ТИПОВОЙ РАСЧЕТ "КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ"

Методические указания

I. В первом задании предлагается изменить порядок интегрирования, нарисовать область интегрирования и вычислить двойной интеграл. Рассмотрим типовую задачу.

Задача 1.

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xdy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy.$$

Решение . Прежде всего нарисуем область, по которой ведется интегрирование (рис.1). А теперь можно изменить порядок интегрирования:

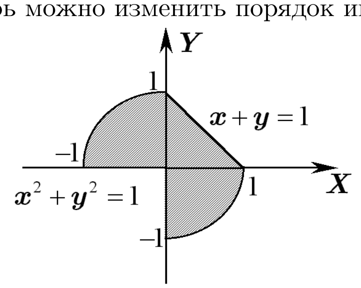

Рис. 1

$$I = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} xdx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} xdx.$$

Остается только вычислить этот двойной интеграл разными способами и сравнить результат:

а)

$$I = \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xdy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy.$$

$$I_{1BH} = \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} xdy = xy\Big|_{0}^{\sqrt{1-x^2}} = x\sqrt{1-x^2}$$

$$I_{2BH} = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} xdy = xy\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} = x(1-x) + x\sqrt{1-x^2}$$

$$I=\int_{-1}^{0}x\sqrt{1-x^2}dx+\int_0^1\left[x(1-x)+x\sqrt{1-x^2}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\bigg|_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]\bigg|_0^1=\frac{1}{6}.$$

б)

$$I=\int_{-1}^{0}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}xdx+\int_0^1dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}xdx$$

$$I_{1BH}=\int_0^{\sqrt{1-y^2}}xdx=\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{1-y^2}}=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}$$

$$I_{2BH}=\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}xdx=\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}=\frac{(1-y)^2}{2}-\frac{1-y^2}{2}=y^2-y$$

$$I=\int_0^1(y^2-y)dy+\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)dy=\frac{1}{6}.$$

II. Во втором задании требуется вычислить объем тела, ограниченного указанными поверхностями, с помощью тройного интеграла. При вычислении тройного интеграла следует перейти к цилиндрическим или сферическим координатам.

Прежде всего следует выполнить рисунок тела T, ограниченного заданными поверхностями, и принять во внимание, что объем данного тела T выражается через тройной интеграл следующим образом:

$$V_T=\iiint\limits_T dxdydz.$$

Для упрощения вычислений рекомендуется перейти к цилиндрическим или сферическим координатам.

а) Цилиндрические координаты $(r,\varphi,z):\ x=r\cos\varphi$,
$y=r\sin\varphi,\ z=z,\ r\geq 0,\ \ \varphi\in[0,2\pi],\ -\infty<z<+\infty$ (рис.2). Якобиан преобразования $I(r,\varphi,z)=\pm r$.

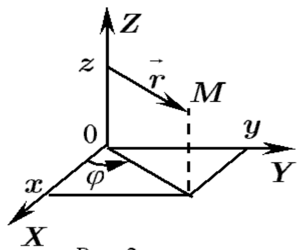

Рис. 2

б) Сферические координаты (r, θ, ψ) (рис.3): $x = r\sin\theta\cos\psi,\ y = rsin\theta\sin\varphi,$ $z = r\cos\theta,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \psi < 2\pi,\ r \geq 0,\ I(r, \theta, \psi) = \pm r^2 sin\theta.$

Если осуществляется переход к цилиндрическим или сферическим координатам, то имеет место такое правило замены переменных в тройных интегралах:

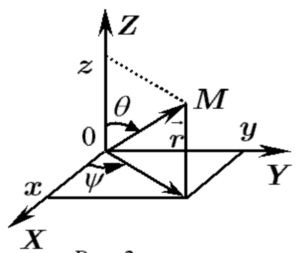

Рис. 3

а)

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_T f[rcos\varphi, rsin\varphi, z] \cdot |I(r, \varphi, z)|drd\varphi dz$$

или, соответственно,

б)

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_T f[rsin\theta cos\psi, rsin\theta sin\psi, rcos\theta] \cdot |I(r, \theta, \psi)|drd\theta d\psi,$$

причем ясно, что $|I(r, \varphi, z)| = r, |I(r, \theta, \psi)| = r^2 sin\theta.$

Пределы интегрирования расставляют, исходя из конкретного вида данного тела Т и принимая во внимание то, каким образом проходят через тело Т координатные линии.

Задача 2. . Вычислить объем V тела T, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)},\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$

Решение. Прежде всего нарисуем данное тело (рис.4).Оно ограничено с боков верхними чашами конусов $z^2 = x^2 + y^2,\ z^2 = 3(x^2 + y^2),$ а сверху -

полусферой $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

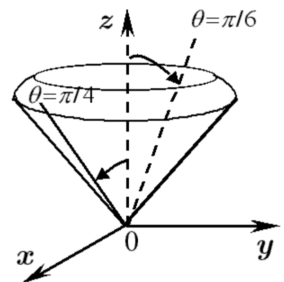

Рис. 4

Найдем уравнения данных поверхностей в сферических координатах:
1. Конус $z = \sqrt{x^2 + y^2}$: $rcos\theta = r|sin\theta| \Rightarrow \theta = \pi/4$ - уравнение конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ в сферических координатах.

