Билеты для подготовки к экзамену по математике
Преподаватель: Норин Александр Владимирович
Подготовил и оформил: Трофимов Владислав

Оглавление

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов 2
Интегрирование методом замены переменной и по частям 3
Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители 3
Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональных функций 4
Интегралы от иррациональных функций. Подстановки Эйлера 5
Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка 5
Интегральные суммы Дарбу и Римана. Необходимое и достаточное условие существование интеграла Римана 6
Свойства интеграла Римана 6
Теорема о среднем 7
Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница 8
Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства 8
Абсолютная и условная сходимость 8
Несобственные интегралы второго рода и их свойства 9
Интеграл Эйлера 10
Вычисление площадей в декартовых и полярных координатах 10
Вычисление длины дуг 11
Вычисление объема тела через площади поперечных сечений. Объем тела вращения 11
Пространство $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Сходимость в $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$. Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций 11
Частные производные. Полный дифференциал 12
Производные сложных функций и функции, заданной неявно 13
Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных 13
Производная по направлению. Градиент и его свойства 13
Касательная плоскость и нормаль к поверхности 14
Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции n переменных 15
Необходимые и достаточные условия экстремума функции n переменных 15
Обыкновенные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Задача Коши. Изоклины. 16
Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и с однородной функцией 17
Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли 18
Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель 18
Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 19
Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского и его свойства 19
Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных 20
Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение 20
Линейные неоднородное дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью 21

Первообразная и неопределенный интеграл. Свойства неопределенных интегралов

Основные определения

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$. Нам нужно найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$ на $[a; b]$. Функция $F(x)$ будет называться первообразной от функции $f(x)$ на $[a; b]$ при условии что $F'(x) = f(x)$ во всех точках этого отрезка.

Пример: $f(x) = x^3; F(x) = \frac{x^4}{4}$.

Теорема 1. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные от функции $f(x)$ на $[a; b]$. Тогда $F_1(x) - F_2(x)$ равно некоторому константному значению.

Доказательство. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные, и $F_1'(x) = f(x), F_2'(x) = f(x)$. Тогда $F_1'(x) - F_2'(x) = 0$. Пусть $\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$. Тогда $\varphi'(x) = 0$. Покажем, что $\varphi(x)$ – константа на отрезке $[a; b]$. Рассмотрим отрезок $[a; x]$. По теореме Лагранжа существует такое ξ, принадлежащее промежутку $(a; x)$, что $\varphi(x) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(x - a)$. Но $\varphi'(\xi) = 0$. Следовательно, $\varphi(x) - \varphi(a) = 0$, а значит $\varphi(x) = \varphi(a)$ и равно некоторому константному значению. Доказано.

Следствие. Если найдена первообразная, то все остальные отличаются от нее на константу. $F(x) + c$ – семейство первообразных ($c \in R$) (сдвиг графика первообразной по оси ординат).

Если $(F(x) + c)' = f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + c$ – неопределенный интеграл, где $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция. Действия от нахождения первообразной – неопределенное интегрирование. В отличие от производной, интеграл элементарной функции не является элементарной функцией. Первообразную можно найти не для всех функций.

Свойства неопределенных интегралов

1. $(\int f(x)\,dx)' = (F(x) + c)' = f(x)$.
2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx = dF$.
3. $\int dF(x) = F(x) + c$.
4. Линейность
   a. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
   b. $\int\big(f_1(x) + f_2(x)\big)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

Доказательство b. $(\int(f_1(x) + f_2(x))dx)' = f_1(x) + f_2(x) = (\int f_1(x)dx)' + (\int f_2(x)dx)' = (\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx)'$. По первому свойству равны подынтегральные функции, и, следовательно, сами интегралы.

5. $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$.

Доказательство. $(\int f(ax + b)dx)' = f(ax + b)$. Тогда $\left(\frac{1}{a}F(ax + b) + c\right)' = \frac{1}{a}F_y'(y)(ax + b)' = \frac{1}{a}F'(ax + b) * a = f(ax + b)$.

Следствие. $\int f\left(\frac{x}{a}\right)dx = aF\left(\frac{x}{a}\right) + c$.

Таблица интегралов

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c\,, a\,! = -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$.
3. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$.
4. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$.
6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$.
7. $\int e^x dx = e^x + c$.
8. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$.
9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{atan} x + c$.
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{asin} x + c$.

Первые 10 интегралов являются следствиями из таблицы производных. Остальные выводятся.

11. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c$.

Доказательство. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$. По следствию пятого свойства и девятому интегралу это равно $\frac{a}{a^2}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\operatorname{atan}\frac{x}{a} + c$.

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + c$.

Доказательство. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}$. По следствию пятого свойства и десятому интеграла это равно $\frac{a}{a}\operatorname{asin}\frac{x}{a} + c = \operatorname{asin}\frac{x}{a} + c$.

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$.

Доказательство. $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a-x)(a+x)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$. Следовательно, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x+a} - \int \frac{dx}{x-a}\right) = \frac{1}{2a}(\ln|x+a| - \ln|x-a|) + \mathrm{c} = \frac{1}{2\mathrm{a}}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$.

Интегрирование методом замены переменной и по частям

Интегрирование методом замены переменной

Пусть нужно найти интеграл вида $\int f(x)dx$ и пусть этот интеграл существует. Тогда $x = \varphi(t); dx = \varphi'(t)dt; \int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$. Это называется формулой замены переменной для неопределенного интеграла. Рассмотрим интеграл $\int f(\varphi)d\varphi = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$. Тогда $\int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int f(\varphi)d\varphi = F\big(\varphi(t)\big) + c$.

Пример: $\int \sqrt{\sin x}\cos x\, dx = \int \sqrt{\sin x}\, d(\sin x) = \int u^{1/2}du = \frac{2u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + c$.

$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(-\cos x)}{-\cos x} = -\ln|\cos x| + c$.

$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + c$.

Интегрирование по частям

$d\big(u(x)v(x)\big) = u'(x)v(x)dx + u(x)v'(x)dx = v(x)du + u(x)dv$. Проинтегрируем обе части: $\int u(x)dv = \int d(uv) - \int v(x)du$. Отсюда $\int u(x)dv = uv - \int v(x)du$. Последнее называется формулой интегрирования по частям.

Пример: $\int x\sin x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u=x;\ du=dx \\ dv=\sin x dx;\ v=-\cos x\end{smallmatrix}\right] = -x\cos x + \int \cos x\, dx = -x\cos x + \sin x + c$. Общее правило: $\int P_n(x) \begin{smallmatrix}\sin \alpha x \\ (\cos \alpha x)\end{smallmatrix} dx = \left[\begin{smallmatrix} u=P_n(x) \\ dv=\frac{\sin \alpha x}{(\cos \alpha x)}dx\end{smallmatrix}\right]$.

Пример: $\int xe^x dx = \left[\begin{smallmatrix} u=x;\ du=dx \\ dv=e^x dx;\ v=e^x\end{smallmatrix}\right] = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$. Общее правило: $\int P_n(x)e^{\alpha x}dx = \left[\begin{smallmatrix} u=P_n(x) \\ dv=e^{\alpha x}dx\end{smallmatrix}\right]$.

Пример: $\int x\ln x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx;\ v=\frac{x^2}{2}\end{smallmatrix}\right] = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{xdx}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + c$. Общее правило: $\int P_n(x)\ln x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u=\ln x \\ dv=P_n(x)dx\end{smallmatrix}\right]$.

Задача на доли: $I = \int e^x \sin x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u=e^x;\ du=e^x dx \\ dv=\sin x dx;\ v=-\cos x\end{smallmatrix}\right] = -e^x\cos x + \int e^x \cos x\, dx = \left[\begin{smallmatrix} u=e^x;\ du=e^x dx \\ dv=\cos x dx;\ v=\sin x\end{smallmatrix}\right] = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$. Отсюда $I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + c$.

Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на множители

Пусть дан многочлен $f(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n$, где A_i принадлежит множеству комплексных чисел, то есть многочлен принадлежит множеству значений с комплексными коэффициентами ($f(x) \in C[x]$). Аналогично $f(x) \in R[x]$ – с действительными, $f(x) \in Z[x]$ – с целыми. Корнем $f(x)$ называется такое значение $x = x_0$, при котором $f(x_0)$ обращается в ноль.

Пусть в $C[x]$ или $R[x]$ заданы многочлены $Q(x)$ степени m и $f(x)$ степени n. Пусть $m \geq n$. Тогда существует такие многочлены $q(x)$ степени $m-n$ и $r(x)$ степени $< n$, что $Q(x) = f(x)q(x) + r(x)$.

Теорема 2 (Безу). При делении многочлена $Q(x)$ на двучлен $x-a$ получается остаток, равный $Q(a)$.

Доказательство. $Q(x) = (x-a)q(x) + r(x)$. При подстановке $x = a$ имеем $(a-a)q(a) = 0$, следовательно, $Q(a) = r(a)$.

Следствие: $x = a$ является корнем $Q(x)$, значит остаток от деления равен нулю.

Определение кратности и корня: $Q(x) \vdots f(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $Q(x) = f(x)q(x)$, то есть разделится без остатка. $x = a$ называется корнем многочлена $Q(x)$ тогда и только тогда, когда $Q(x) \vdots (x-a)$. $x = a$ называется корнем кратности $\lambda \in N$ множества $Q(x)$, если $Q(x) \vdots (x-a)^\lambda$, но $Q(x)$ не $\vdots (x-a)^{\lambda+1}$. Можно сказать, что условие $r(x) = 0$ – необходимое и достаточное условие того, что $x = a$ – корень многочлена.

Теорема 3 (Следствие из основной теоремы алгебры). Многочлен степени n имеет ровно n комплексных корней. Пусть $Q(x) \in C[x]$ и $x \in C$, а степень $Q(x)$ равна m, тогда $Q(x) = A_0(x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2} \dots (x-a_n)^{k_n}$, где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – корни $Q(x)$ с учетом кратности, а $k_1, k_2, \dots, k_n$ – кратности этих корней, $\sum_{i=1}^{n} k_i = m$. Для действительных коэффициентов: $Q(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$. Доказательство не требуется, но элементарно выводится применением m раз теоремы Безу.

Теорема 4. Пусть $z = a + ib$ – корень многочлена $Q(x) \in R[x]$. Тогда $\bar{z} = a - ib$ – тоже корень $Q(x)$.

Доказательство. $(\bar{z})^k = \overline{(z^k)}$, так как $\bar{z_1} * \bar{z_2} = \overline{z_1 * z_2}$, следовательно, $A_{m-k}\bar{z}^k = \overline{A_{m-k}z^k}$, а так как $\bar{z_1} + \bar{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$, то $Q(\bar{z}) = \overline{Q(z)}$. Пусть $Q(z) = Q(a+ib) = M + iN = 0$ ($z = ai + b$ – корень), тогда $M = 0; N = 0$. $Q(\bar{z}) = Q(a - ib) = \overline{Q(a+ib)} = M - iN = 0$, тогда $M = 0, N = 0$, а, значит, $\bar{z} = a - ib$ – тоже корень $Q(x)$.

Замечание. Пусть $z = a + ib$ – корень кратности λ многочлена $Q(x) \in R[x]$. Тогда сопряженный ему корень тоже кратности λ.

