ТИПОВОЙ РАСЧЕТ "ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ."

Методические указания

Типовой расчет состоит из четырех заданий, содержащих задачи по основным темам курса "Дифференциальные уравнения". Задачи носят иллюстративный характер и рассчитаны на самостоятельную работу студентов. Методические указания не содержат полного изложения теории, а лишь напоминают некоторые факты и типовые приемы. Для каждого задания разобран типовой пример.

I. В первом задании предлагается решить уравнение, допускающее понижение порядка. Уравнение может относиться к одному из двух типов:

$$F(x, y^k, y^{k+1}) = 0 \tag{1}$$

или

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{2}$$

Уравнения типа (1) не содержат в явном виде искомую функцию и, может быть, несколько младших производных. Понизить порядок уравнения удается, вводя новую функцию

$$p(x) = y^{(k)},$$

где k - порядок младшей присутствующей производной. Уравнения типа (2) не содержат в явном виде независимую переменную x. Тогда ее место занимает y после введения новой функции

$$p(y) = y'.$$

Приступая к выполнению задания, следует отметить особенности уравнения, определить его тип и воспользоваться типовым приемом. Если удается придумать другое решение, укажите и его.

Задача 1,а.

$$x^2 y'' = (y')^2.$$

Это уравнение не содержит y в явном виде и, следовательно, относится к типу (1). Положим $p(x) = y'$, тогда, дифференцируя обе части по x, находим

$$y'' = p'(x).$$

Уравнение принимает вид:

$$x^2 p' = p^2,$$

или $x^2 dp = p^2 dx$. Это - уравнение с разделяющимися переменными.

$$dp/p^2 = dx/x^2 \Rightarrow -p^{-1} = -x^{-1} + c_1 \Rightarrow$$

$$1/p = 1/x + c_1 \Rightarrow 1/p = (1 + c_1 x)/x \Rightarrow p = x/(1 + c_1 x).$$

Так как $p = y'$, то
$$y' = \frac{x}{1 + c_1 x} \Rightarrow y = \int \frac{x dx}{1 + c_1 x}.$$
Интегрируемую функцию домножим и разделим на c_1, после чего в числителе прибавим и вычтем единицу:
$$y = \frac{1}{c_1} \int \frac{((c_1 x + 1) - 1)dx}{1 + c_1 x} \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{c_1}\Big(\int dx - \int \frac{dx}{1 + c_1 x}\Big) \Rightarrow$$
$$y = \frac{1}{c_1}\Big(x - \frac{1}{c_1} \int \frac{d(c_1 x + 1)}{1 + c_1 x}\Big) \Rightarrow$$
$$y = (1/c_1)x - (1/c_1^2) \ln \mid c_1 x + 1 \mid + c_2.$$

Ответ: $y = (1/c_1)\, x - (1/c_1^2) \ln \mid c_1 x + 1 \mid + c_2.$

Задача 1,б.
$$y'' = 2yy'.$$
Это уравнение относится к типу (2). Положим $y' = p(y)$. Чтобы получить выражение для y'', продифференцируем последнее равенство по x, помня, что в правой части стоит сложная функция $p(y(x))$:
$$y'' = p'_y y'_x = p' p.$$
Теперь уравнение выглядит так:
$$p' p = 2yp.$$
Разделим обе части на $p \neq 0$ (случай $p = 0$ рассмотрим особо):
$$p' = 2y \Rightarrow p = y^2 + c \Rightarrow y' = y^2 + c.$$
Это - уравнение с разделяющимися переменными:
$$dy/(y^2 + c) = dx.$$
В зависимости от знака числа c левая часть интегрируется по-разному: 1) $c > 0 \Rightarrow c = c_1^2$, и
$$\int dy/(y^2 + c_1^2) = (1/c_1) \int d(y/c_1)/((y/c_1)^2 + 1) = (1/c_1)\mathrm{arctg}\,(y/c_1).$$
Решение имеет вид:
$$x + c_2 = (1/c_1)(\mathrm{arctg}\,(y/c_1)).$$
2) $c < 0 \Rightarrow c = -c_1^2$, и
$$\int \frac{dy}{y^2 - c_1^2} = \frac{1}{2c_1} \ln \left| \frac{y - c_1}{y + c_1} \right|.$$
Решение имеет вид:
$$x + c_2 = \frac{1}{2c_1} \ln \left| \frac{y - c_1}{y + c_1} \right|.$$
3) $c = 0 \;\Rightarrow\; dy/y^2 = dx \;\Rightarrow\; -1/y = x + c_1,$ и решение имеет вид:
$$xy + c_1 y + 1 = 0.$$