2. Конус $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ в сферических координатах имеет уравнение $\theta = \pi/6$.

3. Сфера $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ в сферических координатах имеет уравнение $r = 2$.

Остается вычислить интеграл

$$V_T = \iiint\limits_T dxdydz = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\theta \int_0^2 r^2 sin\theta dr$$

$$I_{1BH} = \int_0^2 r^2 sin\theta dr = sin\theta \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{8}{3} sin\theta$$

$$I_{2BH} = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{8}{3} sin\theta d\theta = \frac{8}{3}(-cos\theta)\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{8}{3}\left[-\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot 4}{3}$$

$$V_T = \int_0^{2\pi} \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot 4}{3} d\psi = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

III. В третьем задании требуется доказать, что данное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x, y)$, и найти ее с помощью криволинейного интеграла.

Напомним, что для того, чтобы криволинейный интеграл по кривой K $\int\limits_K P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не зависел от пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке в некоторой области S плоскости xOy, в которой лежит кривая K, выполнялось условие

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}.$$

В этом случае под знаком интеграла стоит полный дифференциал некоторой функции $\Phi(x,y)$, то есть $d\Phi = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, причем функцию $\Phi(x,y)$ можно найти, вычислив криволинейный интеграл от точки $A(a,b)$ до точки $M(x,y)$ по любой кривой, соединяющей эти точки, лишь бы только на этой кривой не нарушались условия теоремы существования и единственности криволинейного интеграла второго рода.

Задача 3. Доказать, что выражение

$$\frac{ydx}{\sqrt{1-(x-1)^2y^2}} + \frac{(x-1)dy}{\sqrt{1-(x-1)^2y^2}}$$

является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x,y)$, и найти ее с помощью криволинейного интеграла.

Решение. . Обозначим

$$P(x,y) = \frac{y}{\sqrt{1-(x-1)^2y^2}},$$

$$Q(x,y) = \frac{x-1}{\sqrt{1-(x-1)^2y^2}}.$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{[1-(x-1)^2y^2]^{3/2}}.$$

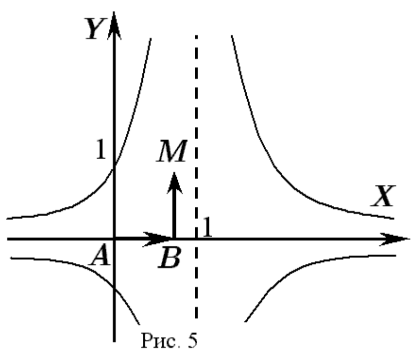

Рис. 5

Для отыскания функции $\Phi(x,y)$, дифференциал которой нам известен, вычислим

$$\int\limits_{A(a,b)}^{M(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Путь интегрирования, то есть кривая, соединяющая точки A и M, должна быть такой, чтобы на ней подынтегральная функция существовала и не претерпевала разрыва, то есть должно быть

$$1-(x-1)^2y^2 > 0 \Longleftrightarrow [1-(x-1)\cdot y]\cdot[1+(x-1)\cdot y] > 0.$$

Таким образом, ясно, что на кривых $(x-1)\cdot y = \pm 1$ подынтегральная функция претерпевает разрыв. Поэтому возьмем в качестве пути интегрирования ломаную линию $ABM(A(0,0), B(x,0), M(x,y))$ (рис.5).

$$\Phi(x,y)=\int\limits_{ABM}\frac{ydx}{\sqrt{1-(1-x)^2y^2}}+\frac{(x-1)dy}{\sqrt{1-(1-x)^2y^2}}$$

на AB : $y=0$, $dy=0$, $x\in[0,x]$; на BM : $x=const$, $dx=0$, $y\in[0,y]$. Тогда, сводя криволинейный интеграл к определенному, получаем

$$\Phi(x,y)=\int_0^y\frac{(x-1)dy}{\sqrt{1-(x-1)^2y^2}}=arcsin(x-1)\cdot y\Big|_0^y=arcsin(x-1)\cdot y.$$

Ответ : $\Phi(x,y)=arcsin(x-1)\cdot y+C.$

IV. В четвертом задании требуется вычислить поток векторного поля $\vec{a}=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$ из тела T, ограниченного указанными поверхностями, с помощью поверхностного интеграла первого и второго рода. Результат проверить с помощью теоремы Гаусса-Остроградского.

