30 сентября 2011 года

Лекция 5

Работа и энергия

Содержание лекции 5

Работа и мощность. Консервативные и неконсервативные силы. Кинетическая и потенциальная энергия МТ и системы МТ.

Элементарная механическая работа и ее представления: с помощью косинуса угла между соответствующими векторами и с помощью проекции одного вектора на другой. Полная механическая работа, ее графическое представление**. Примеры вычисления работы сил тяжести, упругости, трения. Средняя и мгновенная мощности. Единицы работы и мощности в системе СИ**.

Потенциальное поле сил, его определение. Примеры: поле силы тяжести и поле центральных сил. Примеры неконсервативных сил: трение скольжения, сила сопротивления среды.

Полная механическая энергия МТ и системы МТ. Связь изменения полной механической энергии с работой неконсервативных сил. Закон сохранения полной механической энергии системы МТ. Центральный удар шаров: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары.

5.1. Понятие элементарной механической работы и мощности

Определение: **Работа силы** - мера действия силы, зависящая от численной величины и направления силы и от перемещения точки ее приложения.

Элементарная механическая работа

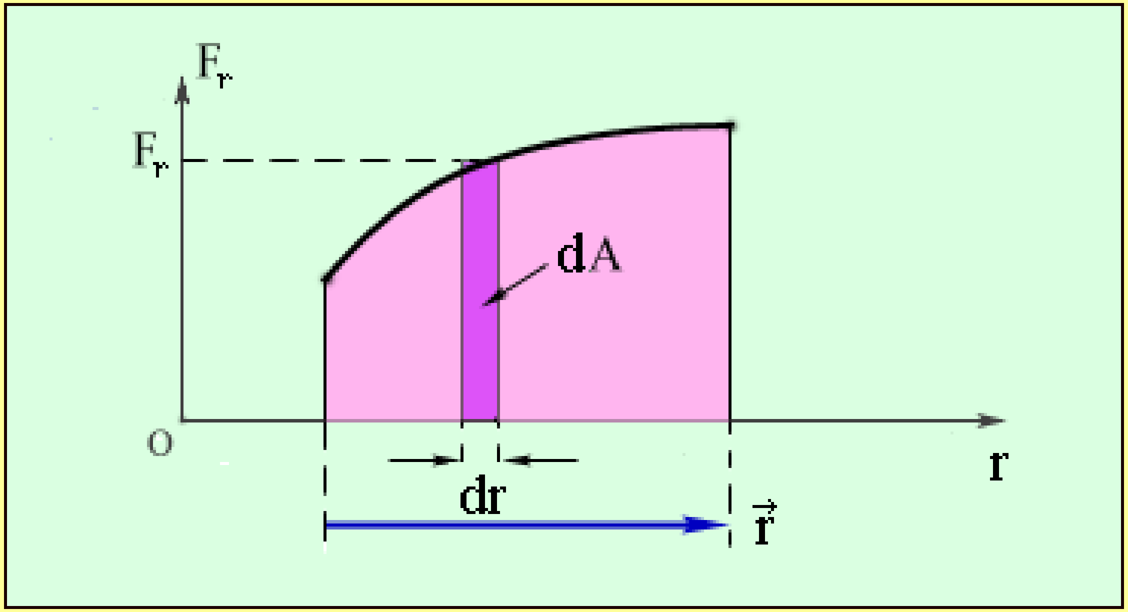
$$\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cdot \mathrm{d}r \cdot \cos\alpha, \qquad (5.1)$$

где $\mathrm{d}r$ - элементарное перемещение, α - угол между направлением силы и касательной к траектории точки ее приложения, направленной в сторону ее перемещения.

$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ **- скалярное произведение векторов (!)**

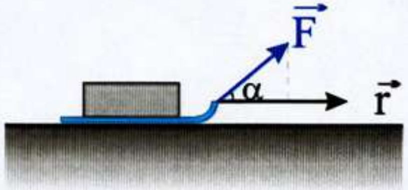
- Если $F = \text{const} \quad \Rightarrow \quad A = F \cdot r$
- Если $F \neq \text{const} \quad \Rightarrow$

$$A = \int_1^2 \mathrm{d}A = \int_1^2 \vec{F} \mathrm{d}\vec{r} = \int_1^2 F_\mathrm{r} \mathrm{d}r$$