Вернемся к случаю $p=0$. При этом, как мы знаем, $y'=0$, следовательно, $y=\mathrm{const}$. Легко видеть, что функции такого вида являются решениями нашего уравнения. С другой стороны, эти функции ни при каких значениях постоянных не входят ни в одну из трех уже полученных веток общего решения. Значит, они образуют еще одну ветку решения: $y=c$. Порядок исходного уравнения можно понизить, воспользовавшись другой его особенностью. Легко видеть, что

$$2yy' = (y^2)'_x.$$

Следовательно, уравнение принимает вид:

$$y'' = (y^2)'_x,$$

тогда

$$y'' - (y^2)' = 0 \Rightarrow (y' - y^2)' = 0 \Rightarrow y' - y^2 = c$$

и

$$y' = y^2 + c.$$

Получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, которое и решаем обычным путем.

II. Во втором задании предлагаются два линейных неоднородных уравнения. В первом следует найти решение задачи Коши методом неопределенных коэффициентов (специальной правой части), а в другом ищется общее решение методом Лагранжа (вариации произвольных постоянных). Общее решение ЛНДУ может быть представлено в виде:

$$y = y_0 + \tilde{y},$$

где y_0 - общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\tilde{y}$ - частное решение исходного неоднородного уравнения. В обеих задачах начинаем с нахождения корней характеристического уравнения, фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения и его общего решения.

Задача 2,а.

$$y'' - y = \operatorname{ch} x + \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1/2.$$

Специальной правой частью называется функция вида:

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x), \tag{1}$$

где $P_n(x)$ - многочлен степени n, или

$$f(x) = e^{\alpha x}(S_{m1}(x)\cos\beta x + Q_{m2}(x)\sin\beta x), \tag{2}$$

где $S_{m1}(x), Q_{m2}(x)$ - многочлены степени m_1 и m_2 соответственно, а также линейная комбинация функций вида (1) и (2). Воспользовавшись определением гиперболического косинуса

$$\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2,$$

видим, что наше уравнение имеет специальную правую часть.

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

имеет два вещественных различных корня $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Тогда функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения

$$y'' - y = 0,$$

а их линейная комбинация - его общее решение

$$y_0 = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Вид частного решения неоднородного уравнения составим по образцу правой части. Заметим, что она состоит из трех слагаемых специального вида:

$$f_1(x) = e^x/2, \quad f_2(x) = e^{-x}/2, \quad f_3(x) = \sin x.$$

Воспользуемся ими для нахождения частичных частных решений $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3$, заменяя правую часть уравнения на ее отдельные слагаемые. Тогда искомое частное решение $\tilde{y}$ получим в виде:

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3.$$

Правая часть $f_1(x) = e^x/2$ содержит многочлен нулевой степени, а коэффициент при x в показателе экспоненты $\alpha = 1$ является корнем кратности 1 характеристического уравнения. Поэтому решение ищем в виде:

$$\tilde{y}_1 = ae^x x,$$

где a - произвольный многочлен нулевой степени, коэффициенты которого надо найти. Из тех же соображений для

$$f_2(x) = e^{-x}/2$$

решение должно иметь вид

$$\tilde{y}_2 = be^{-x} x.$$

Приведем к теоретическому виду функцию $f_3(x)$:

$$f_3(x) = \sin x = e^{0x}(1 \sin x + 0 \cos x).$$

Числа $\alpha \pm \beta i = 0 \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения (α-коэффициент при x в экспоненте, а β - кратность аргумента синуса и косинуса). Значит, решение должно иметь вид:

$$\tilde{y}_3 = e^{0x}(a_1 \sin x + b_1 \cos x) =$$

$$= a_1 \sin x + b_1 \cos x.$$

Теперь

$$\tilde{y} = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2 + \tilde{y}_3 = a\,x\,e^x + b\,x\,e^{-x} + a_1 \sin x + b_1 \cos x.$$

Коэффициенты a, b, a_1, b_1 найдем, подставив $\tilde{y}$ в исходное уравнение, учитывая, что оно обращает уравнение в тождество.

