САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Лабораторная работа по выч.математике №3

«Приближение функций»

Выполнил: Припадчев Артём
группа 2125

Проверил: Шипилов П.А.

2013 г.

Задание: составить программу для вычисления значений функции, заданной таблично на решетке $X_0 \ldots X_n$, с помощью интерполяционного полинома Лагранжа.
Результатом вычислений являются:

- Значение функции для произвольного X.
- График функции, построенный на интервале $X_0 \ldots X_n$ и узлы интерполяции.

Описание

Интерполяцио́нный многочле́н Лагра́нжа — многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек. Для $n+1$ пар чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$, где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ степени не более n, для которого $L(x_j) = y_j$.

В простейшем случае ($n = 1$) — это линейный многочлен, график которого — прямая, проходящая через две заданные точки.

Лагранж предложил способ вычисления таких многочленов:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

$l_i(x)$ обладают следующими свойствами:

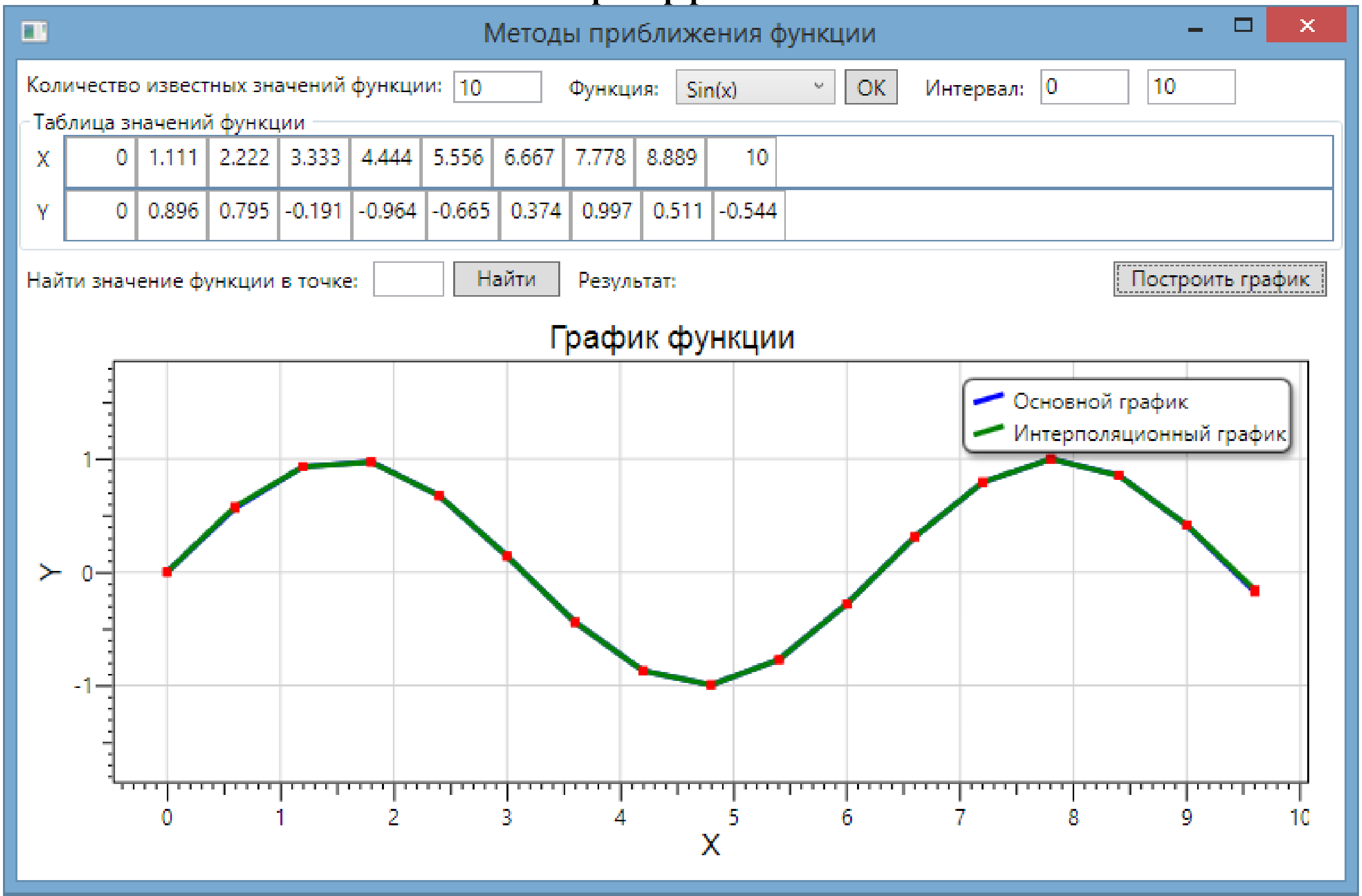
- являются многочленами степени n
- $l_i(x_i) = 1$
- $l_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$