Теорема 5. Пусть дан многочлен $Q(x) \in R[x]$. Тогда $Q(x)$ можно выразить в виде $Q(x) = A_0(x-x_1)^{\lambda_1}(x-x_2)^{\lambda_2} \dots (x-x_n)^{\lambda_n}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1} \dots \left(x^2+p_\rho x+q_\rho\right)^{\mu_\rho}$, где $x_1, \dots, x_n$ – действительные корни $Q(x)$, а для каждого i выражение $x^2 + p_ix + q_i$ не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней $Q(x)$.

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_n$ – действительные корни $Q(x)$, $z_1 = a_1 + ib_1, \bar{z_1} = a_1 - ib_i, \dots, z_\rho = a_\rho + ib_\rho, \bar{z_\rho} = a_\rho - ib_\rho$ – комплексные корни кратностей $\mu_1, \dots, \mu_\rho$. По теореме 3 $Q(x) = A_0(x-x_1)^{\lambda_1} \dots (x-x_n)^{\lambda_n} * (x-z_1)^{\mu_1}(x-\bar{z_1})^{\mu_1} \dots \left(x-z_\rho\right)^{\mu_\rho}\left(x-\bar{z_\rho}\right)^{\mu_\rho}$. Выражение $\big(x-(a+ib)\big)\big(x-(a-ib)\big) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q$ не имеет действительных корней и соответствует паре сопряженных корней $Q(x)$.

Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби. Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональные функции. Простейшие дроби

Рассмотрим выражение $\frac{Q(x)}{f(x)}$, где $Q(x)$ и $f(x)$ – многочлены степеней m и n соответственно. Если $m \geq n$, то такая дробь называется неправильной. Если же $m < n$, то правильной.

Пусть $\frac{Q(x)}{f(x)}$ – неправильная дробь, тогда ее можно выразить в виде $\frac{q(x)f(x)+r(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$, т.е. на многочлен и правильную дробь.

Теорема 6. Любую правильную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей. Простейшие дроби:

1. $\frac{A}{x-a}$.
2. $\frac{A}{(x-a)^k}, k \geq 2$.
3. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, знаменатель не имеет действительных корней.
4. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, k \geq 2$, знаменатель не имеет действительных корней.

Пример: $\frac{x^3+3x^2+5x+9}{(x-1)^2(x+2)^3(x^2+4)^2(x^2+x+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1}{x+2} + \frac{B_2}{(x+2)^2} + \frac{B_3}{(x+2)^3} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+4} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+4)^2} + \frac{P_1x+R_1}{x^2+x+1}$. $A_1 \dots R_1$ – неопределенные коэффициенты, зависящие от числителя дроби. Если привести к общему знаменателю, то получим многочлен, решение которого сводится к решению САУ.

Интегрирование простейших дробей

1. $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|$.
2. $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{1-k}(x-a)^{1-k}, k \geq 2$.
3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{Mx}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{x^2+px+q}dx + \int \frac{N}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{M}{2} * \ln|x^2+px+q| + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{x^2+px+q}$.
4. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{Mx}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p-p}{(x^2+px+q)^k}dx + \int \frac{N}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{M}{2} * \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^k}dx + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{M}{2} * \frac{(x^2+px+q)^{1-k}}{1-k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) * I_k$;

   $I_k = \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k}$, где $t = x + \frac{p}{2}; m^2 = q - \frac{p^2}{4}$.

Вывод рекуррентной формулы: $\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^k} = I_k = \left[\begin{matrix} u=\frac{1}{(t^2+m^2)^k};\, du=-k(t^2+m^2)^{-k-1}2tdt \\ dv=dt;\, v=t \end{matrix} \right] = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}}$; $\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2-m^2)dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \int \frac{(t^2+m^2)dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} - m^2\int \frac{dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = I_k - m^2 I_{k+1}$. Поставим в исходное выражение: $I_k = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k\int \frac{t^2dt}{(t^2+m^2)^{k+1}} = \frac{t}{(t^2+m^2)^k} + 2k(I_k - m^2 I_{k+1})$. Отсюда $I_{k+1} = \frac{2k-3}{2m^2(k-1)} I_k + \frac{t}{2m^2(k-1)(t^2+m^2)^{k-1}}$.

Интегралы от иррациональных функций. Подстановки Эйлера

$$\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$$

Пусть k – общий знаменатель дробей $\frac{m}{n}, \dots, \frac{r}{s}$, т.е. $k =$ НОК $(n, \dots, s)$. Выполним замену $x = t^k; R\left(t^k, t^{\frac{km}{n}}, \dots, t^{\frac{rk}{s}}\right)$. Все показатели целые; $dx = kt^{k-1}dt$.

<u>**Пример.**</u> $I = \int \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{4}}+1}; k = 4;\quad x = t^4; dx = 4t^3dt;\quad I = \int \frac{t^2 4t^3 dt}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5}{t^3+1} = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}dt = 4\left(\int t^2dt - \int \frac{t^2}{t^3+1}\right) = \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\int \frac{d(t^3+1)}{t^3+1} = \frac{4}{3}(t^3 - \ln|t^3+1|) + c = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{4}} - \ln\left|x^{\frac{3}{4}}+1\right|\right) + c.$

<u>**Замечание.**</u> Аналогичным образом берется интеграл вида $\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m}{n}}; \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r}{s}}\right) dx$ с помощью подстановки $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$, $k =$ НОК$(n, \dots, s)$.

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$$

Решаются одной из подстановок Эйлера:

1. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x$. Используется при $a > 0$.
2. $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm xt \pm \sqrt{c}$. Используется при $c > 0$.
3. $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$. Используется когда подкоренное выражение имеет два действительных корня, один из которых λ.

Интегрирование дифференциальных биномов

Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, a и b – постоянные, называется дифференциальным биномом. Не всегда интеграл дифференциального бинома можно свести к дифференциальной рациональной функции.

<u>**Теорема 7 (Чебышева).**</u> $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ сводится к интегралу от рациональных функций, если:

1. p – целое число (сводится к пункту 1).
2. $\frac{m+1}{n}$ – целое число (сводится к пункту 1).
3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число.

Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка

$$\int R(\cos x, \sin x)dx$$

$t = \tan\frac{x}{2}$ – универсальная тригонометрическая подстановка. $\frac{x}{2} = \operatorname{atan} t$; $x = 2\operatorname{atan} t$; $dx = \frac{2dt}{1+t}$; $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$. Аналогично $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

<u>**Пример.**</u> $\int \frac{dx}{\sin x} = \left[\begin{matrix} t=\tan\frac{x}{2} \\ \sin x=\frac{2t}{1-t^2};\, dx=\frac{2}{1+t^2}dt \end{matrix} \right] = \int \frac{2dt(1+t^2)}{(1+t^2)2t} = \ln|t| + c = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + c.$

$$\int R(\cos^2 x, \sin^2 x)dx$$

Интеграл рационализуется $t = \tan x$; $dx = \frac{dt}{1+t^2}$; $\cos^2 x = \frac{1}{\tan^2 x+1} = \frac{1}{t^2+1}$; $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$.

<u>**Пример.**</u> $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left[\begin{matrix} t=\tan x \\ \sin^2 x=\frac{t^2}{1+t^2};\, dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right] = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt(1+t^2)}{(1+t^2)(2+t^2)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{atan}\frac{\tan x}{\sqrt{2}} + c.$

<u>**Замечание.**</u> $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dx}{2\cos^2 x+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x(2+\tan^2 x)} = \int \frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x}.$

$$\int R(\cos x)\sin x\,dx \;\&\; \int R(\sin x)\cos x\,dx$$

$\int R(\cos x)\sin x\;dx = \int R(\cos x)\,d(\cos x)$

$\int R(\sin x)\cos x\;dx = \int R(\sin x)\,d(\sin x)$

Пример. $\int \sin^m x \cos^{2p+1} x\,dx = \int \sin^m x\,(\cos^p x)d(\sin x) = \int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^p\,d(\sin x)$.

$\int \tan^n x\,dx$

$I_n = \int \tan^n x\,dx = \int \tan^{n-2} x \tan^2 x\,dx = \int \tan^{n-2} x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \tan^{n-2} x\,d(\tan x) - I_{n-2} = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$.

$I_1 = \int \tan x\,dx$; $I_2 = \int \tan^2 x\,dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \tan x - x + c$.

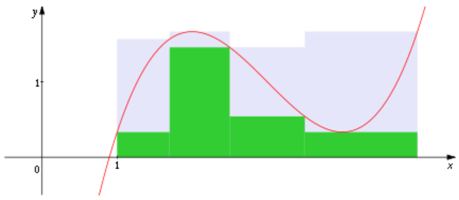
Интегрирование функций, не выражающихся через элементарные функции

1. $\int \frac{e^x}{x} dx = ei\,x + c$ – интегральная экспонента.
2. $\int \frac{dx}{\ln x} = li\,x + c$ – интегральный логарифм.
3. $\int \frac{\sin x}{x} dx = si\,x + c$ – интегральный синус.
4. $\int \frac{\cos x}{x} dx = ci\,x + c$ – интегральный косинус.
5. $\int e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\operatorname{erf} x + c$ – интеграл от функции Гаусса, интеграл Пуассона.

Интегральные суммы Дарбу и Римана. Необходимое и достаточное условие существование интеграла Римана

Интегральные суммы Дарбу

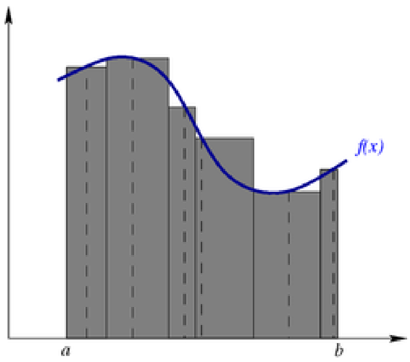
Пусть на отрезке $[a;b]$ задана некая непрерывная функция $f(x)$. Разобьем отрезок на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введем обозначения $m_i = \min f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};x_i]$, $M_i = \max f(x)$ на отрезке $[x_{i-1};x_i]$ и $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Тогда можно ввести понятия верхней и нижней суммы Дарбу: $S(n) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$ – верхняя сумма Дарбу (на рисунке изображена серым, равна площади описанной ступенчатой фигуры), $\rho(n) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$ – нижняя сумма Дарбу (на рисунке изображена зеленым, равна площади вписанной ступенчатой фигуры). При этом всегда выполняется неравенство $\min\limits_{[a;b]} f(x)\,(b-a) \le \rho_n \le S_n \le \max\limits_{[a;b]} f(x)\,(b-a)$.



Интегральные суммы Римана. Определенный интеграл

Пусть на отрезке $[a;b]$ задана некая функция $f(x)$. Разобьем отрезок на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Введем обозначение $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Выберем точки $\xi_i \in [x_{i-1};x_i]$, тогда $f(\xi_i)\Delta x_i$ будет соответствовать площади i-го прямоугольника. А выражение $\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ будет называться интегральной суммой Римана для $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и равно площади ступенчатой фигуры на этом отрезке.

Если при любых разбиениях отрезка $[a;b]$ таких, что максимальная длина разбитого отрезка стремится к нулю (при любом выборе ξ_i) и сумма σ_n стремится к одному и тому же пределу, то говорят, что функция интегрируема на этом отрезке, а предел называется определенным интегралом. $I = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$. Если функция непрерывна на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$.