Напомним, что поток векторного поля $\vec{a}=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$ из тела T наружу, в силу определения, вычисляется с помощью поверхностного интеграла 1-го рода так:

$$\Pi=\iint\limits_{S_T}a_ndS,$$

где S_T - поверхность тела T, a_n - проекция вектора $\vec{a}$ на нормаль к наружной стороне поверхности тела T. Если тело T ограничено поверхностью, уравнение которой $F(x,y,z)=0$, то, как известно, нормаль к поверхности тела

$$\vec{n}=\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}.$$

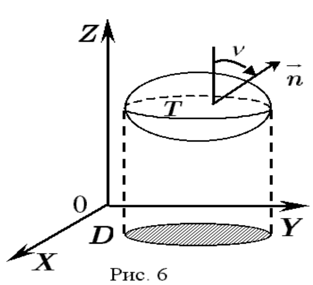

Рис. 6

Если поверхность задана явным уравнением $z=f(x,y)$,
то, обозначив

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=p(x,y),$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=q(x,y),$$

получим $\vec{n}=-p(x,y)\vec{i}-q(x,y)\vec{j}+\vec{k}.$

Можно рассмотреть два единичных вектора, соответствующих данной нормали $\vec{n}$, которые имеют противоположные направления:

$$\vec{n}^0=\frac{-p(x,y)\vec{i}-q(x,y)\vec{j}+\vec{k}}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}$$

и

$$\vec{n}^{0\prime} = -\vec{n}^0.$$

Ясно, что первый вектор $\vec{n}^0$ образует острый угол с осью Oz, то есть соответствует верхней стороне поверхности тела T, а вектор $\vec{n}^{0\prime}$ соответствует нижней стороне поверхности тела T (рис.6).

Если обозначить через λ, μ, ν углы, которые нормаль к поверхности образует с координатными осями, то тогда для верхней стороны поверхности будет:

$$cos\lambda = \frac{-p(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}},$$

$$cos\mu = \frac{-q(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}},$$

$$cos\nu = \frac{1}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}.$$

Соответственно для нижней поверхности

$$cos\lambda = \frac{p(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}},$$

$$cos\mu = \frac{q(x,y)}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}},$$

$$cos\nu = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}}.$$

Если выполнены условия теоремы существования поверхностного интеграла первого рода, то остается выразить его через двойной интеграл по области D, являющейся проекцией тела T на плоскость xOy, а именно учесть, что

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dS = \iint\limits_D \Phi[x,y,f(x,y)]\sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}dxdy.$$

Напомним, что для верхней стороны поверхности

$$a_n = np_{\vec{n}}\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{n}^0 = a_x\left(\frac{-p(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) +$$

$$+a_y\left(\frac{-q(x,y)}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \frac{a_z}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Нетрудно написать аналогичное выражение и для нижней стороны поверхности.

Примем теперь во внимание формулу, устанавливающую связь между поверхностными интегралами первого и второго рода:

$$\iint\limits_S [a_x cos\lambda + a_y cos\mu + a_z cos\nu]ds = \iint\limits_S a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy,$$

причем здесь через λ, μ, ν обозначены углы нормали к поверхности, соответствующей той стороне поверхности, по которой ведется интегрирование в поверхностном интеграле второго рода, стоящем в правой части равенства.

Напомним, что если выполнены условия теоремы существования поверхностного интеграла второго рода, то он выражается через двойной интеграл по области D следующим образом:

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dxdy = \iint\limits_D \Phi[x,y,f(x,y)]dxdy,$$

(верхняя сторона)

$$\iint\limits_S \Phi(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_D \Phi[x,y,f(x,y)]dxdy$$

(нижняя сторона)

Наконец, поток векторного поля можно вычислить в силу теоремы Гаусса-Остроградского так:

$$\iiint\limits_T \left[\frac{\partial a_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial a_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial a_z(x,y,z)}{\partial z}\right] dxdydz.$$

Решим типовую задачу.

Задача 4. Вычислить поток вектора $\vec{a} = \vec{i} + 3z\vec{k}$ из тела T, ограниченного поверхностями $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ x = 0,\ z = 0$ (рис.7), $(x \geq 0)$.

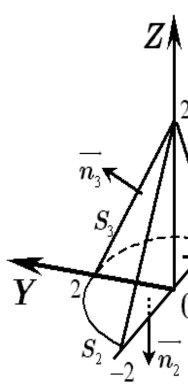

Рис. 7

Решение . Данное тело ограничено тремя поверхностями $S_1:\ x = 0$ ($\vec{n}_1 = -\vec{i}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности $S_1, a_n = -1$), $S_2:\ z = 0$ ($\vec{n}_2 = -\vec{k}$ - соответственно единичный вектор внешней нормали к поверхности S_2, $a_n = -3z$), S_3 - часть конуса $z = 2 - \sqrt{x^2+y^2}$.

