\Gamma = \{\neg P(c),\ \forall x P(x)\},$$

где c — произвольная константа. Очевидно, что $\Gamma \vdash \neg P(c)$. В силу правила удаления $\forall$ имеем $\Gamma \vdash P(c)$. Так что действительно множество Γ противоречиво. Задача решена.

Задача 9. Пусть $\mathbf{G}$ — теория групп. Система аксиом для теории всех групп порядка 6 получается добавлением к $\mathbf{G}$ аксиом $\mathcal{E}_6$ и $\neg\mathcal{E}_7$ (см. задачу 5). Система аксиом для теории всех бесконечных групп строится, как в задаче 5 для $T = \mathbf{G}$.

Задача 10. Использовать задачу 5, учитывая, что существуют сколь угодно большие конечные группы.