Замечание. $\rho_n \le \sigma_n \le S_n$, т.к. для любого i выполняется $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$.

Теорема 8. Для существования интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ необходимо и достаточно, чтобы предел $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n - \rho_n)$ существовал и был равен нулю.

Замечание. Определенный интеграл – площадь криволинейной трапеции под графиком функции $f(x)$.

Свойства интеграла Римана

1. Линейность
   a. $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.
   b. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.
2. Теорема 9 (о знаке интеграла). Пусть некая функция $f(x) \ge 0$ на отрезке $[a;b]$ и пусть существует интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \ge 0$.

Доказательство. $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$. $\Delta x_i > 0$, так как $b > a$, $f(\xi_i) \geq 0$ так как $f(x) \geq 0$. Выходит, $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geq 0$, и, следовательно, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Следствие. Пусть $f(x) \geq \varphi(x)$ на отрезке $[a; b]$ и существуют интегралы $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi(x)dx$. Тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \varphi(x)dx$. Для доказательства достаточно рассмотреть интеграл разности этих функций.

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. (во втором случае $\Delta x_i < 0$).

Следствие. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

4. Теорема 10 (о разбиении промежутка интегрирования). Пусть некий отрезок $[a; b]$ разбит на отрезки $[a; c]$ и $[c; b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Такое разбиение подразумевает, что точка c является точкой деления. Тогда $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (до c) $+ \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (после c). Таким образом, при $\max \Delta x_i \to 0$ выполняется $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

5. Оценка определенного интеграла. Пусть на некотором отрезке $[a; b]$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$, где $M = \max f(x)$ на отрезке $[a; b]$, $m = \min f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Тогда $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$.

Доказательство. $\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$. Первая и последняя части соответственно равны $m(b-a)$ и $M(b-a)$. Средняя же часть равна определенному интегралу.

Замечание. $\int_a^b 1dx = b - a$.

Следствие. Пусть некоторая функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ по модулю не превосходит M. Тогда $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a)$.

6. Теорема 11 (неравенство Коши-Буняковского). Пусть некоторая функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ является произведением двух других функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и существуют интегралы $\int_a^b f_1^2(x)dx$; $\int_a^b f_2^2(x)dx$; $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$. Тогда выполняется неравенство $\left|\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f_1^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b f_2^2(x)dx}$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_a^b \left(\lambda f_1(x) + f_2(x)\right)^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f_1^2(x)dx + 2\lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \int_a^b f_2^2(x)dx \geq 0$. Представим его в виде $\lambda^2 I_{11} + 2\lambda I_{12} + I_{22} \geq 0$. Так как это выражение является квадратным трехчленом, то оно имеет не более одного корня, а значит $\frac{D}{4} = \lambda^2(I_{12}^2 - I_{11}I_{22}) \leq 0$, $\lambda^2 > 0$, ее можно опустить. Тогда получаем $\left(\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx\right)^2 \leq \int_a^b f_1^2(x)dx \int_a^b f_2^2(x)dx$.

Замечание. Рассмотрим непрерывное множество функций c на отрезке $[a; b]$. По определению, скалярное произведение двух кусочно-непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $(f_1 f_2)$ равно интегралу $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx$. Величину $||f||$, равную $\sqrt{(ff)}$ будем называть нормой функции f. Тогда для двух функций f_1 и f_2 из множества c будет выполняться равенство $(f_1 f_2) \leq ||f_1||_c ||f_2||_c$. Это другая форма записи неравенства Коши-Буняковского.

Теорема о среднем

Теорема 12 (о среднем). Пусть некоторая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

Доказательство. $f(x)$ принимает на отрезке $[a; b]$ все значения между $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$ и $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$. И $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$. Следовательно, $m \leq \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leq M$. А значит, найдется такая точка $\xi \in (a; b)$, что $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$. $y_{\text{ср}} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$ обобщает среднее значение последовательности $\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = a_{\text{ср}}$.

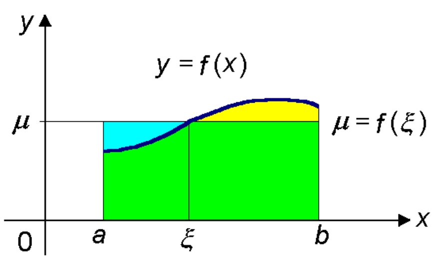


Рис. 2

Геометрический смысл теоремы о среднем: $f(\xi)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$. В правой части выражения записана площадь криволинейной трапеции, которая равна площади прямоугольника, площадь которого записана в левой части выражения.

Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона-Лейбница

Производная интеграла по верхнему пределу

Пусть некоторая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Рассмотрим интеграл $\int_a^x f(t)dt$, где $a<x<b$, причем $\int_a^x f(t)dt$ будет функцией от x.

Теорема 13. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=f(x)$.

Доказательство. Возьмем $\int_a^x f(t)dt$ за $I(x)$. Тогда $I(x+\Delta x)-I(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ = (по теореме о среднем) = $f(\xi)\Delta x; \xi\in[x;x+\Delta x]$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$. Следовательно, существует такой $I'(x)=f(x)$.

Следствие. $d\left(\int_a^x f(t)dt\right)=f(x)dx$.

Формула Ньютона-Лейбница

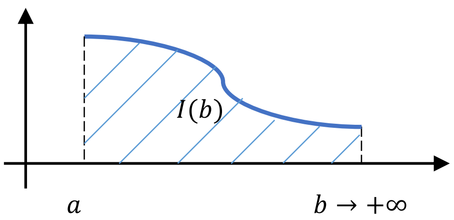
Теорема 14. Пусть некая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и пусть $F(x)$ – первообразная от $f(x)$. Тогда интеграл $\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$.

Доказательство. По теореме о производной интеграла по верхнему пределу $I(x)=\int_a^x f(t)dt; I'(x)=f(x)$, $I(x)$ – первообразная от $f(x)$. $I(a)=F(a)+c=0; c=-F(a)$. Тогда $I(x)=\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$, а, следовательно, $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$.

Несобственные интегралы 1-го рода и их свойства

Пусть некая функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, где a – некоторое конечное число. Возьмем некоторое число $b>a$ и рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, который обозначим $I(b)$. Так как функция непрерывна, то этот интеграл существует, обычный интеграл Римана. А теперь узнаем, как ведет себя $I(b)$ когда $b\to+\infty$. Оказывается, что если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty} I(b)$, то этот предел называется несобственным интегралом первого рода функции f, и обозначается следующим образом: $\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$. Если этот предел существует, то говорят о существовании, или сходимости, несобственного интеграла. Если же не существует, то говорят о том, что несобственный интеграл не сходится, или не существует.

Геометрический смысл несобственного интеграла:



Площадь бесконечно длинной криволинейной трапеции. Аналогичным образом определяется $\int_{-\infty}^a f(x)dx$. А в случае, когда оба предела интегрирования – бесконечности, можно взять некоторую точку c и рассмотреть два интеграла: $\int_{-\infty}^c f(x)dx$ и $\int_c^{+\infty} f(x)dx$. Тогда, если эти интегралы существуют, то интеграл $\int_{c-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ равен сумме этих интегралов: $\int_{c-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^c f(x)dx+\int_c^{+\infty} f(x)dx$.

Пример: $\int_b^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{atan} x\Big|_0^b=\lim\limits_{b\to+\infty}\operatorname{atan} b=\frac{\pi}{2}$.

Абсолютная и условная сходимость

Признаки сравнения

Теорема 15. Рассмотри интеграл $\int_a^{+\infty}\frac{Mdx}{x^\alpha}$, где $M>0, a>0$. Этот интеграл сходится при $\alpha>1$ и расходится при $\alpha\le 1$.

Доказательство. Пусть $\alpha\ne 1$. Тогда $\int_a^{+\infty}\frac{Mdx}{x^\alpha}=\frac{Mx^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_a^{+\infty}=\left[\begin{matrix}+\infty, & \alpha<1\\ \frac{Ma^{1-\alpha}}{1-\alpha}, & \alpha>1\end{matrix}\right.$. Пусть $\alpha=1$. Тогда $\int_a^{+\infty}\frac{Mdx}{x}=M\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$.

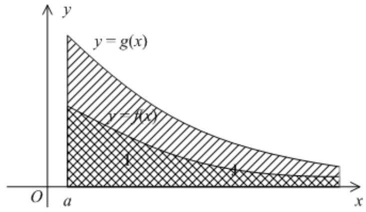
Теорема 16 (Сравнение несобственных интегралов 1 рода). Пусть на интервале $[a;+\infty)$ $0\le\varphi(x)\le f(x)$. Тогда:

1. Если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится.
2. Если $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ расходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим доказательства для обоих случаев:

1. Пусть существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx = I$. Но по свойству определенных интегралов $\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le I$. Рассмотри функцию $\Phi(b) = \int_a^b \varphi(x)dx$. Эта функция возрастающая и ограничена сверху. Следовательно, существует ее предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b \varphi(x)dx$, т.е. интеграл сходится.
2. От противного: Пусть $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ расходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда, по первому пункту доказательства $\int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$ сходится. Противоречие. Следовательно, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

Геометрический смысл теоремы: площадь криволинейной трапеции, ограниченной меньшей функцией, имеющей предел на $+\infty$, меньше площади криволинейной трапеции, ограниченной большей функцией, имеющей предел на $+\infty$.



<u>Теорема 17 (признак сходимости неопределенных интегралов первого рода).</u> Пусть $f(x)$ определена на интервале $[a;+\infty)$, где $a > 0$ и $f(x) \ge 0$. Тогда, если

1. Если существуют такие $M > 0, \alpha > 1$, что $f(x) \le \frac{M}{x^\alpha}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.
2. Если существуют такие $M > 0, 1 \ge \alpha > 0$, что $f(x) \ge \frac{M}{x^\alpha}$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Очевидно. Вытекает из теорем 15 и 16.

<u>Пример:</u> Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2(e^x+1)}$. $\frac{1}{x^2(e^x+1)} < \frac{1}{2x^2}$. Но $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{2x^2}$ сходится. Следовательно, и исходный интеграл сходится.

Абсолютная и исходная сходимости

<u>Теорема 18.</u> Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;+\infty)$. Тогда, если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

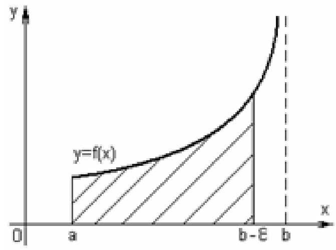
<u>Доказательство.</u> Рассмотрим функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, где $f^+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2}, f^-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2}$. Следовательно, $f^+(x)$ и $f^-(x) \ge 0$. Если их сложить, получим: $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$ и $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Рассмотрим интеграл $\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx$. Значит, так как существует предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b |f(x)|dx$, то должны существовать и пределы $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f^+(x)dx$, $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f^-(x)dx$, так как в противном случае не существовал бы $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b |f(x)|dx$. Теперь распишем интеграл $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$. Аналогично, интеграл левой части существует, так как существуют оба интеграла из правой части. Следовательно, существует и $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то есть интеграл сходится.

<u>Замечание.</u> Утверждение, обратное теореме, неверно. Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$, то говорят, что этот интеграл сходится абсолютно. Если же интеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ не сходится, а $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то говорят, что этот интеграл сходится условно.