Вычислим

$$p(x,y) = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$q(x,y) = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$dS = \sqrt{1+p^2(x,y)+q^2(x,y)}dxdy = \sqrt{2}dxdy.$$

Нормаль $\vec{n}_3$ образует острый угол с осью Oz, то есть соответствует верхней стороне поверхности S_3, следовательно,

$$cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\ cos\mu = \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}},\ cos\nu = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$a_n = \frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3z}{\sqrt{2}}.$$

Вычислим теперь поток Π вектора $\vec{a}$ из тела T. Ясно, что он равен сумме

трех потоков, то есть $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$, где Π_1 - поток через поверхность S_1, Π_2 - поток через поверхность S_2, Π_3 - поток через поверхность S_3.

Итак,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} a_n dS = \iint\limits_{S_1} (-1)dydz = -\int_0^2 dz \int_{z-2}^{2-z} dy = -4;$$

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} a_{n_2} dS = -\iint\limits_{S_2} 3zdxdy = 0,$$

так как на поверхности S_2 $z=0$;

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} [a_x cos\lambda + a_y cos\mu + a_z cos\nu]dS =$$

$$= \iint\limits_{S_3} \left[\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3z}{\sqrt{2}}\right] dS =$$

(поверхностный интеграл)

$$= \iint\limits_{D} \left[\frac{x}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{3(2-\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{2}}\right] \sqrt{2}dxdy =$$

(двойной интеграл)

$$= \iint\limits_{D} \frac{x + 6\sqrt{x^2+y^2} - 3(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy.$$

Для вычисления двойного интеграла перейдем к полярным координатам

$$x = rcos\varphi,\ y = rsin\varphi,\ |I(r,\varphi)| = r$$

Получим:

$$\Pi_3 = \iint\limits_D \frac{rcos\varphi + 6r - 3r^2}{r} \cdot rdrd\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (rcos\varphi + 6r - 3r^2)dr;$$

$$I_{BH.} = \int_0^2 [r(cos\varphi + 6) - 3r^2]dr = [(cos\varphi + 6)\frac{r^2}{2} - r^3]\Bigg|_0^2 = 2cos\varphi + 4;$$

$$\Pi_3 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2cos\varphi + 4)d\varphi = 2sin\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + 4\varphi\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 4 + 4\pi.$$

Окончательно: $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = -4 + 0 + 4 + 4\pi = 4\pi$.

Вычислим теперь поток векторного поля $\vec{a}$ с помощью поверхностного интеграла второго рода:

$$\Pi = \iint\limits_S a_x(x,y,z)dydz + a_y(x,y,z)dzdx + a_z(x,y,z)dxdy.$$

По-прежнему $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3$,

$$\Pi_1 = \iint\limits_{S_1} 1dydz + 0 \cdot dzdx + 3zdxdy = \iint\limits_{S_1} dydz = -4$$

(нижняя сторона) (двойной интеграл)
(на $S_1:\ x = 0,\ dx = 0$),

$$\Pi_2 = \iint\limits_{S_2} 1dydz + 0 \cdot dzdx + 3zdxdy = 0$$

(нижняя сторона)
(на$S_2:\ z = 0,\ dz = 0$),

$$\Pi_3 = \iint\limits_{S_3} 1dydz + 0 \cdot dzdx + 3zdxdy =$$

(верхняя сторона)
(на $S_3 : z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$= \iint\limits_{S_1} dydz + 3\iint\limits_D (2 - \sqrt{x^2 + y^2})dxdy =$$

(двойной интеграл)

$$= 4 + 3\iint\limits_D (2-r)rdrd\varphi = 4 + 3\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 (2r - r^2)dr = 4 + 4\pi.$$

Окончательно, $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 = 4\pi$.

Проверим по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\Pi = \iiint\limits_T \left[\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right] dxdydz = 3\iiint\limits_T dxdydz = 4\pi$$

Ответ: поток векторного поля $\Pi = 4\pi$.

V. В пятом задании требуется найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$ по замкнутому контуру l, получающемуся при пересечении плоскости α с координатными плоскостями, разными способами.

1. Непосредственно:

а) с помощью криволинейного интеграла первого рода,

б) с помощью криволинейного интеграла второго рода.

2. С помощью теоремы Стокса:

а) выразив поток вихря векторного поля через поверхностный интеграл первого рода,

б) выразив поток вихря векторного поля через поверхностный интеграл второго рода.