$$\tilde{y'} = (x(ae^x + be^{-x}) + a_1 \sin x + b_1 \cos x)' =$$

$$= ae^x + be^{-x} + x(ae^x - be^{-x}) + a_1 \cos x - b_1 \sin x.$$

$$\tilde{y}'' = ae^x - be^{-x} + (ae^x - be^{-x}) + x(ae^x + be^{-x}) - a_1 \sin x - b_1 \cos x.$$

Подставляем $\tilde{y}, \tilde{y}', \tilde{y}''$ в уравнение:

$$(2ae^x - 2be^{-x} + x(ae^x + be^{-x}) - a_1 \sin x - b_1 \cos x) -$$

$$-(x(ae^x + be^{-x}) + a_1 \sin x + b_1 \cos x) = (e^x + e^{-x})/2 + \sin x.$$

Коэффициенты при одинаковых функциях в левой и правой части должны быть равны. Сопоставим их:

при e^x:

$$2a = 1/2 \quad \Rightarrow \quad a = 1/4$$

при e^{-x}:

$$-2b = 1/2 \quad \Rightarrow \quad b = -1/4$$

при $\sin x$:

$$-2a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1/2$$

при $\cos x$:

$$-2b_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b_1 = 0.$$

Подставляя найденные значения, напишем общее решение исходного уравнения:

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + xe^x/4 - xe^{-x}/4 - (\sin x)/2 =$$
$$= c_1e^x + c_2e^{-x} + x(\operatorname{sh} x)/2 - (\sin x)/2.$$

Найдем его производную:

$$y' = c_1e^x - c_2e^{-x} + (\operatorname{sh} x)/2 + x(\operatorname{ch} x)/2 + (\cos x)/2.$$

Для решения задачи Коши подставим начальные условия в выражения для y, y':

$$\begin{cases} 2 = c_1e^0 + c_2e^0 + 0(\operatorname{sh} 0)/2 - (\sin 0)/2 \\ -1/2 = c_1e^0 - c_2e^0 + (\operatorname{sh} 0)/2 + 0(\operatorname{ch} 0)/2 - (\cos 0)/2. \end{cases}$$

Искомое решение задачи Коши:

$$y = e^x + e^{-x} + x(\operatorname{sh} x)/2 - (\sin x)/2.$$

Задача 2,б. Найти общее решение методом Лагранжа.

$$y'' + 3y' + 2y = 1/(e^x + 1).$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения находим по корням характеристического уравнения:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -3 \\ \lambda_1\lambda_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2,$$
$$y_0 = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}.$$

Частное решение неоднородного уравнения $\tilde{y}$ ищем по образцу решения y_0, заменяя в нем произвольные постоянные c_1 и c_2 функциями $c_1(x)$ и $c_2(x)$ (варьируя постоянные):

$$\tilde{y} = c_1(x)e^{-x} + c_2(x)e^{-2x}.$$

Условия, которым должны отвечать функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$, сводятся к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{-2x} = 0 \\ -c_1'(x)e^{-x} - 2c_2'(x)e^{-2x} = 1/(e^x + 1). \end{cases}$$

Это - система линейных алгебраических уравнений относительно c_1' и c_2'. Ее главный определитель есть определитель Вронского $W(x)$ для системы функций e^x, e^{-2x}. Так как эти функции образуют фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то $W(x) \neq 0$ при любом вещественном x. Тогда, по правилу Крамера, система имеет решение, причем единственное. Для его нахождения сложим уравнения системы:

$$-c_2'(x)e^{-2x} = 1/(e^x+1) \Rightarrow$$

$$c_2'(x) = -e^{2x}/(e^x+1).$$

Из первого уравнения имеем:

$$c_1'(x)e^{-x} = -c_2'(x)e^{-2x} \Rightarrow$$

$$c_1'(x) = -(-e^{2x}/(e^x+1))e^{-x} = e^x/(e^x+1).$$

Интегрируя, находим функции $c_1(x)$ и $c_2(x)$ (аддитивные постоянные уже учтены в решении y_0):

$$c_1(x) = \int \frac{e^x dx}{e^x+1} = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1)$$

$$c_2(x) = \int \frac{-e^{2x}dx}{e^x+1} = -\int \frac{e^x e^x dx}{e^x+1} =$$

$$= -\int \frac{((e^x+1)-1)de^x}{(e^x+1))} = -\int de^x + \int \frac{d(e^x+1)}{(e^x+1)} = -e^x + \ln(e^x+1).$$

