

СПб НИУ ИТМО

Кафедра ИПМ

Домашнее задание по математической логике №2

Работу выполнил

Студент 1 курса

Группы № 1125

Журавлев Виталий

Санкт-Петербург

2013 г.

Задание 1. Найти и привести равносильные формулы логики предикатов.

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$.
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$.
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$.
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$.
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$
6. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$
7. $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$
8. $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$.
9. $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$.
10. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$.
11. $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$.

Задание 2. Найти и привести законы логических операций.

1. $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
2. $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
3. $\exists x (F(x) \vee G(x)) \equiv \exists x F(x) \vee \exists x G(x)$
4. $\forall x \forall y F(x, y) \equiv \forall y \forall x F(x, y)$
5. $\overline{\forall x F(x)} \equiv \exists x \overline{F(x)}$
6. $\overline{\exists x F(x)} \equiv \forall x \overline{F(x)}$

Задание 3. Придумать формулу и привести ее в нормальную форму.

$$\begin{aligned}
 & (\exists x K(x) \rightarrow (\exists z L(z) \sim \forall y M(y))) \wedge ((\exists z N(z) \rightarrow \exists z O(z)) \sim \forall y M(y)) \\
 & \equiv (\overline{\exists x K(x)} \vee \exists z L(z) \sim \forall y M(y)) \wedge \left((\overline{\exists z N(z)} \vee \exists z O(z)) \sim \forall y M(y) \right) \\
 & \equiv \left((\overline{\exists x K(x)} \vee \overline{\exists z L(z)} \vee \forall y M(y)) \wedge (\exists z N(z) \vee \overline{\forall y M(y)}) \right) \wedge \\
 & \wedge \left(\overline{\exists z N(z)} \vee \exists z O(z) \vee \forall y M(y) \right) \wedge (\overline{\exists z N(z)} \vee \exists z O(z) \vee \overline{\forall y M(y)}) \\
 & \equiv \left(\forall x \overline{K(x)} \vee \forall z \overline{L(z)} \vee \forall y M(y) \right) \wedge \left(\exists z (z) \vee \exists y \overline{M(y)} \right) \wedge \\
 & \wedge (\exists z N(z) \vee \exists z O(z) \vee \forall y M(y)) \wedge \left(\forall z \overline{N(z)} \vee \exists z O(z) \vee \exists y \overline{M(y)} \right)
 \end{aligned}$$

Задание 4. Придумать формулу и получить из нее предваренную нормальную форму.

$$\begin{aligned}
 & (\exists x \forall y A(x, y) \rightarrow \forall x \forall y B(x, y)) \wedge (\exists x \forall y A(x, y) \sim \forall x \exists y C(x, y) \rightarrow \exists x \exists y D(x, y) \sim \forall x \forall y B(x, y)) \equiv \\
 & \equiv \left(\overline{\exists x \forall y A(x, y)} \vee \forall x \forall y B(x, y) \right) \wedge \left(\exists x \forall y A(x, y) \sim \overline{\forall x \exists y C(x, y)} \vee \exists x \exists y D(x, y) \sim \forall x \forall y B(x, y) \right) \equiv \\
 & \equiv \left(\overline{\exists x \forall y A(x, y)} \vee \forall x \forall y B(x, y) \right) \wedge \left(\overline{\exists x \forall y A(x, y)} \vee \overline{\forall x \exists y C(x, y)} \right) \wedge \left(\exists x \exists y D(x, y) \vee \overline{\forall x \forall y B(x, y)} \right) \\
 & \vee \left(\overline{\exists x \exists y D(x, y)} \vee \forall x \forall y B(x, y) \right) \wedge \left(\exists x \exists y D(x, y) \vee \overline{\forall x \forall y B(x, y)} \right) \equiv \\
 & \equiv \left(\forall x \exists y \overline{A(x, y)} \vee \forall x \forall y B(x, y) \right) \wedge \left(\forall x \exists y \overline{A(x, y)} \vee \exists x \forall y \overline{C(x, y)} \right) \wedge \left(\exists x \forall y A(x, y) \vee \forall x \exists y C(x, y) \right) \\
 & \vee \left(\forall x \forall y \overline{D(x, y)} \vee \forall x \forall y B(x, y) \right) \wedge \left(\exists x \exists y D(x, y) \vee \exists x \exists y \overline{B(x, y)} \right)
 \end{aligned}$$

Задание 5. Найти и привести в соответствии с обозначениями запись математических предложений.

Определение возрастающей функции.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E возрастает на этом множестве, если

$$\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$

Задание 6. Проверить формулу методом резолюций.

$$F = (A(x) \wedge C(x)) \vee (B(x) \wedge C(x)) \vee (\overline{B(z)} \wedge \overline{C(y)}) \vee (A(z) \wedge B(y)) \vee (\overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)}) \vee (\overline{A(x)} \wedge \overline{C(x)})$$

Обратная формула:

$$\overline{F} = (\overline{A(z)} \vee \overline{B(y)}) \wedge (B(z) \vee C(y)) \wedge (\overline{B(x)} \vee \overline{C(x)}) \wedge (A(x) \vee B(x)) \wedge (A(x) \vee C(x)) \wedge (\overline{A(x)} \vee \overline{C(x)})$$

1) Резолюция по C:

$$(\overline{A(x)} \vee \overline{C(x)}) \wedge (A(x) \vee C(x))$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \text{x/x} \\
 \downarrow \\
 (A(x) \vee \overline{A(x)})
 \end{array}$$

$$(A(x) \vee \overline{C(x)}) \wedge (C(y) \vee \overline{A(y)})$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \text{x/y} \\
 \downarrow \\
 (A(y) \vee \overline{A(y)})
 \end{array}$$

2) Резолюция по B:

$$(\overline{A(z)} \vee \overline{B(y)}) \wedge (B(z) \vee C(y))$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \text{z/y} \\
 \downarrow \\
 (\overline{A(y)} \vee C(y))
 \end{array}$$

$$(\overline{B(x)} \vee \overline{C(x)}) \wedge (A(x) \vee B(x))$$

$$\begin{array}{c}
 \downarrow \quad \swarrow \\
 \text{x/x} \\
 \downarrow \\
 (\overline{C(x)} \vee A(x))
 \end{array}$$

$$\overline{F} = (A(x) \vee \overline{A(x)}) \wedge (A(y) \vee \overline{A(y)})$$

\overline{F} - тавтология. Значит, исходная формула общезначима.