Напомним, что циркуляцией Ц векторного поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру l называется криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_l a_\tau dS$$

(часто называемый линейным интегралом поля) вдоль указанной замкнутой кривой l. Здесь dS - дифференциал дуги кривой, $a_\tau = np_\tau \vec{a}$ - проекция векторного поля $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{\tau}$ - касательного к кривой l. Пусть этот касательный вектор образует с координатными осями Ox, Oy, Oz углы α, β и γ соответственно. Тогда $a_\tau = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma$. Поэтому для выполнения задания 1 имеем следующее выражение для циркуляции через криволинейный интеграл первого рода:

$$\text{Ц} = \int\limits_l [a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma] dS.$$

Принимая во внимание связь между криволинейными интегралами первого и второго рода, получим выражение для циркуляции через интеграл второго рода:

$$\text{Ц} = \int\limits_l a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Чтобы выполнить задание 2, следует вспомнить формулу Стокса, связывающую циркуляцию поля $\vec{a}$ по замкнутому контуру l с поверхностным интегралом от ротора векторного поля $rot\ \vec{a}$ по поверхности σ, ограничиваемой контуром l:

$$\oint\limits_l a_\tau ds = \iint\limits_\sigma (rot\ \vec{a})_n d\sigma.$$

Здесь $d\sigma$ - дифференциал площади поверхности σ;

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix};$$

$(rot\ \vec{a})_n-$ проекция поля $rot\ \vec{a}$ на направление нормали $\vec{n}$ к поверхности σ, согласованной с направлением обхода контура l следующим образом:

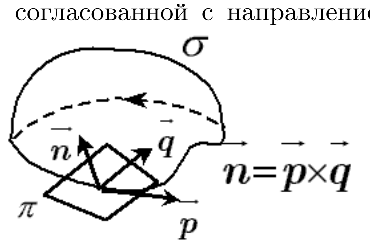

Рис. 8

наблюдатель обходит контур l в таком направлении, чтобы нормаль $\vec{n}$, фигурирующая в правой части формулы Стокса, проходила в направлении от ног к голове наблюдателя, а поверхность σ при обходе контура l оставалась бы слева от наблюдателя. π - касательная плоскость (рис.8).

Нетрудно видеть, что формула Стокса позволяет вычислять циркуляцию поля $\vec{a}$ через интеграл первого рода по поверхности σ:

$$\text{Ц} = \iint\limits_\sigma (rot\ \vec{a})_n d\sigma = \iint\limits_\sigma [(rot\ \vec{a})_x \cos\lambda + (rot\ \vec{a})_y \cos\mu + (rot\ \vec{a})_z \cos\nu] d\sigma,$$

где $\cos\lambda,\ \cos\mu,\ \cos\nu$ - направляющие косинусы вектора нормали $\vec{n}$ к поверхности σ. Учитывая связь между поверхностными интегралами первого и второго рода, можно получить и выражение для циркуляции через интеграл второго рода по поверхности σ:

$$\text{Ц} = \iint\limits_\sigma (rot\ \vec{a})_x dydz + (rot\ \vec{a})_y dxdz + (rot\ \vec{a})_z dxdy.$$

Решим типовую задачу.

Задача 5. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + zx\vec{k}$ по замкнутому контуру l, получающемуся при пересечении плоскости α, заданной уравнением $2x+3y+z=6$ с координатными плоскостями (считать $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$).

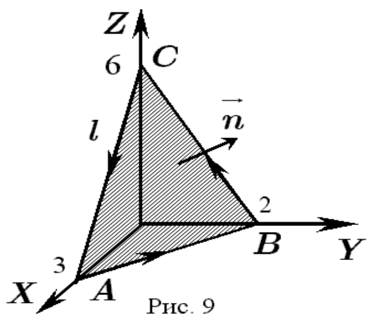

Рис. 9

Решение . Нарисуем контур l. Для этого заметим, что уравнение плоскости $\alpha:\ 2x+3y+z=6$ может быть преобразовано к виду

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{6}=1,$$

называемому уравнением плоскости в отрезках на осях. Числа 3;2;6 дают, соответственно, длины отрезков, отсекаемых плоскостью α на осях $Ox,\ Oy,\ Oz$ (все эти числа положительны, следовательно, все точки пересечения плоскости α с координатными осями лежат в I октанте $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$). Указанные точки пересечения имеют следующие координаты: $A(3;0;0); B(0;2;0); C(0;0;6)$.

В результате получаем, что контур l - это граница треугольника ABC. Положительным будем считать направление обхода, согласованное с нормалью $\vec{n}$ к плоскости α, направленной от начала координат (рис.9). Это направление обхода на рисунке изображено стрелками и дает замкнутую кривую интегрирования l в виде ориентированной ломаной линии ABCA.

Вычислим теперь циркуляцию вектора $\vec{a}$ по контуру l через криволинейный интеграл первого рода. Учитывая, что по условию $a_x = x,\ a_y = 1,\ a_z = zx$, имеем

$$\text{Ц} = \int_{ABCA} [x\cos\alpha + \cos\beta + zx\cos\gamma]dS.$$

С учетом свойства аддитивности по контуру криволинейного интеграла первого рода имеем:

$$\text{Ц} = \left\{ \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right\} [x\cos\alpha + \cos\beta + zx\cos\gamma]dS.$$

Вычислим отдельно каждый из трех полученных интегралов.