Подставляя найденные функции, получаем общее решение уравнения:

$$y = y_0 + \tilde{y} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \ln(e^x+1) - e^{-x} + (\ln(e^x+1) - e^x)e^{-2x}.$$

III. В третьем задании нужно двумя способами решить задачу Коши для линейной однородной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Задача 3.

$$\begin{cases} x_t' = 2x + y \\ y_t' = -x + 4y; \end{cases}$$

$$x(0) = 0,$$

$$y(0) = 2.$$

a. Метод исключения, то есть сведения к одному уравнению второго порядка. Выразим y из первого уравнения:

$$y = x' - 2x,$$

дифференцируя по t, получим:

$$y' = x'' - 2x'.$$

Подставим y и y' во второе уравнение:

$$x'' - 2x' = -x + 4(x' - 2x) \Rightarrow$$

$$x'' - 6x' + 9x = 0.$$

Это - линейное однородное дифференциальное уравнение относительно функции $x(t)$, не содержащее $y(t)$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ дают нам его общее решение:

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$$

Найдем $x'(t)$:

$$x'(t) = 3c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + 3c_2te^{3t}.$$

Подставим $x(t)$ и $x'(t)$ в выражение для $y(t)$:

$$y(t) = x' - 2x = = 3c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + 3c_2te^{3t} - 2(c_1e^{3t} + c_2te^{3t}) = = c_1e^{3t} + c_2e^{3t} + c_2te^{3t} = c_1e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t}.$$

Общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{3t} + c_2te^{3t} \\ y(t) = c_1e^{3t} + c_2(t+1)e^{3t}. \end{cases}$$

Подставив начальные условия $x(0) = 0$ и $y(0) = 2$ в это решение, найдем, что $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. Получили решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x(t) = 2te^{3t} \\ y(t) = 2(t+1)e^{3t}. \end{cases}$$

б. Решим эту же систему операционным методом. Применим оператор Лапласа к обеим частям системы: пусть изображениями искомых функций будут $X(p)$ и $Y(p)$, тогда, по теореме дифференцирования оригинала, получаем: $\begin{array}{l} x'(t) \doteq X(p) - x(0) = pX(p), \\ y'(t) \doteq pY(p) - y(0) = pY(p) - 2. \end{array}$ Система дифференциальных уравнений относительно оригиналов $x(t)$ и $y(t)$ переходит в алгебраическую систему относительно изображений $X(p)$ и $Y(p)$:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 4y \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} X(p)(p-2) \qquad\qquad = Y(p) \\ \quad X(p) + (p-4)Y(p) = 2 \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом исключения или по правилу Крамера.

При $p \neq 3$ получаем:

$$\begin{array}{l} X(p) = \frac{2}{(p-3)^2}, \\ Y(p) = \frac{2(p-2)}{(p-3)^2}. \end{array}$$

Приведем правые части к табличному виду, применим обратное преобразование Лапласа.

$$\begin{array}{r} X(p) = 2\frac{1}{(p-3)^2} \doteq 2te^{3t} \\ Y(p) = 2\frac{p-2-1+1}{(p-3)^2} = 2(\frac{1}{p-3} + \frac{1}{(p-3)^2}) \doteq \\ \doteq 2(e^{3t} + te^{3t}) = 2e^{3t}(t+1). \end{array}$$

Заметим, что этим способом мы сразу находим решение задачи Коши, не находя предварительно общего решения. Результаты, полученные разными способами, разумеется, совпадают, что служит косвенным подтверждением правильности ответа:

$$\begin{cases} x(t) = 2te^{3t}, \\ y(t) = 2(t+1)e^{3t}. \end{cases}$$

IV. В четвертом задании нужно найти общее решение системы трех линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, используя методы линейной алгебры.