- $[A]$ = Дж = Н · м = кг · м^2 / с^2

МЕХАНИКА ► Работа

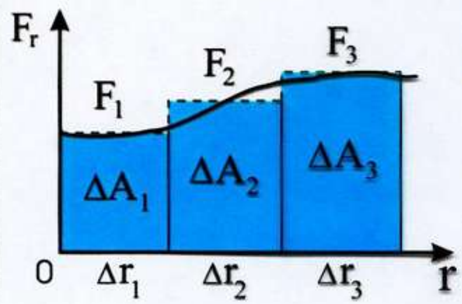


$\vec{F}=\text{const}$

$$A = F\, r \cos\alpha = F\, r$$

$$\alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow A > 0 \qquad \alpha > \frac{\pi}{2} \rightarrow A < 0$$

1 (Дж) = 1 (Н) · 1 (м)

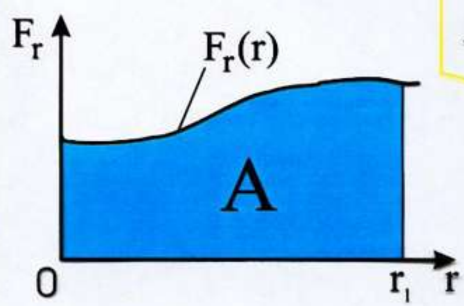


$$A_1 = F_1 \Delta r_1, \quad A_2 = F_2 \Delta r_2, \quad A_3 = F_3 \Delta r_3$$

$$A \approx \Delta A_1 + \Delta A_2 + \Delta A_3$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{3} F_{ri} \Delta r_i$$

Дополнительная информация



$$A = \lim \sum_{i=1}^{\infty} F_{ri} \Delta r_i = \int_0^{r_1} F_r\, dr$$

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} d\vec{r}$$

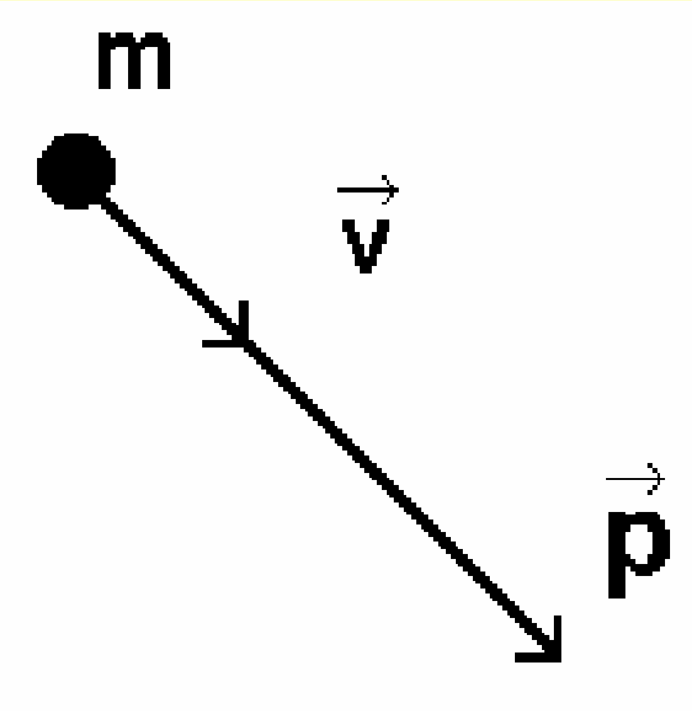
Мощность силы - это работа, совершаемая силой, в единицу времени:

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \qquad (5.2)$$

- $[P]$ = Вт = кг · м^2 / с^3

5.2. Кинетическая энергия

Рассмотрим простейшую (нам знакомую) механическую систему :



Для этой МТ уравнение движения имеет вид (2-ой закон Ньютона):

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \;\Big|\; \times\; \mathrm{d}\vec{r}, \quad \text{где} \;\; \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\cdot\mathrm{d}t\;.$$

Далее,

$$m\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r}\;.$$

Отметим, что $\dot{\vec{v}}\cdot\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{v}$, тогда

$$m\vec{v}\cdot(\dot{\vec{v}}\cdot\mathrm{d}t) = m\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{v} = m\cdot\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}.$$

Если система <u>замкнута</u>, то :

$$\vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{mv^2}{2} = \mathrm{const}\;.$$

Кинетическая энергия частицы:

$$\boxed{W_{\mathrm{K}} \equiv T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m}}$$

(5.3)

Если система <u>незамкнута</u>, то $\vec{F} \neq 0 \;\Rightarrow\; T \neq \text{const}$ **и:**

Следствие

Причина

$$\boxed{\mathrm{d}T} = \boxed{\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}A,} \qquad (5.4)$$

где $\mathrm{d}T$ – приращение кинетической энергии частицы,

$\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ – скалярное произведение $\boldsymbol{F}$ на $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$,

$\mathrm{d}A$ – элементарная работа, совершаемая силой $\boldsymbol{F}$ на перемещении $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$.