Итак,

$$I_1 = \int_{AB} [x\cos\alpha + \cos\beta + zx\cos\gamma]dS -$$

это интеграл вдоль отрезка AB, касательный вектор к которому $\vec{\tau}$, очевидно, можно взять просто равным вектору $\vec{AB} = (-3;2;0)$ (касательный вектор постоянен, так как AB – это отрезок прямой). Направляющие косинусы этого вектора, очевидно, совпадают с искомыми $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, то есть

$$\cos\alpha = \frac{-3}{\sqrt{(-3)^2+2^2}} = -\frac{3}{\sqrt{13}};\ \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{13}};\ \cos\gamma = \frac{0}{\sqrt{13}} = 0.$$

Чтобы вычислить дифференциал дуги dS, напишем параметрические уравнения линии AB (как отрезка прямой с направляющим вектором $\vec{\tau} = \vec{AB}$ и проходящей через точку $A(3;0;0)$):

$$\begin{cases} x(t) &= & 3-3t \\ y(t) &= & 0+2t \\ z(t) &= & 0 \end{cases},$$

где $t \in [0;1]$.

Учитывая параметрическое представление линии AB и формулу для вычисления dS, получаем:

$$dS = \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}dt = \sqrt{13}dt.$$

Подставляя полученные результаты в равенство для I_1, имеем следующее выражение криволинейного интеграла первого рода I_1 через определенный интеграл:

$$I_1 = \int_0^1 \left\{(3-3t)(-\frac{3}{\sqrt{13}}) + \frac{2}{\sqrt{13}} + 0(3-3t)\cdot 0\right\}\sqrt{13}dt =$$

$$= \int_0^1 (-9+9t+2)dt = \left(-7t+\frac{9t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = -7+\frac{9}{2} = -\frac{5}{2} = -2,5.$$

Аналогично для $I_2 = \int_{BC}[x\cos\alpha + \cos\beta + zx\cos\gamma]dS$ имеем $\vec{\tau} = \vec{BC} = (0;-2;6); \cos\alpha = 0;\ \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{40}};\ \cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{40}}$. Параметрическое представление отрезка BC:

$$\begin{cases} x(t) &= & 0 \\ y(t) &= & 2-2t \\ z(t) &= & 0+6t \end{cases},$$

$t \in [0;1]$, а выражение для dS имеет вид: $dS = \sqrt{40}dt$. Поэтому

$$I_2 = \int_0^1 \left\{0\cdot 0 - \frac{2}{\sqrt{40}} + 6t\cdot 0\frac{6}{\sqrt{40}}\right\}\sqrt{40}dt =$$

$$= \int_0^1 (-2)dt = -2t\Big|_0^1 = -2.$$

Для $I_3 = \int_{CA}[x\cos\alpha + \cos\beta + zx\cos\gamma]dS$ получаем: $\vec{\tau} = \vec{CA} = (3; 0; -6); \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{45}};\ \cos\beta = 0;\ \cos\gamma = \frac{-6}{\sqrt{45}}$. Параметрическое представление отрезка CA имеет вид

$$\begin{cases} x(t) &= 0 + 3t \\ y(t) &= 0 \\ z(t) &= 6 - 6t \end{cases},$$

$t \in [0; 1]$, а выражение для dS: $dS = \sqrt{45}dt$. В результате имеем:

$$I_3 = \int_0^1 \left\{3t\frac{3}{\sqrt{45}} + 0 + (6-6t)3t\frac{-6}{\sqrt{45}}\right\}\sqrt{45}dt =$$

$$= \int_0^1 (9t - 108t + 108t^2)dt = -\left(\frac{99}{2}t^2 + \frac{108}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = -13,5.$$

Получаем окончательное выражение для циркуляции: Ц$=I_1 + I_2 + I_3 =$ $= -2,5 - 2 - 13,5 = -18$.

Вычислим теперь циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ с помощью криволинейного интеграла второго рода:

$$\text{Ц} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{ABCA} xdx + dy + zxdz.$$

Пользуясь аддитивностью по контуру криволинейного интеграла второго рода, получаем:

$$\text{Ц} = \left\{\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA}\right\}[xdx + dy + zxdz].$$

Разбив, как и в предыдущем задании, правую часть данного соотношения на три слагаемых, вычислим их по отдельности.

$J_1 = \int_{AB} xdx + dy + zxdz$ - интеграл вдоль отрезка AB, параметрическое представление которого получено ранее:

$$\begin{cases} x(t) &= 3 - 3t \\ y(t) &= 2t \\ z(t) &= 0 \end{cases},$$

$t \in [0; 1]$.