<u>Пример:</u> $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ сходится абсолютно. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}\right|$. $\left|\frac{\sin x dx}{x\sqrt{1+x^2}}\right| \le \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \le \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ сходится.

Несобственные интегралы второго рода и их свойства

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором интервале $[a;b)$. Пусть в точке b функция имеет бесконечный разрыв, т.е. $\begin{cases} f(x)\to\infty \\ x\to b-0\end{cases}$. Рассмотрим интеграл $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Этот интеграл существует, так как функция непрерывна. Тогда рассмотрим предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если этот предел существует, то говорят, что несобственный интеграл второго рода существует и сходится: $\int_a^b f(x)dx \equiv \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Если этот предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл не существует или расходится. Точку b называют особой точкой функции $f(x)$.



<u>Замечание.</u> Аналогичным образом определяется несобственный интеграл второго рода, где специальной точкой является точка a.

Пусть точка c является внутренней точкой интервала $(a;b)$ и пусть эта точка является особой точкой функции $f(x)$, т.е. $\lim\limits_{x\to c-\varepsilon} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to c+\varepsilon} f(x) = \infty$.

Если существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx$ и $\lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$, то говорят, что несобственный интеграл с особой точкой c сходится: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim\limits_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx$. Иначе же говорят о расходимости, или несуществовании несобственного интеграла второго рода с особой точкой c. Если же в пределах ε_1 и ε_2 будут равны, то говорят о существовании несобственного интеграла в смысле главного значения $(V.P.)$: $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$.

<u>Примеры:</u> $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0} \operatorname{asin} x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \frac{\pi}{2}$.

$(V.P.)\int_{-1}^{2}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{2}\frac{dx}{x}\right) = \lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_{\varepsilon}^{2}\right) = \ln 2$.

<u>Теорема 19 (признак сходимости и расходимости интегралов 2 рода).</u> Пусть $f(x)$ непрерывна на интервале $[a;b)$ и b – особая точка $f(x)$. Тогда:

1. Если существуют такие $M > 0$ и $0 < m < 1$, что для любого x из исходного интервала выполняется неравенство $0 < f(x) \le \frac{M}{(b-x)^m}$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ сходится.
2. Если существуют такие $M > 0$ и $m \ge 1$, что для любого x из исходного интервала выполняется неравенство $f(x) > \frac{M}{(b-x)^m}$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ расходится.

<u>Доказательство.</u> Можно произвести замену переменной и свести к несобственному интегралу первого рода, для которого признак доказан.

<u>Замечание.</u> Заменой переменной несобственный интеграл второго рода можно свести к интегралу первого рода и наоборот. В силу этого для интегралов второго рода выполняются признаки сравнения.

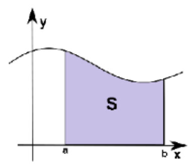
Интеграл Эйлера

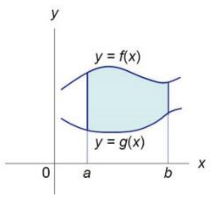
Некоторые часто встречающиеся несобственные интегралы

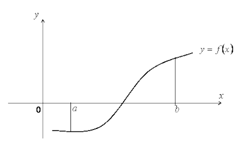
1. Интеграл Эйлера $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$. Особая точка $x = 0$. Выполним замену $x = 2t$. Получаем $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin 2t\,dt = 2\int_0^{\pi/4}(\ln 2 + \ln\sin t + \ln\cos t)dt = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\pi/4}\ln\cos t\,dt = \left[\begin{matrix} t=\frac{\pi}{2}-u;\ dt=-du \\ \ln\cos t = \ln\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right) = \ln\sin u\end{matrix}\right] = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/4}\ln\sin t\,dt + 2\int_{\pi/4}^{\pi/2}\ln\sin u\,du = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\pi/2}\ln\sin t\,dt$. Следовательно, $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$.
2. Интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
3. Интеграл Дирихле $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$.

Вычисление площадей в декартовых и полярных координатах

Вычисление площадей в декартовых координатах

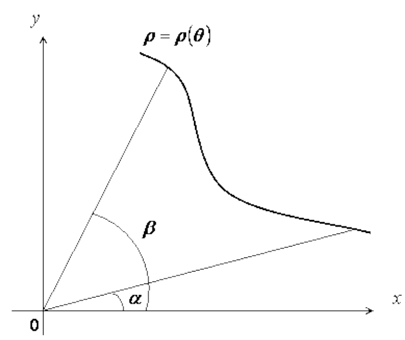






1. $f(x) \ge 0$ непрерывна на $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции.
2. $f(x)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения и непрерывна на $[a;b]$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1$.
3. $f(x) \ge g(x)$ на $[a;b]$. Тогда $S = \int_a^b\big(f(x) - g(x)\big)dx$.
4. Кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t)\end{cases}; t \in [\alpha;\beta]; x'(t) \neq 0; x(\alpha) = a; x(\beta) = b; a < b$. Тогда $S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$.

Вычисление площадей в полярных координатах



Пусть $\rho = \rho(\varphi), \varphi \in [\alpha;\beta]$ задает границу криволинейного сектора. Разобьем промежуток $[\alpha;\beta]$ на n частей: $\varphi_0 = \alpha < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$, и в каждом промежутке выберем точку $\xi_i \in [\varphi_{i-1};\varphi_i]$. Тогда $\rho(\xi_i)$ – радиус кругового сектора, $\Delta\varphi_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}$ – размер угла сектора. Площадь фигуры, составленной из получившихся круговых секторов, вычисляется как $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\rho^2(\xi_i)\,\Delta\varphi_i$. При $\max\limits_i\Delta\varphi_i \to 0$ формула сводится к интегральному виду $\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)d\varphi$. А площадь отдельно взятого i – го кругового сектора будет находиться как $\frac{1}{2}\rho^2(\xi_i)\Delta\varphi_i$.

Вычисление длины дуг

Пусть $y = f(x)$ непрерывна и дифференцируема на $[a;b]$ и требуется найти длину дуги графика функции. Разобьем $[a;b]$ на n частей: точки $M_i\big(x_i; y(x_i)\big)$ будут являться концами соответствующих хорд. В итоге вся дуга разобьется на n звеньев. Длина каждого звена будет вычисляться как $\Delta l_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} * \Delta x_i$. Тогда длина всей дуги будет равна сумме длин всех ломаных $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} * \Delta x_i$. При $\max\limits_i \Delta l_i \to 0$ формула сводится к интегральному виду $\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}dx$.

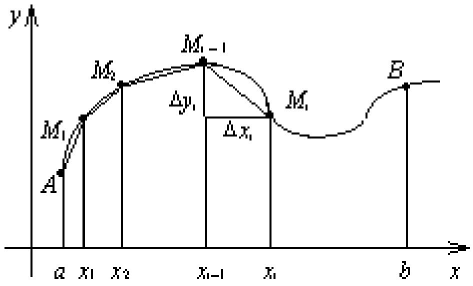


Рис. 16

<u>Замечание.</u> Длина графика функции существует, если функция непрерывна и дифференцируема. Такие кривые называются спрямляемыми. Если функция только непрерывна, то может возникнуть ситуация неспрямляемой кривой.

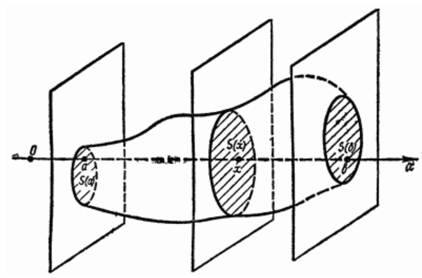
Если кривая задана параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}; t \in [\alpha; \beta]$, то длина дуги вычисляется по формуле $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(x'(t)\big)^2 + \big(y'(t)\big)^2}dt.$

Если кривая задана в полярных координатах, то для вывода формулы выразим декартовы координаты x, y через полярные ρ, φ: $x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi$. Подставив получившиеся выражения в формулу длины дуги для параметрически заданной функции, получим $L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \big(\rho'(\varphi)\big)^2}d\varphi.$

Вычисление объема тела через площади поперечных сечений. Объем тела вращения

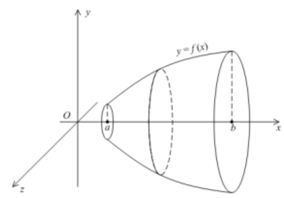
Объем тела через площади поперечного сечения

Пусть есть некоторое тело, которое можно спроектировать на ось Ox $[a;b]$. Введем непрерывную функцию $S(x)$, отображающую площадь поперечного сечения в каждой точке $[a;b]$. Тогда объем тела можно вычислять как $V = \int_a^b S(x)dx$. Разобьем $[a;b]$ на n частей таких, что $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. На каждом разбиении выберем точку $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$. Тогда $S(\xi_i)$ – площадь поперечного сечения, $S(\xi_i)\Delta x_i$ – объем цилиндрического тела. Складывая эти объемы, получаем $\sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow[\max\limits_i \Delta x_i \to 0]{} \int_a^b S(x)dx.$



Объем тела вращения

Пусть есть непрерывная кривая $y = f(x)$, заданная на $[a;b]$. Тогда радиус отдельно взятого поперечного сечения будет равен $r = f(x)$, а площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi r^2 = \pi f^2(x)$. Тогда объем тела вращения можно вычислять как $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$. Вывод аналогичный.



Пространство $\mathbb{R}^n$. Сходимость в $\mathbb{R}^n$. Функции нескольких переменных. Предел, непрерывность. Свойства непрерывных функций

Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ размерности n. Любой элемент $x \in \mathbb{R}^n$ может быть представлен как вектор $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Их можно складывать, вычитать, умножать на число. Также говорят о расстоянии в линейном пространстве $\big||x - y|\big| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$. Введем понятие n – мерного шара с центром в точке x_0 и радиусом r: $S_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \dots + (x_n - x_{0n})^2} < r\}$.

С помощью этих шаром можно ввести понятие внутренней точки области. Пусть D – подмножество $\mathbb{R}^n$. Точка $x_0 \in D$ называется внутренней точкой множества D, если существует такое r, что n – мерный шар с центром в точке x_0 полностью лежит в D $(S_r(x_0) \in D)$. Точка x_0 (уже не обязательно лежащей в D) называется граничной точкой множества D, если для любого r в $S_r(x_0)$ существуют точки, отличные от x_0, принадлежащие D и не принадлежащие в D.

Множество $D \in \mathbb{R}^n$ называют открытым, если все его точки внутренние.

Множество $D \in \mathbb{R}^n$ называют замкнутым, если оно содержит и внутренние, и граничные точки.

Пусть заданы $\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ x_2 = x_2(t) \\ \dots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$ – непрерывные дифференцируемые функции, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда говорят, что эти функции задают в $\mathbb{R}^n$ кривую. Кривые задаются неоднозначно.

Множество называется связным, если любые две его точки можно соединить кривой, лежащей в D.

Областью в $\mathbb{R}^n$ называется открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть дана точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда любое открытое множество, содержащее x_0, называется окрестностью этой точки. Шар с центром в точке x_0 и радиусом r называется r – окрестностью точки x_0.

Пусть $D \in \mathbb{R}^n$ – область и пусть в D задана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Эту функцию будет называть функцией нескольких переменный.