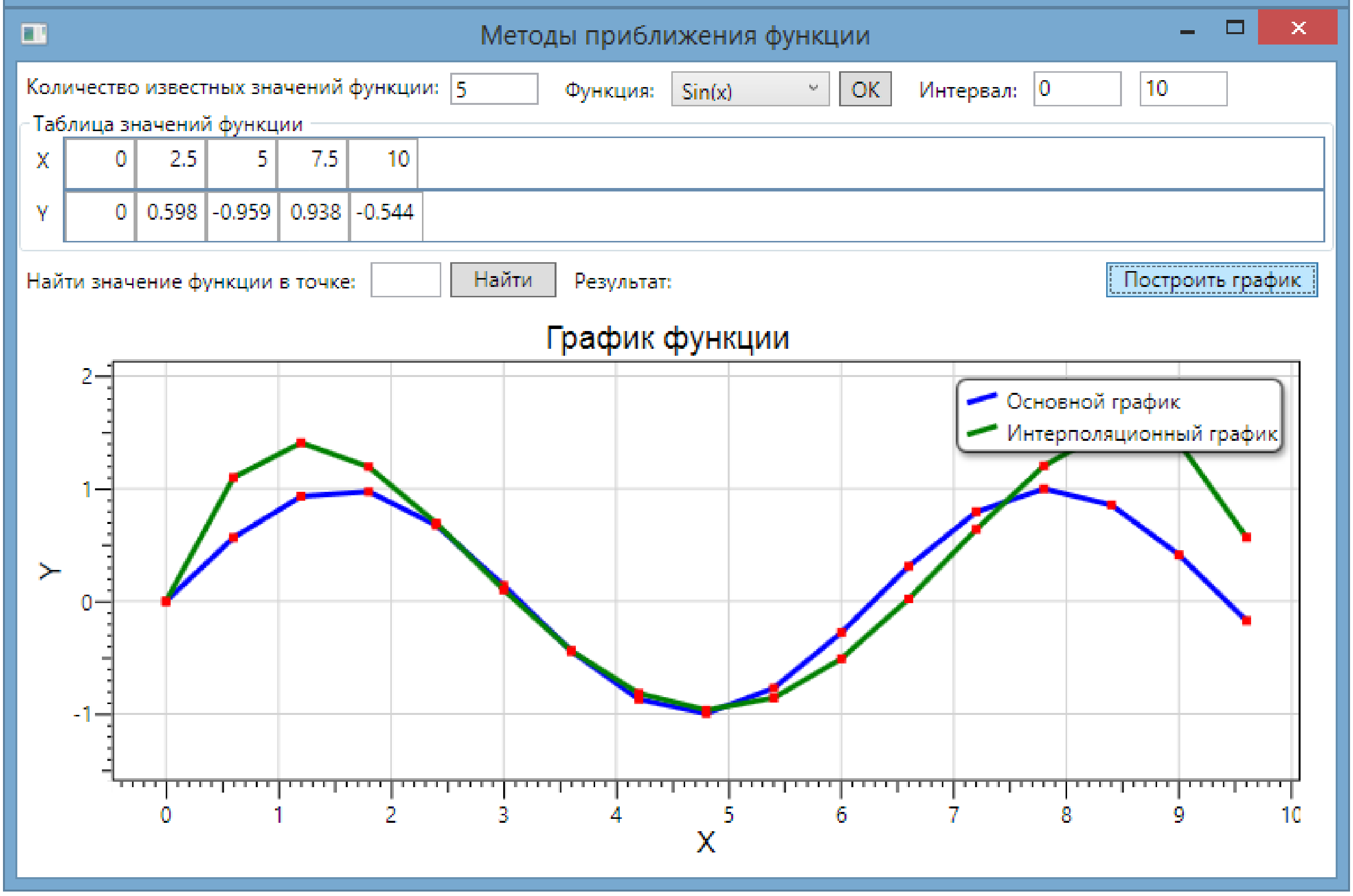
Отсюда следует, что $L(x)$, как линейная комбинация $l_i(x)$, может иметь степень не больше n, и $L(x_i) = y_i$, что и требовалось доказать.

