САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Лабораторная работа по выч.математике №5

«Приближение функции»

Выполнил: Припадчев Артём
группа 2125

Проверил: Шипилов П.А.

2013 г.

Задание: составить программу, выполняющую приближение сложной функции с помощью интерполяционного полинома Лагранжа. В этой постановке узлы интерполяции определяются как корни полинома Чебышева.

Описание

Интерполяцио́нный многочле́н Лагра́нжа — многочлен минимальной степени, принимающий данные значения в данном наборе точек. Для $n+1$ пар чисел $(x_0, y_0), (x_1, y_1) \ldots, (x_n, y_n)$, где все x_j различны, существует единственный многочлен $L(x)$ степени не более n, для которого $L(x_j) = y_j$.

В простейшем случае ($n = 1$) — это линейный многочлен, график которого — прямая, проходящая через две заданные точки.

Лагранж предложил способ вычисления таких многочленов:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

$l_i(x)$ обладают следующими свойствами:

- являются многочленами степени n
- $l_i(x_i) = 1$
- $l_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$

Отсюда следует, что $L(x)$, как линейная комбинация $l_i(x)$, может иметь степень не больше n, и $L(x_i) = y_i$, что и требовалось доказать.

Заметим также, что для некоторых функций f(x), определенных на отрезке xO [a,b], интерполяционный многочлен Pn(x) построенный по значениям f(xi) в равноотстоящих узлахxi=a+ih, x0=a, xn=b, h=(b-a)/n с ростом числа узлов n, вовсе не будет иметь убывающую погрешность интерполирования. Это обусловлено тем, что равноотстоящие узлы не являются лучшими с точки зрения уменьшения погрешности интерполирования. Если имеется возможность выбора узлов интерполирования, то их следует выбирать так, чтобы обеспечить минимум погрешности интерполяции min|Rn(x)|. Такому требованию на отрезке [-1,1] удовлетворяют узлы полиномов Чебышева $T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n}\cos((n+1)\arccos x)$

вычисляемые по формуле $x_k = \cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$ k=0,1,2,...,n.

В случае произвольного отрезка [*a*,*b*] узлы интерполяции вычисляют по формулам

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi$$ *k*=0,1,2,...,*n*.

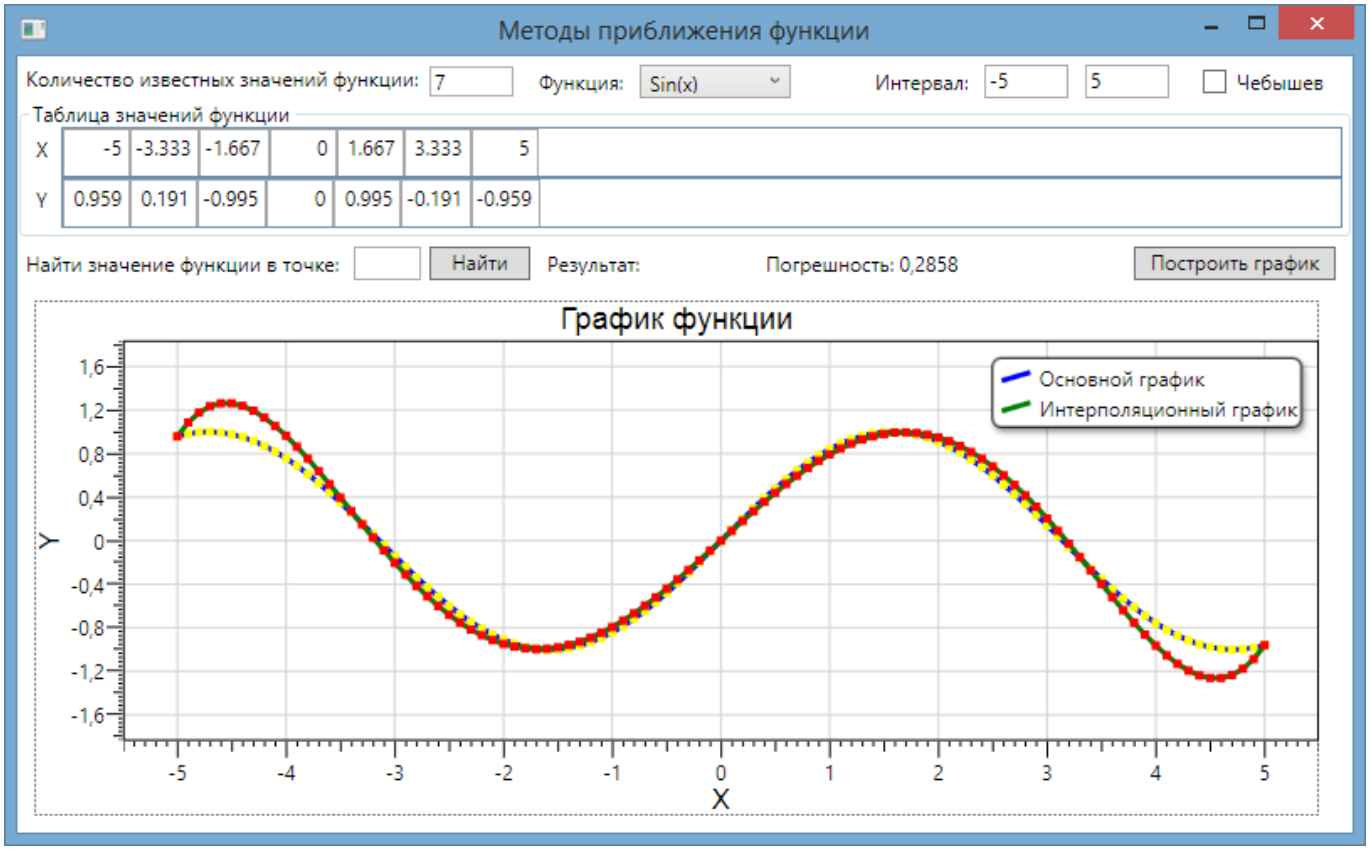
Интерполяционный полином построенный по таким узлам является алгебраическим полиномом наилучшего приближения.