Задача 4 .

$$\begin{cases} x'_t = -x \\ y'_t = 2x + y \\ z'_t = -x - y + 2z \end{cases}.$$

Введем следующие обозначения:

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

где A - матрица коэффициентов правой части. В матричной форме система принимает вид:

$$X'(t) = AX(t).$$

Решение будем искать в виде: $X(t) = \Gamma e^{\lambda t}$,

$$\text{где} \quad \Gamma = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} - \text{ненулевой вектор-столбец.}$$

Известно, что $\Gamma e^{\lambda t}$ будет решением системы тогда и только тогда, когда λ - собственное число матрицы A, а Γ - ненулевой собственный столбец матрицы A, соответствующий числу λ. Начинаем, как обычно, с нахождения собственных чисел матрицы A. Для этого решаем характеристическое уравнение

$$det(A - \lambda E) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda 0 & \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В данном случае все элементы матрицы, стоящие над главной диагональю, равны нулю, поэтому вычисление определителя сводится к перемножению элементов главной диагонали (в более общих случаях надо пользоваться известными правилами вычисления определителя):

$$det(A - \lambda E) = (-1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$ все различны, что существенно упрощает процедуру решения. Переходим к нахождению собственных столбцов, соответствующих найденным собственным числам. Для каждого значения λ составим систему линейных однородных алгебраических уравнений

$$(A - \lambda E)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0.$$

Эта система обязательно совместна, так как у нее есть решение

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

ее главный определитель, в силу выбора числа λ, равен нулю, следовательно, у нее бесконечно много решений. Нас устроит любое ненулевое решение.

1)$\lambda = \lambda_1 = -1$

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -1+1 & 0 & 0 \\ 2 & -1+1 & 0 \\ -1 & -1 & 2+1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(Вторую строку разделили на два и прибавили к третьей).

Выпишем уравнения в явном виде:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 3\gamma = 0 \end{cases},$$

$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ -собственный столбец, соответствующий числу $\lambda = -1$.

2)$\lambda = \lambda_2 = 1$

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \alpha = 0 - \beta + \gamma = 0,\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) $\lambda = \lambda_3 = 2$

$$(A - \lambda E) = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \qquad \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha = 0 \\ \beta = -\alpha \\ \gamma - \text{любое} \end{pmatrix} \qquad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1. \end{pmatrix}$$

Выпишем общее решение в матричной форме:

$$X(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем общее решение в координатной форме:

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t \cdot 0 + C_3 e^{2t} \cdot 0 \\ y(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \cdot 0 \\ z(t) = C_1 e^{-t} \cdot 0 + C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-t} \\ y(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^t \\ z(t) = C_2 e^t + C_3 e^{2t} \end{cases}$$

Расчетные задания.

I

Найти общее решение дифференциального уравнения методом понижения порядка.

1. $y'' + \dfrac{2x}{x^2+1} y' = 2x$.
2. $yy'' = y' + y'^2$.
3. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 12x^3$.
4. $yy'' = y'^2 - y'^3$.
5. $xy'' = (1+2x^2)y'$.
6. $y''^2 = y'^2 + 1$.
7. $x\ln x \cdot y'' = y'$.
8. $2yy'' = y^2 + y'^2$.
9. $y''' - \dfrac{1}{x} y'' = 0$.
10. $(y^2 + 2y)y'' = y'^2$.
11. $x^4 y'' + x^3 y' = 4$.
12. $y'^2 + 2yy'' = 0$.
13. $-xy''' + 2y'' = \dfrac{2}{x^2}$.

14. $yy'' + 1 = y'^2$.
15. $xy''' + y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
16. $y'' = y'^2$.
17. $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$.
18. $y'' = \sqrt{1 - y'^2}$.
19. $y'''\mathrm{tg}\, 5x = 5y''$.
20. $y'' = 1 + y'^2$.
21. $x^2y'' + xy' = 1$.
22. $y'' = \sqrt{1 + y'^2}$.
23. $x^3y''' + x^2y' = 1$.
24. $y'' = y'(1 + y')$.
25. $y'''\mathrm{tg}\, x = y'' + 1$.
26. $yy'' = y'^2$.
27. $xy''' - y'' + \dfrac{1}{x} = 0$.
28. $yy'' + y'^2 = 0$.
29. $\mathrm{tg}\, x \cdot y''' = 2y''$.
30. $2yy'' = 1 + y'^2$.

II

а) Найти решение задачи Коши методом неопределенных коэффициентов.
б) Найти общее решение методом Лагранжа.