Пределом во внутренней точке $x_0 \in D$ функции f называется $A = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \dots \\ x_n \to x_{0n}}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такая δ – окрестность $S_\delta(x_0)$, что если $x \in \dot{S}_\delta(x_0)$, то $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < \varepsilon$. Функция переводит точку из пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^1$.

<u>Замечание.</u> Можно показать, что покоординатное стремление $\begin{cases} x_1 \to x_{01} \\ x_2 \to x_{02} \\ \dots \\ x_n \to x_{0n} \end{cases}$ равносильно стремлению по метрике $||x - x_0||$. Поэтому можно писать предел в виде $A = \lim\limits_{||x - x_0|| \to 0} f(x)$.

Если $\lim\limits_{||x - x_0|| \to 0} f(x)$ равен значению функции в точке, то $f(x)$ непрерывна в этой точке.

Есть две формы записи: $\lim\limits_{\substack{\Delta x_1 \to 0 \\ \Delta x_2 \to 0 \\ \dots \\ \Delta x_n \to 0}} \big(f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)\big) = 0$ и $\lim\limits_{||\Delta x|| \to 0} \Delta f = 0$. При выполнении условия в любой из двух форм записи функция будет являться непрерывной. Δf называется приращением функции. Частным приращением функции f по x_1 называется $\Delta_{x_1} f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Функция называется непрерывной на множестве $M \in \mathbb{R}^n$, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пусть есть некоторая область $G \in \mathbb{R}^n$. Определим множество $\bar{G} = G \vee \partial G$ (∂G – граница G), включающее в себя область и ее границу. Такое множество называется замкнутой областью. Если функция непрерывна в замкнутой области, то она достигает на ней своих наибольших и наименьших значений и принимает на этом множестве все промежуточные значения.

Частные производные. Полный дифференциал

Частные производные

Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определена в окрестности точки $x_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. Частной производной функции в точке x_0 называется $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta_{x_1} f(x_0)}{\Delta x_1} = \lim\limits_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_{01} + \Delta x_1, x_{02}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})}{\Delta x_1}$. Обозначается как $f'_x(x_0)$. Аналогично определяются частные производные по другим параметрам.

<u>Пример:</u> $z = x^2 \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y$; $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y$.

Полный дифференциал

Пусть $z = f(x, y)$ имеет частные производные по x и y в точке (x, y) и в ее окрестности. Пусть эти частные производные непрерывны. Рассмотрим полное приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. По теореме Лагранжа это равно $\frac{\partial f}{\partial y}(x + \Delta x, \bar{y})\Delta y + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y)\Delta x$, где $\bar{x}$ – значение между x и $x + \Delta x$, $\bar{y}$ – значение между y и $y + \Delta y$. Раз производные существуют и непрерывны в окрестности точки (x, y), то можно записать, что $\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \gamma_2(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \gamma_1(\Delta x, \Delta y)\right)\Delta x$, где γ_1, γ_2 – бесконечно малые величины при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$. Получаем, что $\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$. Тогда величина $df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y$ называется полным дифференциалом, а $\gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y = O\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right) = O(\Delta\rho)$ – бесконечно малая более высокого порядка малости, чем расстояние между точками (x, y) и $(x + \Delta x, y + \Delta y)$. $f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + df$.

Производные сложных функций и функции, заданной неявно

Производная сложной функции

Пусть $z = f(u, v), u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ и пусть φ и ψ определены в области G. Тогда z определена в D – образе G при отображении φ и ψ. Пусть Δx – приращение x, тогда $\Delta_x u, \Delta_x v$ – приращение u и v. $\Delta_x z = \frac{\partial f}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial f}{\partial v}\Delta_x v + \gamma_1 \Delta_x u + \gamma_2 \Delta_x v$. При $\Delta x \to 0$ $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$. Частная производная по x сложной функции $z(\varphi(x, y), \psi(x, y))$: $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial f}{\partial u} * \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\partial f}{\partial v} * \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$. Аналогичным образом $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$.

__Замечание.__ Пусть $z = f(u, v, x), u = \varphi(x), v = \psi(x)$. Тогда $z = f(\varphi(x), \psi(x), x)$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{d\psi}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}$.

Производная функции, заданной неявно

$F(x, y) = 0$ – неявное задание $y(x)$.

__Теорема 20.__ Пусть $F(x, y), \frac{\partial F}{\partial x}(x, y), \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$ определены и непрерывны в области G, содержащей точку (x, y),удовлетворяющую уравнению: $F(x, y) = 0$. Пусть в этой точке $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0$, тогда $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

__Доказательство.__ Зададим приращения $x + \Delta x, y + \Delta y$ так, чтобы они лежали в области G и $F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, тогда $F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) = 0$. $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y$, $\gamma_1, \gamma_2 \to 0$ при $\Delta \rho \to 0$. Разделим на Δx. $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \gamma_1 + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta x}$. При $\Delta x \to 0$ получим $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0$, откуда $y'_x = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

__Замечание.__ Теорему можно обобщить на случай функции n переменных. $F(z, x_1, x_2, \dots, x_n)$ – неявное задание $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ (при условии, что $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$).

Частные производные высших порядков. Теорема о смешанных производных

Частная производная n – порядка есть частная производная от производной $n - 1$ порядка. Пусть дана $z = f(x, y)$. Тогда ее производные второго порядка: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right); \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$. Последние две производные называются смешанными производными.

__Теорема 21.__ Пусть $z = f(x, y), f'_x(x, y), f'_y(x, y), f''_{xy}(x, y), f''_{yx}(x, y)$ определены и непрерывны в точке (x, y) и ее окрестности. Тогда $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

__Доказательство.__ Рассмотрим $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)] - [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$ и $\varphi(x) = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$. Тогда $A = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$. Так как f'_x определена в окрестности точки (x, y) то $\varphi(x)$ дифференцируема на $[x, x + \Delta x], \Delta x > 0$. Следовательно, по теореме Лагранжа, $A = \varphi'(\bar{x})\Delta x$. $\varphi'(\bar{x}) = f'_x(\bar{x}, y + \Delta y) - f'_x(\bar{x}, y)$. По теореме Лагранжа $\varphi'(\bar{x}) = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta y$. f'_x существует в окрестности точки (x, y) и $A = f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y$. Теперь рассмотрим $A = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] - [f(x + \Delta x, y) - f(x, y)]$ и $\psi(x) = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$. Аналогичный образом получим $A = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\Delta x \Delta y$. Приравняем полученные выражения $f''_{xy}(\bar{x}, \bar{y})\Delta x \Delta y = f''_{yx}(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})\Delta x \Delta y$. При $\Delta x, \Delta y \to 0$ точки $(\bar{x}, \bar{y}), (\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \to (x, y)$. Получаем $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

__Замечание.__ Теорему можно обобщить на случай функции n переменных.

Производная по направлению. Градиент и его свойства

Поверхности уровня. Линии уровня

Пусть в $D \in \mathbb{R}^3$ задана $f(x, y, z)$. Множество точек из D таких, что $f(x, y, z) = c$ называется поверхностями уровня.

__Пример:__ $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = c$.

Аналогично определяются линии уровня $f(x, y) = c$.

Производная по направлению

Пусть есть функция $u = f(x, y, z)$, определенная в области $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть есть точка $M(x, y, z) \in D$. Из точки M проведем вектор $\vec{l}(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ ($\Delta x, \Delta y, \Delta z$ – приращения относительно точки M) с направляющими

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$. Тогда длина вектора будет определяться как $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$, а направляющие косинусы $\cos\alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}; \cos\beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}; \cos\gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$. Тогда $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y + \gamma_3\Delta z$. Производной по направлению называется $\frac{\partial u}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta l} = \frac{\partial u}{\partial x}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial y}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \frac{\partial u}{\partial z}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta l} + 0 = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$.

<u>Замечание.</u> Частные производные по x, y, z тоже являются производными по направлению.

Градиент и его свойства

Пусть $u = f(x,y,z)$ определена в $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть точка $M(x,y,z) \in D$. Пусть существуют $\frac{\partial u}{\partial x}(M); \frac{\partial u}{dy}(M); \frac{\partial u}{\partial z}(M)$. Тогда градиентом функции u в точке M называют вектор $grad\, u(M) = \frac{\partial u}{\partial x}(M)\vec{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}(M)\vec{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}(M)\vec{k}$. Если определить градиент в каждой точке поля, то говорят о поле градиентов.

Пусть у $u(x,y,z)$ существуют в D частные производные. Тогда функции u в каждой точке можно сопоставить ее градиент.

<u>Теорема 22.</u> $\frac{\partial u}{\partial l}$ – проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$ в каждой точке.

<u>Доказательство.</u> проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$ равна $\frac{grad\, u * \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma = \frac{\partial u}{\partial l}$.

Свойства градиента:

1. $\frac{\partial u}{\partial l}$ принимает наибольшее значение в точке, если $\vec{l}$ сонаправлен $grad\, u$ и $\max\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u|$.

   <u>Доказательство.</u> $\frac{\partial u}{\partial l}$ – проекция $grad\, u$ на $\vec{l}$. $\frac{\partial u}{\partial l} = |grad\, u| * \cos(\vec{l}; grad\, u)$ принимает максимум, если они сонаправлены.
2. $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z = grad\, u * d\vec{r}$, $d\vec{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (dx, dy, dz)$.
3. **Теорема 23.** Пусть задана $u(x,y,z)$ в $D \in \mathbb{R}^3$ и пусть $M(x,y,z)$ – точка, лежащая на поверхности уровня, и пусть существует частная производная, и пусть в точке M $|grad\, u| \neq 0$. Тогда градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку M.

Доказательство. Пусть $M(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ лежит на той же поверхности уровня, что и $M(x,y,z)$, т.е. $u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = c$. Тогда $u(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - u(x,y,z) = 0$, т.е. $\Delta u = du + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y + \gamma_3\Delta z = grad\, u * \Delta\vec{r} + \gamma_1\Delta x + \gamma_2\Delta y + \gamma_3\Delta z = 0$. Разделим на $|\Delta\vec{r}|$: $grad\, u * \frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_1\frac{\Delta x}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_2\frac{\Delta y}{|\Delta\vec{r}|} + \gamma_3\frac{\Delta z}{|\Delta\vec{r}|} = 0$. Очевидно, что $\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \vec{l}$ – единичный вектор, выходящий из точки M на поверхности уровня. $\lim_{|\Delta\vec{r}|\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|}$ – единичный вектор, касательный к поверхности в точке M. $grad\, u * \lim_{|\Delta\vec{r}|\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = 0$, откуда следует, что градиент перпендикулярен поверхности уровня, проходящей через точку M.

Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть $u(x,y,z) = 0$ определена в $D \in \mathbb{R}^3$ и точка $M(x,y,z)$, лежащая на поверхности. Пусть существуют частные производные u в точке M и градиент u в этой точке ненулевой. Пусть L – некоторая кривая на поверхности, проходящая через точку M. L задается параметрически задается параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)\end{cases}, t \in [\alpha;\beta], t_0 \in (\alpha;\beta), M\big(x(t_0), y(t_0), z(t_0)\big)$. Пусть существуют $x'(t), y'(t), z'(t)$. Тогда вектор $r'(t) = x'(t), y'(t), z'(t)$ будет являться касательным к L в точке M. $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial u}{\partial z}z'(t)$. Рассмотрим точку $M'\big(x(t_0+\Delta t), y(t_0+\Delta t), z(t_0+\Delta t)\big)$, которая тоже будет лежать на поверхности уровня. Тогда $\Delta u = u(M') - u(M) = 0$. Значит, $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y}y'(t) + \frac{\partial z}{\partial z}z'(t) = 0$. Следовательно, градиент перпендикулярен произвольному вектору касательной в точке t_0. Следовательно, все касательные вектора лежат в одной плоскости и градиент в этой точке перпендикулярен касательной плоскости в этой же точке.