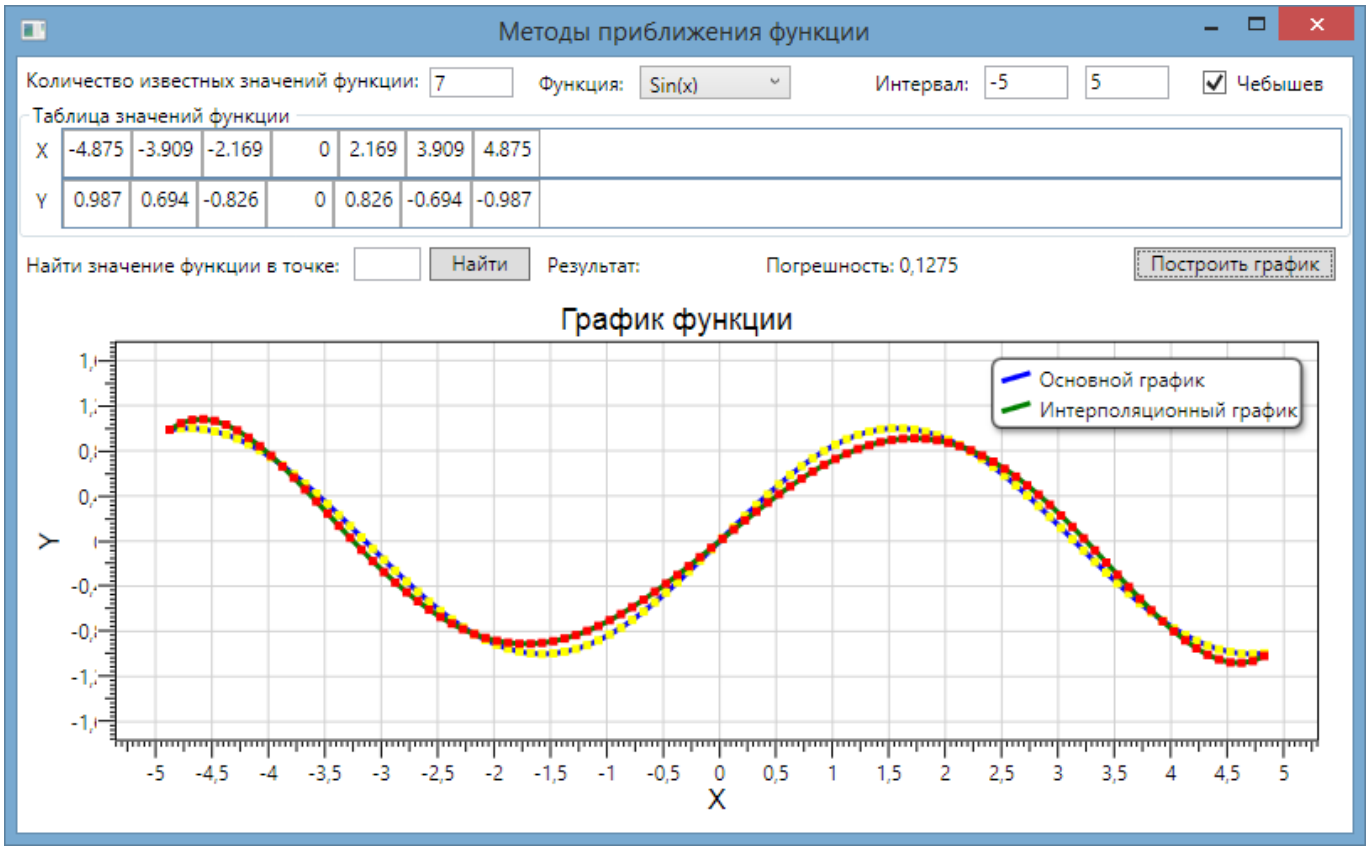
Код программы

```
public enum InterpolationType
    {
        Equidistant,
        Optimal
    }

    public class PolynomialInterpolation
    {
        private void NodesInitialisation(int countofnodes, InterpolationType _type)
        {
            _nodes = new double[countofnodes];
            switch (_type)
            {
                case InterpolationType.Equidistant:
                    for (int i = 0; i < countofnodes; i++)
                    {
                        _nodes[i] = a + i * (b - a) / (countofnodes - 1);
                    }
                    break;
                case InterpolationType.Optimal:
                    for (int k = 0; k < countofnodes; k++)
                    {
                        _nodes[k] = Math.Cos(Math.PI * (2 * k + 1) / (2 * countofnodes)) * (b -
a) / 2 + (b + a) / 2;
                    }
                    break;
            }
        }

        private PolynomialInterpolation(double a, double b, int n, InterpolationType type)
        {
            this.a = a;
            this.b = b;
            NodesInitialisation(n, type);
        }

        public PolynomialInterpolation(double a, double b, int n, InterpolationType type,
MainWindow.Calc f)
            : this(a, b, n, type)
        {
            _sourcefunction = f;
            _values = new double[_nodes.Length];
            for (int i = 0; i < _nodes.Length; i++)
            {
                _values[i] = _sourcefunction(_nodes[i]);
            }
        }

        public PolynomialInterpolation(double a, double b, int n, InterpolationType type,
double[] values)
            : this(a, b, n, type)
        {
            _values = values;
        }

        public double[] Nodes
        {
            get
            {
                return _nodes;
            }
        }

        public double LagrangePolynomial(double x)
```

```
    {
        double sum = 0;