Тогда $dx = -3dt;\ dy = 2dt;\ dz = 0$. Подставляя эти результаты в равенство для J_1, имеем следующее выражение для криволинейного интеграла второго рода через обычный определенный интеграл:

$$J_1 = \int_0^1 \{(3-3t)(-3) + 2 + 0 \cdot (3-3t) \cdot 0\}dt =$$

$$= \int_0^1 (-7 + 9t)dt = I_1 = -2,5.$$

Аналогично, $J_2 = \int_{BC} xdx + dy + zxdz$. Получаем, учитывая параметрическое представление отрезка BC:

$$\begin{cases} x(t) & = & 0 \\ y(t) & = & 2-2t \\ z(t) & = & 6t \end{cases},$$

$t \in [0;1]$;
$dx = 0,\ dy = -2dt,\ dz = 6dt$. Поэтому

$$J_2 = \int_0^1 \{0 \cdot 0 - 2 + 6t \cdot 0 \cdot 6\} dt = \int_0^1 (-2)dt = I_2 = -2.$$

Для $J_3 = \int_{CA} xdx + dy + zxdz$ с учетом параметрического представления отрезка CA

$$\begin{cases} x(t) & = & 3t \\ y(t) & = & 0 \\ z(t) & = & 6-6t \end{cases},$$

где $t \in [0;1]$; получаем $dx = 3dt,\ dy = 0,\ dz = -6dt$. В результате имеем:

$$J_3 = \int_0^1 3t \cdot 3 + 0 + (6-6t)3t(-6)dt = I_3 = -13,5.$$

Окончательно, Ц$=I_1 + I_2 + I_3 = -18$.

Проверим циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ с помощью формулы Стокса. Вначале вычислим $rot\ \vec{a}$:

$$rot\ \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 1 & xz \end{vmatrix} = \vec{i}\left\{\frac{\partial(zx)}{\partial y} - \frac{\partial(1)}{\partial z}\right\} -$$

$$-\vec{j}\left\{\frac{\partial(zx)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial z}\right\} + \vec{k}\left\{\frac{\partial(1)}{\partial x} - \frac{\partial(x)}{\partial y}\right\} = 0\vec{i} - z\vec{j} + 0\vec{k}.$$

Тогда

$$\text{Ц} = \iint\limits_{\sigma} [0 \cdot \cos\lambda - z\cos\mu - 0 \cdot \cos\nu] d\sigma -$$

выражение для циркуляции через поверхностный интеграл первого рода (здесь в качестве поверхности σ выбран треугольник ABC, ограниченный контуром l - ломаной ABCA).

Итак, Ц$=\iint\limits_{\sigma}(-z\cos\mu)d\sigma$. Вычислим $\cos\mu$. Для этого заметим, что нормалью к поверхности σ (части плоскости $\alpha : 2x + 3y + z = 6$) может служить вектор $\vec{n} = (2;3;1)$. Отметим, что поскольку поверхность σ - часть плоскости, то $\vec{n}$ постоянен. Направляющие косинусы $\vec{n}$, очевидно, равны:

$$\cos\lambda = \frac{2}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}};\ \cos\mu = \frac{3}{\sqrt{14}};\ \cos\nu = \frac{1}{\sqrt{14}}.$$

(направление вектора $\vec{n}$ совпадает с направлением нормали, согласованной с направлением обхода контура l). Поэтому Ц$=\iint\limits_{\sigma}(-z\frac{3}{\sqrt{14}})d\sigma$.

Для вычисления интеграла в правой части воспользуемся выражением поверхностного интеграла через двойной (например, по области D_{xz} - проекции поверхности σ (то есть ΔABC) на плоскость xOz):

$$\text{Ц} = \iint\limits_{D_{xz}} \left(-z\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}dxdz.$$

Отметим, что поверхность при этом должна быть описана уравнением, разрешенным относительно переменной $y:\ \ y = y(x,z)$. В нашем случае указанное уравнение имеет вид:

$$y = \frac{6-2x-z}{3}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2}{3};\quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{1}{3}.$$

Вследствие этого

$$\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{3}.$$

Следовательно, циркуляция поля имеет вид:

$$\text{Ц} = \iint\limits_{D_{xz}} \left(-z\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}\right)\frac{\sqrt{14}}{3}dxdz = -\iint\limits_{D_{xz}} zdxdz.$$

Область интегрирования D_{xz} - это треугольник AOC.