Уравнение касательной плоскости: $\frac{\partial u}{\partial x}(M)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(M)(y-y_0) + \frac{\partial z}{\partial z}(M)(z-z_0) = 0$, или же $grad\, u(M) * (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$.

Нормаль к поверхности – нормаль к касательной плоскости. Уравнение нормали к поверхности: $\frac{x-x_0}{\frac{\partial u}{\partial x}(M)} = \frac{y-y_0}{\frac{\partial u}{\partial y}(M)} = \frac{z-z_0}{\frac{\partial u}{\partial z}(M)}$.

Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции n переменных

Производная второго порядка функции f двух переменных есть $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Аналогично определяется производная n – го порядка $\frac{\partial^k f(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\partial_{x_1}^{k_1} * \partial_{x_2}^{k_2} * \dots * \partial_{x_n}^{k_n}} = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^{k-1} f}{\partial_{x_1}^{k_1-1} * \partial_{x_2}^{k_2} * \dots * \partial_{x_n}^{k_n}}$, $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Точно таким же образом определяется дифференциал n – го порядка функции f. По определению это есть $d^n f \equiv d(d^{n-1} f)$, где $d^2 f = d(df)$. Пусть есть некая функция от двух переменных $f(x,y)$. Тогда $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. Дифференциал зависит от четырех переменных – точки $(x,y), dx, dy$, от последних двух зависит линейно. Тогда дифференциал второго порядка есть $d^2 f = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(dy)^2$. Таким образом, дифференциал второго порядка есть $d(\dots) = \frac{\partial}{\partial x}(\dots)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots)dy$, а дифференциал n – го порядка есть $d^n(\dots) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(\dots)dx + \frac{\partial}{\partial y}(\dots)dy\right)^n$. Рассмотрим функцию $f(x,y)$, у которой существуют частные производные n – го порядка в окрестности точки в окрестности точки (x_0,y_0). Тогда имеет место выражение $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2 f(x_0,y_0) + \dots + \frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0) + o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$, где $dx = x - x_0, dy = y - y_0$, которое и называется формулой Тейлора. Пояснение: $\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n$ – бесконечно малая функция, а $o\left(\left(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\right)^n\right)$ – бесконечно большая более высокого порядка, остаточный член формулы Тейлора. Аналогичная формула для одной переменной была в первом семестре.

Необходимые и достаточные условия экстремума функции n переменных

Пусть некая функция $f(x,y)$ определена в окрестности точки (x_0,y_0) и имеет частные производные 1-го порядка. Говорят, что функция f имеет локальный максимум в точке (x_0,y_0), если существует такая окрестность точки (x_0,y_0), что для любого x и $y \in$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x,y) \le f(x_0,y_0)$. Аналогичным образом определяется локальный минимум. Точки локального минимума и максимума называются точками экстремума.

<u>Теорема 24.</u> Пусть точка (x_0,y_0) – точка экстремума. Тогда частные производные (если они существуют) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ равны нулю.

<u>Доказательство.</u> Пусть точка (x_0,y_0) – точка максимума (аналогичные рассуждения можно вести для точки минимума) функции f. Тогда по определению существует такая окрестность точки (x_0,y_0), что $f(x_0,y_0) \ge f(x_0 + \Delta x, y_0) = f(x,y_0)$. Так как y_0 фиксировано, то это функция одной переменной, и, следовательно, частная производная по x обращается в ноль $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$. Это является необходимым условием существования экстремума для функции одной переменной (также существование производной в этой точке). Аналогичным образом частная производная по y обращается в ноль $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$. Точки, в которых производная обращается в ноль, называются стационарными точками.

<u>Замечание.</u> Обращение частных производных в ноль является необходимым, но не достаточным условием существования точки экстремума. Пример: $f(x,y) = x^2 - y^2$. Точка $(0;0)$ не принимает экстермальное значение, хотя частные производные в этой точке равны нулю $\frac{\partial f}{\partial x}(0;0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0;0) = 0$.

<u>Теорема 25.</u> Достаточные условия экстремума. Пусть некая функция $f(x,y)$ имеет частные производные до второго порядка включительно в окрестности точки (x_0,y_0). Пусть $A = \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x_0,y_0), B = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0); C = \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x_0,y_0)$. Если:

1. $A * C - B^2 > 0$ и $A > 0$, то точка (x_0,y_0) – точка минимума.
2. $A * C - B^2 > 0$ и $A < 0$, то точка (x_0,y_0) – точка максимума.
3. $A * C - B^2 < 0$, то точка (x_0,y_0) не является точкой экстремума.
4. $A * C - B^2 = 0$, то требуется дополнительное исследование.

<u>Доказательство.</u> Воспользуемся формулой Тейлора. Пусть есть функция двух переменных $f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + o((\Delta\rho)^2)$, где $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Так как в точке (x_0,y_0) производная обращается в ноль $df(x_0,y_0) = 0$, то приращение функции $\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0)$ есть второй дифференциал, деленный на 2!: $\Delta f = \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}(\Delta y)^2\right) + o((\Delta\rho)^2)$. Перепишем в

виде $\Delta f = \frac{1}{2}\left(A(\Delta x)^2 + 2B\Delta x\Delta y + C(\Delta y)^2 + 2o((\Delta\rho)^2)\right)$. Теперь перейдем к полярным координатам $\begin{cases}\Delta x = \Delta\rho * \cos\varphi \\ \Delta y = \Delta\rho * \sin\varphi\end{cases}$, и выражение $\frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta q)^2}$ заменим на $\varepsilon(\Delta\rho)$, которое будет малой величиной, так как $\lim\limits_{\Delta q\to 0}\frac{2o((\Delta\rho)^2)}{(\Delta q)^2} = 0$. Тогда наше выражение примет вид $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2(A\cos^2\varphi + 2B\cos\varphi\sin\varphi + C\sin^2\varphi + \varepsilon(\Delta\varphi))$. Теперь выражение в скобках домножим и разделим на A, а также в числителе прибавим и вычтем $B^2\sin^2\varphi$ для выделения полного квадрата: $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2 * \left(\frac{A^2*\cos^2\varphi + 2*A*B*\cos\varphi*\sin\varphi + B^2*\sin^2\varphi - B^2*\sin^2\varphi + A*C*\sin^2\varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A}\right) = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\left(\frac{(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2}{A} + \frac{(AC - B^2)\sin^2\varphi + \varepsilon_1(\Delta\rho)}{A}\right)$, где $\varepsilon_1(\Delta\rho) = \varepsilon(\Delta\rho) * A$, что все равно является малой величиной. Теперь рассмотрим четыре возможных случая:

1. $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$. В этом случае весь числитель нашего выражение будет положителен. (В некоторой окрестности точки (x_0, y_0) будет выполняться неравенство $(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$, так как последнее является бесконечно малой величиной). Знаменатель также положителен. Отсюда следует, что $\Delta f > 0$, а значит, точка (x_0, y_0) является точкой минимума.
2. $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$. Числитель так же положителен, но вот знаменатель отрицателен. (В некоторой окрестности точки (x_0, y_0) будет выполняться неравенство $(A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi > |\varepsilon_1(\Delta\rho)|$, так как последнее является бесконечно малой величиной). Отсюда следует, что $\Delta f < 0$, а значит, точка (x_0, y_0) является точкой максимума.
3. $AC - B^2 < 0$ и $A > 0$. Если мы возьмем $\sin\varphi = 0$, т.е. $\varphi = 0$ (приравняем к нулю второе слагаемое числителя), то, рассуждая аналогично предыдущим пунктам, получим что $\Delta f > 0$ в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). А если теперь мы приравняем к нулю первое слагаемое числителя, $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$, то $\Delta f < 0$. Как видим, у нас есть направление угла, по которому функция возрастает, и направление угла, по которому функция убывает. Следовательно, экстремума нет, точка (x_0, y_0) является седловой точкой.
4. $AC - B^2 = 0$. Тогда для $\tan\varphi = -\frac{A}{B}$ (первое слагаемое обращается в ноль) выражение примет вид $\Delta f = \frac{1}{2}(\Delta\rho)^2\varepsilon(\Delta\rho)$. В этом случае все будет определяться знаком $\varepsilon(\Delta\rho)$, а для выяснения этого требуется дополнительно исследование.

<u>Замечание.</u> Теорему можно обобщить на n переменных. Знак приращения определяется прежде всего вторым дифференциалом, а все частные производные содержатся в матрице Гессе, именуемой квадратичной формой. Если она определена и положительна, тогда максимум, отрицательная – минимум, если ноль, то нет экстремума, а если положительна и отрицательна по различным направлениям, то это седловая точка и требуется дополнительно исследование.

Обыкновенные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения. Задача Коши. Изоклины.

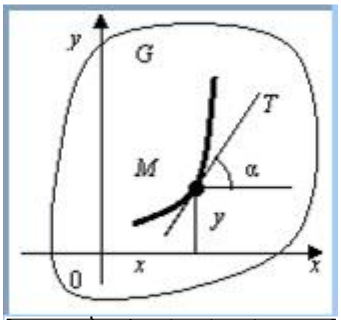
Уравнение вида $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ называется дифференциальным. Причем порядок старшей производной этого уравнения будет называться порядком этого уравнения. Пример: $(y'')^3 + y'x + yx^2 = 0$ – дифференциальное уравнение второго порядка.

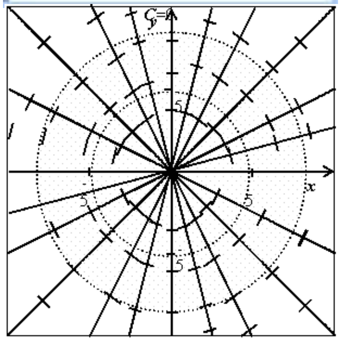
Частным решением дифференциального уравнения называется любая функция $y(x)$, подстановка которой обращает выражение $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ в верное тождество. Пример: $y'' + y = 0$. $y = \sin x$, $y = c_1\sin x$, $y = c_1\cos x$, $y = c_1\sin x + c_2\cos x$ – частные решения этого уравнения. Таких решений может быть несколько.

Общим решением дифференциального уравнения $F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ называется такое $y = \varphi(c_1, c_2, \dots, c_n, x)$, если оно является частным решением уравнения при всех допустимых значениях констант $c_1, c_2, \dots, c_n$, а также если для любого частного решения существуют такие константы $c_1 = c_{10}, c_2 = c_{20}, \dots, c_n = c_{n0}$, что $\varphi(x) = \varphi(c_{10}, c_{20}, \dots, c_{n0}, x)$, то есть если всегда можно подобрать константы для получения решения.

Уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной

Уравнение вида $y^{(n)} = f\big(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}\big)$ называется разрешенным относительно старшей производной. Пример: $y' = f(x, y)$. К такому виду дифференциальное уравнение можно привести не всегда.