        if (_sourcefunction != null)
        {
            for (int i = 0; i < _nodes.Length; i++)
            {
                sum += _sourcefunction(_nodes[i]) * BasisPolynomial(i, x);
            }
        }
        else
        {
            for (int i = 0; i < _values.Length; i++)
            {
                sum += _values[i] * BasisPolynomial(i, x);
            }
        }
        return sum;
    }

    public double BasisPolynomial(int k, double x)
    {
        double result = 1;
        for (int i = 0; i < _nodes.Length; i++)
        {
            if (i != k)
            {
                result *= (x - _nodes[i]) / (_nodes[k] - _nodes[i]);
            }
        }
        return result;
    }

    public double[] _values;
    private MainWindow.Calc _sourcefunction;
    public double[] _nodes;
    private double a, b;
}
```

Пример работы





Вывод: в процессе выполнения лабораторной работы была рассмотрена интерполяция функции полиномом Лагранжа и сделаны следующие выводы:

- в узлах интерполяции погрешность вычислений равна нулю
- при интерполяции выгодно использовать четное число n узлов, симметрично расположенных относительно точки $x^* \ni (x_1, x_n)$
- если при увеличении кол-ва известных точек функции не удается обеспечить требуемую точность интерполяции, то целесообразнее не увеличивать n, а уменьшать шаг между соседними узлами, т.е. использовать (если это возможно) таблицу значений $y_i=f_i(x)$ с меньшим шагом по x. (*замеч.* данное правило работает и в обратную сторону, т.е. если не удается достичь требуемой точности интерполяции уменьшая шаг, то целесообразнее увеличивать (если это возможно) кол-во известных точек функции)
- Лучше выбирать не равномерно распределенные узлы интерполяции, а узлы, являющиеся решениями уравнения Чебышева. В результате бОльшее кол-во узлов будет сконцентрировано на концах отрезка интерполирования, на которых обычно и находится самая высокая погрешность.