1. а) $y''' + 2y'' + y' = x^2 + e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2.$ б) $y'' + \pi^2 y = \dfrac{\pi^2}{\cos \pi x}$
2. а) $y''' - 2y'' + y' = 4x^2 - e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$ б) $y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$
3. а) $y''' - 4y'' = x^2 + 2e^{x}$, $y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 0$ б) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$
4. а) $y''' + 4y' = -x^2 + e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 0.$ б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{x}}{1 - e^{-x}}$
5. а) $y''' - 4y' = x^2 + e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2.$ б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$
6. а) $y''' + y' = 2x + 1 + e^{x}$, $y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$ б) $y'' + y = 2\mathrm{ctg}\, x.$
7. а) $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 - 2e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 0.$ б) $y'' + y' = \dfrac{e^{x}}{2 + e^{x}}.$
8. а) $y''' - y'' = 2x^2 + e^{-x}$, $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 4.$ б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\cos 2x}.$
9. а) $y''' - 2y'' + y' = e^{x}\cos x$, $y(0) = 3, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$ б) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{x}}.$

10. а) $y''' + 4y'' + 4y' = x^2 + 2e^x$ б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{2 + e^{-x}}$.
$y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 0.$

11. а) $y'''' - 6y''' + 9y'' = 54x + 18$ б) $y'' + 4y = \dfrac{4}{\sin 2x}$.
$y(-1) = y'(-1) = y''(-1) = 0.$
$y'''(-1) = 6.$

12. а) $y''' - 3y' = 3(2 - x^2)$ б) $y'' + \dfrac{1}{4}y = \dfrac{1}{4}\mathrm{ctg}\,\dfrac{x}{2}$.
$y(0) = 1, y''(0) = 1, y''(0) = 1.$

13. а) $y''' + 6y'' + 9y' = 1 - x^2 + 4e^x$ б) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\cos 4x}$.
$y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

14. а) $y''' - 5y'' + 6y' = x^2 + x + 4e^x$ б) $y'' - 2y' = \dfrac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.
$y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 0.$

15. а) $y''' - 3y'' + 2y' = x^2 + x - e^{-x}$ б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$.
$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2.$

16. а) $y''' + y'' - 2y' = x^2 + x + e^{2x}$ б) $y'' + 16y = \dfrac{16}{\sin 4x}$.
$y(0) = -4, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

17. а) $y''' - 2y'' + y' = 4(\sin x + \cos x)$ б) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$.
$y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -1.$

18. а) $y''' + 2y'' - 3y' = x - x^2 + e^{2x}$ б) $y'' + 4y = 4\mathrm{ctg}\,2x$.
$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 4.$

19. а) $y''' + 2y'' - 3y' = x^2 + e^{-x}$ б) $y'' - y' = \dfrac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$.
$y(0) = -2, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

20. а) $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + 1 - e^{-x}$ б) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\cos 3x}$.
$y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

21. а) $y'''' + y'' = 2\cos x$ б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{2 + e^{-2x}}$. ->
$y(0) = -2, y'(0) = 1,$
$y''(0) = y'''(0) = 0.$

22. а) $y''' - y' = e^x - e^{-x}$ б) $y'' + 9y = 9\mathrm{ctg}\,3x$.
$y(0) = 6, y'(0) = 1, y''(0) = 1.$

23. а) $y''' + y'' - 6y' = -2x^2 + 4e^x$ б) $y'' + y = 4\mathrm{ctg}\,x$.
$y(0) = 4, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

24. а) $y''' - y'' - 6y' = 2x^2 - 4e^{-x}$ б) $y'' + 9y = \dfrac{9}{\sin 3x}$
$y(0) = 0, y'(0) = 4, y''(0) = 0.$

25. а) $y''' + y' = 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ б) $y'' + 6y' + 8y = \dfrac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}}$.
$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 1.$

26. а) $y'''' + 4y'' = 96x^2$ б) $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}$.
$y(2) = y'(2) = 0, y''(2) = 84.$
$y'''(2) = 96.$

27. а) $y''' - 2y'' + y' = 4$ б) $y'' + \dfrac{y}{\pi^2} = \dfrac{1}{\pi^2 \cos\frac{x}{\pi}}$.

$y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = -2.$

28. а) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 5$ б) $y'' + 4y = 8\operatorname{ctg} 2x$.

$y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = -8.$

29. а) $y''' + 2y'' + 2y' + y = x$ б) $y'' - 9y' + 18y = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}}$.

$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0.$

30. а) $y''' - y'' - y' + y =$ б) $y'' - 6y' + 8y = \dfrac{4}{1 + e^{-2x}}$.

$= (24x - 1)e^x + 3x.$

$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0.$