Геометрический смысл: если функция задана в подобном виде, то в каждой точке некоторой области, на которой определена эта функция, мы можем вычислить ее производную, то есть тангенс угла наклона касательной. Если есть частное решение $y = \varphi(x)$, то его график называется интегральной кривой. Пусть $f(x, y)$ определена в некоторой области $D \in R^2$. Она задает значение в каждой точке. Тогда в каждой точке области будет задан вектор, касательный к интегральной кривой. Тогда, построив эти вектора, можно будет нарисовать интегральную кривую. $f(x, y)$ задает в D касательные векторы к интегральным кривым. Линии уровня вида $f(x, y) = c$ называются изоклинами. Пример: $y' = -\frac{x}{y}$. $-\frac{x}{y} = c$ – изоклины. $y = -\frac{1}{c}x$. Пусть $-\frac{1}{c} = k$. Тогда $y = kx$, то есть линии уровня представляют собой прямые. Если $k = 1$, то $y = x, y' = -1$. Если $k = -1$, то $y = -x, y' = 1$. Если $k = 0$, то $y = 0, y' = \infty$. Если соединить все получившиеся касательные к интегральным кривым, то получатся окружности. Интегральные кривые представляют собой множество окружностей.

Задача Коши: пусть есть уравнение $y' = f(x, y)$ и точка (x_0, y_0), принадлежащая D, а также значение функции в точке x_0: $y(x_0) = y_0$. Последнее условие называется начальным условием. Задача состоит в следующем: требуется найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, которое удовлетворяло бы начальному условию (поиск такой интегральной кривой, которая бы проходила через точку (x_0, y_0)).

Оказывается, если функция $f(x, y)$ непрерывна в D и частная производная $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна в D, то для любой точки (x_0, y_0) существует единственная функция $y = \varphi(x)$, являющаяся решением $y' = f(x, y)$, которая удовлетворяет начальному условию, т.е. решает задачу Коши, и для которой в некоторой окрестности точки x_0 значения $\big(x, \varphi(x)\big)$ лежат в области D. (При выполнении условий через некоторую точку области D проходит единственная интегральная кривая, которая хотя бы в окрестности этой точки будет лежать в области D).

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными и с однородной функцией

Уравнения с разделяющимися переменными

Так как $y' = \frac{dy}{dx}$, то $dy = f(x, y)dx$. Пусть есть функция $f(x, y)$. Ее можно расписать как $f_1(x)f_2(y)$. Уравнение вида $dy = f_1(x)f_2(y)dx$ называется уравнением с разделяющимися переменными (их можно разделить), а уравнение вида $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ называется уравнением с разделенными переменными ($dG(y) = dF(x) \to G(y) = F(x) + c$), где F и G – первообразные от $f_1(x)$ и $\frac{1}{f_2(y)}$. Получится, что можно проинтегрировать: $\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$. Почти все решения дифференциальных уравнений сводятся к подобному разделению.

В частности, $M_1(x)M_2(y)dy = N_1(x)N_2(y)dx$ – обычный вид уравнения с разделяющимися переменными. Можно привести к уравнению с разделенными: $\frac{M_2}{N_2}(y)dy = \frac{N_1}{M_1}(x)dx$.

Уравнения с однородной функцией

Функция $F(x, y)$ называется однородной функцией n – го измерения, если $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$.

<u>Пример:</u> $F(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 = t^2x^2 + 2t^2xy + 3t^2y^2 = t^2(x^2 + 2xy + 3y^2)$ – однородная функция второго измерения.

В частности, если $F(tx, ty) = F(x, y)$, то $F(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения.

<u>Замечание.</u> Если F и G – однородные функции n – го измерения, то $\frac{F}{G}$ – однородная функция нулевого измерения.

Если $y' = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения, то $y' = f(x, y)$ называется дифференциальным уравнением первого порядка с однородной функцией.

<u>Замечание.</u> Если $G(x, y)dy = F(x, y)dx$, где F, G – однородные функции n – го измерения, то такое уравнение будет называться дифференциальным уравнением с однородной функцией.

Принцип решения: делается замена $y = xu(x); y' = u(x) + xu'(x); f(x, u * x) = f(1, u)$. Получаем $u + xu' = f(1,u); xu' = f(1,u) - u; \frac{du}{f(1,u)-u} = \frac{dx}{x}$.

Пример: $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}; y = xu; u'x + u = \frac{1}{u} + u; udu = \frac{dx}{x}; \frac{u^2}{2} = \ln|x| + \ln|c|; e^{\frac{y^2}{2x^2}} = cx$. Последнее называется общим интегралом.

Линейные уравнения первого порядка и уравнения Бернулли

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)$ называется линейным дифференциальным уравнением. Если $q(x) = 0$, то уравнение будет однородным. Если $q(x) \neq 0$, то будет неоднородным. Оказывается, что однородное линейное дифференциальное уравнение $y' + p(x)y = 0$ является уравнением с разделяющимися переменными: разделим и проинтегрируем $\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \ln|y| = -\int p(x)dx + c_1; y = e^{c_1}e^{-\int p(x)dx} = ce^{-\int p(x)dx}$. Последнее является общим решением линейного дифференциального уравнения.

Решение уравнений вида $y' + p(x)y = q(x)$.

1. Решение однородного уравнения $y' + p(x)y = 0$. $\frac{dy}{dx} = -p(x)y; \frac{dy}{y} = -p(x)dx; y = ce^{-\int p(x)dx}$. Последнее является общим решением однородного уравнения. Тогда частным решением при $c = 1$ будет являться $y_0 = e^{-\int p(x)dx}$.
2. Решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = c(x)y_0(x)$, где y_0 – частное решение однородного уравнения. Подставим в уравнение: $c'(x)y_0 + c(x)y_0' + p(x)c(x)y_0 = q(x)$. Второе и третье слагаемые в сумме равны нулю, т.к. y_0 – частное решение однородного уравнения. Отсюда получаем $c'(x)y_0 = q(x); c'(x) = \frac{q(x)}{y_0}; c = \int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1$. Получается, что общее решение неоднородного уравнения будет иметь вид $y(x) = \left(\int \frac{q(x)}{y_0}dx + c_1\right)y_0$.

Пример: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$. Однородное: $y' + 2xy = 0; \frac{dy}{y} = -2xdx; \ln|y| = \ln|c| - x^2; y = ce^{-x^2}$ – общее решение. Тогда $y_0 = e^{-x^2}$ – частное решение. Неоднородное: $y = c(x)e^{-x^2}$. Подставим $y' = c'(x)e^{-x^2} - c(x) * 2xe^{-x^2} + c(x) * 2xe^{-x^2} = xe^{-x^2}$. При решении данным методом обязательно должны сократиться слагаемые, содержащие $c(x)$. В противном случае было неверно найдено общее решение однородного уравнения. $c'(x) = x; c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1; y = \left(\frac{x^2}{2} + c_1\right)e^{-x^2}$ – общее решение неоднородного уравнения.

Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$, где $\alpha \neq 1{,}0$ (потому что в противном случае получим линейное однородное уравнение). Будем решать это уравнение методом Бернулли. Искать решение будем в виде $y = u(x)v(x)$. Подставим в исходное уравнение. $u'v + uv' + puv = q(x)u^\alpha v^\alpha; v(u' + pu) + uv' = q(x)u^\alpha v^\alpha$. Потребуем $v(u' + pu) = 0$. Тогда u_0 – частное решение. $u_0 v' = q(x)u_0^\alpha v^\alpha; \frac{dv}{v^\alpha} = q(x)u_0^{\alpha-1}dx$.

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Уравнение вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, если $d\Phi = M(x,y)dx + N(x,y)dy$, называется уравнением в полных дифференциалах, т.е. если $M(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; N(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Если $d\Phi = 0$, то $\Phi(x,y) = c$. Последнее называется общим интегралом.

Теорема 26. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Доказательство. Пусть есть уравнение в полных дифференциалах, т.е. существует такая функция $\Phi(x,y)$, что $M(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x}; N(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Тогда $\frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Замечание. Пусть функции M и N дважды дифференцируемые функции. $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ не всегда является уравнением в полных дифференциалах, но всегда существует интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ такой, что $\mu M(x,y) + \mu N(x,y)dy = 0$ будет являться уравнением в полных дифференциалах.

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

$F(x, y', y'') = 0$

Замена $y' = z(x); y'' = z'(x)$. Уравнение приводится к уравнению первого порядка $F(x, z, z') = 0$.

Пример: $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}; z(x) = y'(x); xz' = z\ln\frac{z}{x}; z' = \frac{z}{x}\ln\frac{z}{x}; u = \frac{z}{x}; z = ux; u'x + u = u\ln u; \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}; \ln|\ln u - 1| = \ln|x| + \ln c; \ln u - 1 = cx; u = e^{cx+1}; \frac{z}{x} = e^{cx+1}; z = xe^{cx+1}; y' = xe^{cx+1}; y = \int xe^{cx+1}dx$. Не забывайте про вторую константу.

$F(y, y', y'') = 0$

Замена $y' = p(y); y''_{xx} = p'(y)y'_x = p'_y p$. Уравнение приводится к уравнению первого порядка $F(y, p, p' * p) = 0$.

Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков. Определитель Вронского и его свойства

Уравнение вида $a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(y-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$, где $a_0 \neq 0$, называется линейным дифференциальным уравнением n – го порядка. Если $f(x) = 0$, то оно будет являться линейным однородным дифференциальным уравнением.

Не умоляя общности, будем рассматривать уравнения второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0\ (*)$.

Теорема 27. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются частными решениями $(*)$, тогда $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ тоже будет являться частным решением $(*)$.

Доказательство. Подстановкой.

Замечание. Теорема обобщается на уравнения n – го порядка.

Пусть функции $f_1(x), \dots, f_n(x)$ определены на отрезке $[a; b]$. Их комбинация будет являться линейно-независимой, если из равенства $c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$ следует $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

Функции f_1, f_2 линейно-зависимы, если существует нулевая линейная комбинация с константами, среди которых хотя бы одна отлична от нуля.

Пример: $f_1(x) = x; f_2 = x^2$ – линейно-независимы, $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = x + x^2$ – линейно-зависимы.

Пусть функции $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ определены на отрезке $[a; b]$ и дифференцируемы $n - 1$ раз. Тогда определитель матрицы $W(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_n \\ f_1' & f_2' & \dots & f_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(n-1)} & f_1^{(n-1)} & \dots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ будет называться определителем Вронского, или вронскианом. Если он равен нулю, то функции, на которых он построен, линейно-зависимы.

Теорема 28. Пусть функции $y = \varphi_1(x), y = \varphi_2(x)$ линейно зависимы и дифференцируемы на отрезке $[a; b]$. Тогда $W(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ на этом отрезке.

Доказательство. Если эти функции линейно зависимы, то выполняется равенство $\varphi_2(x) = \lambda\varphi_1(x)$, $\lambda \neq 0$. Тогда $W(\varphi_1, \varphi_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \lambda\varphi_1 \\ \varphi_1' & \lambda\varphi_1' \end{vmatrix} = 0$.

Замечание. Теорема распространяется на случай n функций.

Теорема 29. Рассмотрим однородное линейное уравнение $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$. Пусть y_1, y_2 – решения этого уравнения на отрезке $[a; b]$. Пусть $x_0 \in (a; b)$ и $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Тогда для любого x на отрезке $[a; b]$ $W(y_1, y_2) \neq 0$.