Уравнение прямой имеет вид: $2x+z=6$ или $x = 3-\frac{z}{2}$. Используя этот факт, а также метод сведения двойного интеграла к повторному, получаем:

$$\text{Ц} = \iint\limits_{D_{xz}} zdxdz = -\int_0^6 dz\int_0^{3-\frac{z}{2}} zdx = -\int_0^6 dz(zx)\Big|_0^{3-\frac{z}{2}} =$$

$$= -\int_0^6\left(3-\frac{z}{2}\right)zdz = \int_0^6\left(-3z+\frac{z^2}{2}\right)dz =$$

$$= \left[-\frac{3z^2}{2}+\frac{z^3}{6}\right]\Big|_0^6 = -18$$

Выполним расчет циркуляции по формуле Стокса, используя при этом поверхностный интеграл второго рода

$$Ц = \iint\limits_{\sigma} [0dydz - zdxdz + 0dxdy] = -\iint\limits_{\sigma} zdxdz.$$

Выражая поверхностный интеграл второго рода через двойной, имеем:

$$Ц = -\iint\limits_{D_{xz}} zdxdz.$$

Здесь использован тот факт, что нормаль $\vec{n}$=(2;3;1) к поверхности σ образует острый угол μ с осью Oy (т.к. $\cos\mu = \frac{3}{\sqrt{14}} > 0$.) Очевидно, что этот интеграл совпадает с соответствующим выражением поверхностного интеграла первого рода $\iint\limits_{\sigma}\left(-z\frac{3}{\sqrt{14}}\right)d\sigma$ через двойной интеграл.

Поэтому Ц=$-\iint\limits_{\sigma} zdxdz = -18$, как и следовало ожидать.

VI. В шестом задании требуется найти экстремаль функционала. Функционалом $\Phi[y(x)]$ называют закон (правило), по которому каждой функции $y(x)$ из некоторого класса сопоставляется единственное число. Например, пусть

$$\Phi[y(x)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 y^2(x)dx.$$

Тогда, если $y(x) = x$, то $\Phi(x) = \int_0^1 x^2dx = 1/3$, если $y(x) = e^x$, то $\Phi[e^x] = \int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}(e^2-1)$, если $y(x) = x^3$, то $\Phi[x^3] = \int_0^1 x^6dx = 1/7$.

Как видим, аргументом функционала является функция, а значением - число.

Нахождение экстремумов функционалов является основной задачей так называемого вариационного исчисления.

Простейшей задачей вариационного исчисления является нахождение экстремумов функционалов вида

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')dx. \tag{1}$$

При этом предполагается, что функция $F(x,y,y\prime)$ имеет непрерывные вторые частные производные по всем аргументам, искомая функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, концы кривой $y = y(x)$ жестко закреплены, то есть $y(a) = y_a = const,\ y(b) = y_b = const$.

Доказано, что для того, чтобы функция $y(x)$ при наложенных ограничениях доставляла экстремум функционалу (1), необходимо, чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера:

$$F_y{}' - \frac{d}{dx}F_{y'}{}' = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка относительно $y(x)$. Всякое дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения Эйлера называется экстремалью. Итак, экстремаль - это кривая, подозрительная на экстремум функционала.

Для функционалов, содержащих вторую производную y'', то есть

$$\Phi[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y', y'')dx,$$

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b,\ y'(a) = y_a{}',\ y'(b) = y_b{}',$$

уравнение Эйлера имеет вид

$$F_y{}' - \frac{d}{dx}F_{y'}{}' + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}{}' = 0.$$

Решим типовую задачу.

Задача 6. Найти экстремали функционала

$$\Phi[y(x)] = \int_{-1}^0 (240y - y''^2)dx,$$

$$y(-1) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(-1) = -20,\ y'(0) = 0.$$

Решение. Составим уравнение Эйлера. Имеем

$$F(x, y, y', y'') = 240y - y''^2,\ F_y{}' = \frac{\partial F}{\partial y} = 240,\ F_{y'}{}' = \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

$$F_{y''}{}' = \frac{\partial F}{\partial y''} = -2y'', \frac{d}{dx}F_{y'}{}' = 0, \frac{d^2}{dx^2}F_{y'\prime}{}' = (-2y'')'' = -2y^{1V}.$$

Уравнение Эйлера $F_y{}' - \frac{d}{dx}F_{y'}{}' + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}{}' = 0$ для нашего функционала имеет вид: $240 - 2y^{1V} = 0$, то есть $y^{1V} = 120$. Интегрируем его: $y''' = 120x + C_1, y'' = 60x^2 + C_1x + C_2$,

$$y' = 20x^3 + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3, y = 5x^4 + \frac{C_1}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4.$$

Произвольные постоянные находим из граничных условий: $y(-1) = 1,\ y(0) = 0,\ y'(-1) = -20,\ y'(0) = 0$. Получаем линейную систему

$$\left.\begin{array}{rcl} 5 - \frac{1}{6}C_1 + \frac{1}{2}C_2 - C_3 + C_4 & = & 1 \\ C_4 & = & 0 \\ -20 + \frac{1}{2}C_1 - C_2 + C_3 & = & 0 \\ C_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Решая ее, находим $C_1 = -48$, $C_2 = -24$, $C_3 = C_4 = 0$. Итак, искомая экстремаль имеет вид: $y(x) = 5x^4 - 8x^3 - 12x^2$.
Ответ: $y(x) = 5x^4 - 8x^3 - 12x^2$.