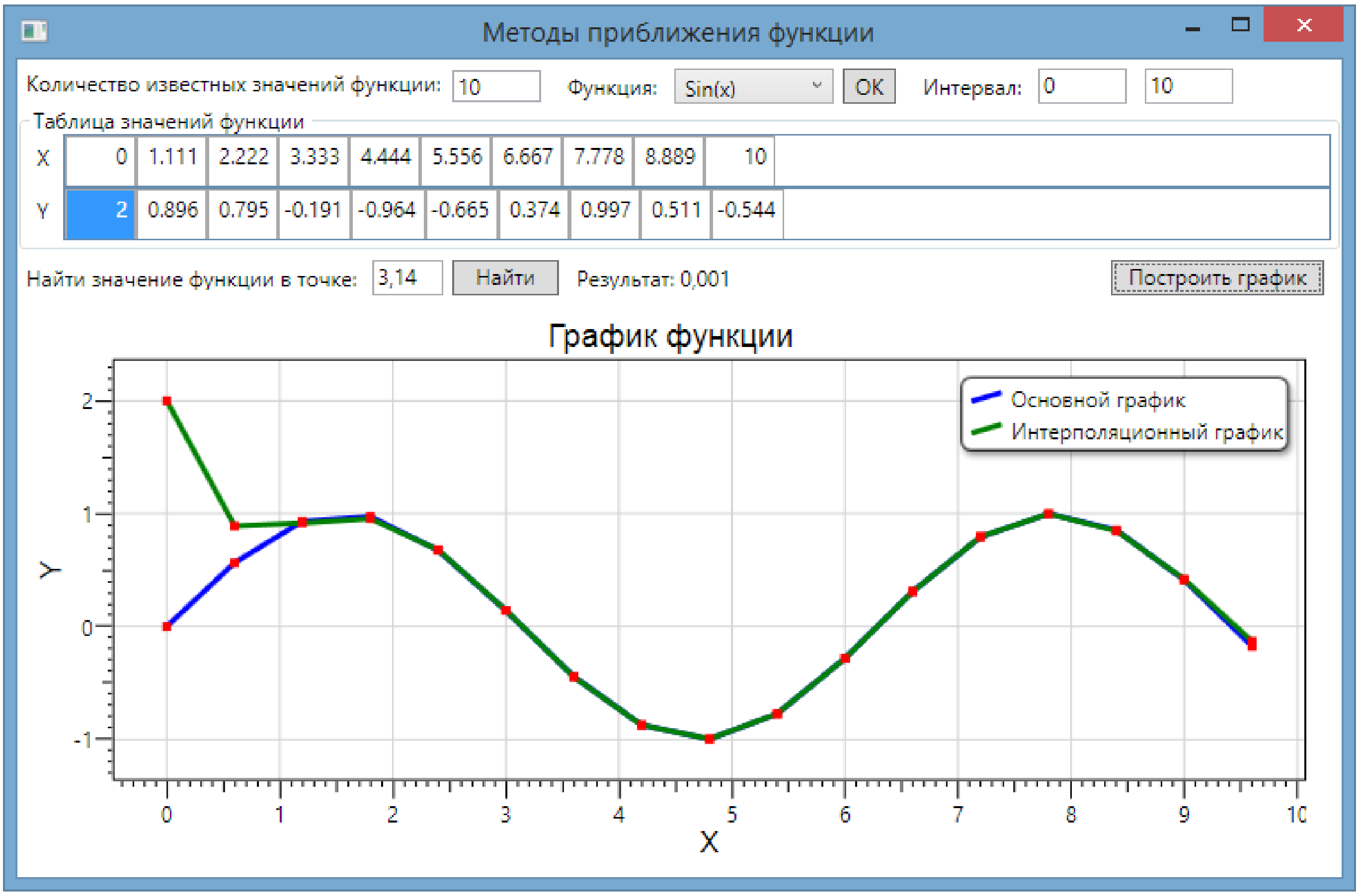
Код программы

```
public class PolynomialInterpolation
    {
        public double InterpolateLagrangePolynomial(double x, double[] xValues, double[] yValues)
        {
            int size = xValues.Length;
            double lagrangePol = 0;

            for (int i = 0; i < size; i++)
            {
                double basicsPol = 1;
                for (int j = 0; j < size; j++)
                {
                    if (j != i)
                    {
                        basicsPol *= (x - xValues[j]) / (xValues[i] - xValues[j]);
                    }
                }
                lagrangePol += basicsPol * yValues[i];
            }

            return lagrangePol;
        }}
```

Пример работы







Вывод: в процессе выполнения лабораторной работы была рассмотрена интерполяция функции полиномом Лагранжа и сделаны следующие выводы:

- в узлах интерполяции погрешность вычислений равна нулю
- при интерполяции выгодно использовать четное число n узлов, симметрично расположенных относительно точки $x^* \ni (x_1, x_n)$
- если при увеличении кол-ва известных точек функции не удается обеспечить требуемую точность интерполяции, то целесообразнее не увеличивать n, а уменьшать шаг между соседними узлами, т.е. использовать (если это возможно) таблицу значений $y_i=f_i(x)$ с меньшим шагом по x. (*замеч.* данное правило работает и в обратную сторону, т.е. если не удается достичь требуемой точности интерполяции уменьшая шаг, то целесообразнее увеличивать (если это возможно) кол-во известных точек функции)