Доказательство. Так как y_1, y_2 – решения, то подставим их и составим систему $\begin{cases} y_1'' + a_1y_1' + a_2y_1 = 0| * y_2 \\ y_2'' + a_1y_2' + a_2y_2 = 0| * y_1 \end{cases}$. Вычитаем второе из первого и получаем $y_1''y_2 - y_2''y_1 + a_1(y_1'y_2 - y_1y_2') = 0$. Но $(y_1'y_2 - y_1y_2')' = y_1''y_2 + y_1'y_2' - y_1'y_2' - y_1y_2'' = y_1''y_2 - y_1y_2''$ и $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$. Тогда $-W'(y_1, y_2) - a_1W(y_1, y_2) = 0$. $\frac{W'}{W} = -a_1(x)$. Проинтегрировав, получаем $\ln|W| = -\int_{x_0}^{x} a_1dx$. $W = W(x_0) * e^{-\int_{x_0}^{x} a_1dx}$. По условию $W(x_0) \neq 0$. А значит и все выражение не обращается в ноль.

<u>Замечание.</u> Пусть y_1, y_2 – решения линейного однородного дифференциального уравнения на отрезке $[a; b]$ такие, что в какой-то точке этого отрезка $W(y_1, y_0)(x_0) = 0$. Тогда $W(y_1, y_2)(x) = 0$ на всем отрезке $[a; b]$.

<u>Теорема 30.</u> Пусть y_1, y_2 – линейно-независимые решения однородного линейного уравнения $y'' + a_1(x)y' + a_2 y = 0$. Тогда $W(y_1, y_2) \neq 0$ на отрезке $[a; b]$. Без доказательства.

<u>Теорема 31.</u> Общее решение $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ представимо в виде $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, где $y_1(x), y_2(x)$ – линейно-независимые частные решения линейного однородного дифференциального уравнения.

<u>Доказательство.</u> Так как y_1 и y_2 – решения, то $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ – тоже решение. Пусть есть некоторая задача Коши. $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'$. Покажем, что существуют такие c_1, c_2, что $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ решают задачу Коши. $\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' \end{cases}$. Следовательно, $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ – определитель системы. Следовательно, система имеет единственное решение c_1, c_2.

<u>Замечание.</u> Теорема распространяется на случай линейного однородного уравнения n-го порядка. Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ – линейно-независимые частные решения уравнения $y^{(n)}(x) + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$. Тогда $y = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ является общим решением.

Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ (далее - $(*)$).

<u>Теорема 32.</u> Общее решение $(*)$ представляется как сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения: $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_ч(x)$, где $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = \bar{y}$ – общее решение однородного уравнения, $y_ч(x)$ – частное решение $(*)$.

<u>Доказательство.</u> Просто возьмем и подставим $y(x)$ в уравнение: $c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + y_ч'' + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2' + y_ч') + a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_ч) = c_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + y_ч'' + a_1(x)y_ч' + a_2(x)y_ч = f(x)$. Первые двое слагаемых равны нулю в силу того, что y_1, y_2 – частные решения однородного уравнения. Третье слагаемое является частным решением неоднородного уравнения. Получаем, что это выражение является решением уравнения $(*)$. Теперь надо сделать, чтобы решалась задача Коши. Пусть $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$. Тогда $y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + y_ч(x_0) = y_0, y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + y_ч(x_0) = y_0'$. Следовательно, $\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y_0 - y_ч(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y_0' - y_ч'(x_0) \end{cases}$. Выходит, что определитель этой системы $W(y_1, y_2)(x_0)$ построен на линейно-независимых решениях однородного уравнения и отличен от нуля. Тогда система имеет единственное решение c_1, c_2.

<u>Замечание.</u> Теорема распространяется на случай линейного неоднородного уравнения порядка n.

Метод вариации произвольных постоянных

Не ограничивая общности, рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$. Пусть $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$ – общее решение однородного уравнения. Частное решение неоднородного уравнения можно искать в виде $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ (y_1, y_2 – линейно-независимые решения однородного уравнения). $y' = c_1' y_1 + c_1 y_1' + c_2' y_2 + c_2 y_2'$. Потребуем $c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0$. Тогда получим $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$. $y'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$. Подставим y'', y' в уравнение. Получаем $c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2'' + a_1(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + a_2(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$. Выражаем в виде $c_1(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1) + c_2(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2) + c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$. Первое и второе слагаемые равны нулю, так что получаем $c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$. Составим систему $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$, определитель которой $W(y_1, y_2)$ в каждой точке x отличен от нуля. Значит, система имеет единственное решение $c_1'(x), c_2'(x)$. После этого интегрируем и получаем $c_1(x), c_2(x)$.

Линейные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение

Рассмотрим неоднородное уравнение $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x)$, где $a_1, \dots, a_n$ – константы. Если $f(x) = 0$, то уравнение однородное.

Однородные уравнения второго порядка

Рассмотрим однородное уравнение $y'' + py' + qy = 0$, где p, q – константы. Будем решение уравнения в виде $y = e^{kx}$, где k – константа. Тогда $y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}$. После подстановки в уравнение получим

$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$. Сократив, получим $k^2+p+q=0$ – характеристическое уравнение дифференциального уравнения. Если k – корень этого уравнения, тогда $y=e^{kx}$ – решение дифференциального. Отдельные случаи:

1. $k_1\neq k_2$ – различные действительные корни. Пусть $y_1=e^{k_1x}, y_2=e^{k_2x}$. Тогда, если они линейно-зависимы, то $y_2=\lambda y_1, \lambda=\frac{y_2}{y_1}=\frac{e^{k_2x}}{e^{k_1x}}=e^{x(k_2-k_1)}$, чего не может быть в силе того, что $k_1\neq k_2$. Следовательно y_1,y_2 линейно-независимы. Тогда общее решение будет выглядеть в виде $y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$.
2. $k_1=k_2$ – действительные корни второй кратности. Пусть $y_1=e^{k_1x}, y_2=e^{k_2x}$. Они линейно-зависимы. Покажем, что $y_2=xe^{k_1x}$. Будем искать второе линейно-независимое решение в виде $y_2=U(x)e^{k_1x}$. $y_2'=U'(x)e^{k_1x}+k_1U(x)e^{k_1x}, y_2''=U''(x)e^{k_1x}+U'(x)k_1e^{k_1x}+k_1^2U(x)e^{k_1x}$. Подставим эти два выражения в уравнение: $U''(x)e^{k_1x}+2k_1U'(x)e^{k_1x}+k_1^2U(x)e^{k_1x}+pU'(x)e^{k_1x}+pU(x)k_1e^{k_1x}+qU(x)e^{k_1x}=0$. После сокращения получим $U''(x)+(2k_1+p)U'(x)+(k_1^2+pk_1+q)U(x)=0$. Второе и третье слагаемые равны нулю, так как k_1 – корень второй кратности. Значит, $D=0, k_1=\frac{-p\pm\sqrt{D}}{2}=-\frac{p}{2}$. Выходит, уравнение преобразуется к виду $U''(x)=0$. Следовательно, После двойного интегрирования, $U(x)=A(x)+B$. Так как нам нужно любое частное решение, то можно положить $B=0, A=1, U(x)=x$. Тогда $y_2=xe^{k_1x}$ – линейно-независимое решение с e^{k_1x}. Общее решение: $y=c_1e^{k_1x}+c_2xe^{k_1x}$.
3. k_1,k_2 – комплексные сопряженные корни. Тогда, воспользовавшись формулой Эйлера, получим, что $y_1=e^{\alpha x}e^{i\beta x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x$. Аналогично $y_2=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Теорема 33.</u> Если $y=u(x)+iv(x)$ – решение уравнения $y''+py'+qy=0$, то $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения.

<u>Доказательство.</u> Просто подставим: $u''+iv''+p(u'+iv')+q(u+iv)=0$. Разделим действительную и мнимую части: $u''+pu'+qu+i(v''+pv'+q)=0$. Получаем систему $\begin{cases}u''+pu'+qu=0\\ v''+pv'+qv=0\end{cases}$. Следовательно, $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения.

В качестве $u(x)$ возьмем $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, а в качестве $v(x)$ возьмем $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$. Так как $\frac{y_1}{y_2}=\cot\beta x\not\equiv 0$, то y_1 и y_2 линейно-независимы. Тогда общее решение такого уравнения будет находиться в виде $y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Замечание.</u> Обобщается на уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка. $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=0$. Характеристическое уравнение $k^n+a_{n-1}k^{n-1}+\dots+a_1k+a_0=0$ имеет ровно n корней. Кратному действительному корню k_1 кратности r отвечают r линейно-независимых функций (решений уравнений). $y_1=e^{k_1x}, y_2=xe^{k_1x},\dots,y_r=x^{r-1}e^{k_1x}$. Комплексным корням $\alpha\pm i\beta$ характеристического уравнения кратности r отвечают $2r$ линейно-независимых функций (решений уравнений). $y_1e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x, y_3=xe^{\alpha x}\cos\beta x, y_4=xe^{\alpha x}\sin\beta x,\dots,y_{2n-1}=x^{n-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, y_{2n}=x^{n-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка составляется из линейной комбинации его частных линейно-независимых решений.

Линейные неоднородное дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\dots+a_1y'+a_0y=f(x)\ (*)$, где $a_0,\dots,a_{n-1}$ – константы. Общее решение такого уравнение определяется как сумма общего решения однородного линейного уравнения и любого частного решения неоднородного линейного уравнения: $y=\bar{y}+y^*$.

Не умоляя общности, рассмотрим уравнение второго порядка. $y''+py'+qy=f(x)\ (**)$. Тогда $\bar{y}=c_1y_1+c_2y_2$, где y_1,y_2 – линейно-независимые частные решения однородного уравнения. Как ищется y^*:

1. Если $f(x)=e^{\lambda x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – конкретный многочлен n-й степени.
   a. Если λ не является корнем характеристического уравнения, то $y^*=e^{\lambda x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-й степени с неопределенными коэффициентами. Сокращаем обе части уравнения $(**)$ на $e^{\lambda x}$, после чего получаем линейную систему из $n+1$ уравнений, решая которую мы находим все коэффициенты Q_n.

   <u>Пример.</u> $y''+3y'-4y=e^{2x}(x^3+1)$. Характеристическое уравнение: $\lambda^2+3\lambda-4=0$. Корни $\lambda=-4; 1$. 2 не является корнем характеристического уравнения. Следовательно, $y^*=e^{2x}(ax^3+bx^2+cx+d)$.

   b. Если λ является корнем характеристического уравнения r-й кратности, то $y^*=x^re^{\lambda x}Q_n(x)$.

2. Если $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x\, M_m(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, N_p(x)$, где M_m – многочлен степени m, $N_p(x)$ – многочлен степени p.
    a. Если $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, то $y^* = e^{\alpha x}\cos\beta x\, P_n(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q_n(x)$, где $n = greater(m, p)$, а $P_n(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами.
    b. Если $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения r-й кратности, то $y^* = x^r(e^{\alpha x}\cos\beta x\, P_n(x) + e^{\alpha x}\sin\beta x\, Q_n(x))$.

<u>Замечание.</u> Все эти решения обобщаются и на уравнения n-го порядка.