Работа результирующей всех сил, действующих на частицу, идет на приращение кинетической энергии частицы:

$$A = A_{12} = \Delta T = T_2 - T_1 \qquad (5.5)$$

Работа – мера изменения кинетической энергии.

5.3. Консервативная (потенциальная) сила как сила, работа которой над МТ не зависит от формы траектории

- Поле сил
- Центральное поле
- Однородное поле
- Стационарное (нестационарное) поле
- Консервативные силы

- **ПОЛЕ СИЛ (СИЛОВОЕ ПОЛЕ)** - часть пространства (ограниченная или неограниченная), в каждой точке которого на помещенную туда материальную частицу действует сила величина и направление которой зависят либо только от координат x, y, z (***стационарное поле***), либо от координат и времени t (***нестационарное поле***).

- ЦЕНТРАЛЬНОЕ ПОЛЕ -

Потенциальная энергия (ПЭ)

ПЭ называется часть механической энергии системы, зависящая только от ее конфигурации, т.е. от взаимного расположения всех частиц (материальных точек) системы и от их положения во внешнем потенциальном поле.

ПЭ во внешнем поле сил:

$$\mathrm{d}A = -\,\mathrm{d}W_{\text{п}} \quad \text{или} \quad \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -\,\mathrm{d}W_{\text{п}}, \qquad (5.6)$$

где $F_x = -\dfrac{\mathrm{d}W_{\text{п}}}{\mathrm{d}x}, \quad F_y = -\dfrac{\mathrm{d}W_{\text{п}}}{\mathrm{d}y}, \quad F_z = -\dfrac{\mathrm{d}W_{\text{п}}}{\mathrm{d}z}.$

Работа выступает как мера изменения потенциальной энергии, взятая с обратным знаком.

В простейшем случае, для МТ, находящейся в потенциальном поле, связь между силой действующей на точку, и потенциальной энергии этой точки в поле имеет вид:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\mathrm{d}W_{\text{П}}}{\mathrm{d}x} \cdot \vec{i} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{П}}}{\mathrm{d}y} \cdot \vec{j} + \frac{\mathrm{d}W_{\text{П}}}{\mathrm{d}z} \cdot \vec{k} \right)$$

$$\vec{F} = -\operatorname{grad} W_{\text{П}} \qquad (5.7)$$

МЕХАНИКА ➤ **Потенциальная энергия частицы и сила**

Зависимость потенциальной энергии $W_п$ частицы от координаты x

Частица с энергией W_0 может находится в точках с координатами от x_1 до ∞.

$$W_0 = W_п + W_к$$

$$F_x = -\frac{dW_п}{dx}$$

Точки, где $F_x = 0$, представляют собой положения равновесия

$F_x = 0$		$F_x > 0$	$F_x < 0$
	равновесие		
$x = x_2$	*устойчивое*	$x_1 \leqslant x \leqslant x_2$	$x_2 \leqslant x \leqslant x_3$
$x = x_3$	*неустойчивое*		
$x = x_4$	*устойчивое*	$x_3 \leqslant x \leqslant x_4$	$x_4 \leqslant x \leqslant x_5$
$x \geqslant x_5$	*безразличное*		

Конкретный вид функции W_{Π} зависит от характера силового поля.

Пример 1. Потенциальная энергия МТ в однородном силовом поле

Пусть сила F, действующая на точку со стороны поля, направлена вдоль оси OZ, т.е. $F=F_z k$, где k – орт оси OZ, а проекция F_z силы F на ось OZ не зависит от координат точки

(*сделать рисунок*).

Тогда

$$\mathrm{d}W_{\Pi} = -\vec{F}\mathrm{d}\vec{r} = -F_z\mathrm{d}z,$$

$$W_{\Pi}(z) = -F_z z + W_{\Pi}(0).$$

Здесь $\mathrm{W}_{\Pi}(0)$– *значение потенциальной энергии МТ на уровне* $z=0$.

В частности, потенциальная энергия МТ массы m, находящейся в однородном поле силы тяжести у поверхности Земли (ось OZ направлена вертикально вверх, F_z=-mg, g − ускорение свободного падения), равна :

$$W_{\Pi}(z) = mgz + W_{\Pi}(0).$$

При этом **убыль потенциальной энергии** при перемещении системы из произвольного положения 1 в другое положение 2 измеряется той работой $\boldsymbol{A_{12}}$, которую совершают при этом все потенциальные силы (внутренние и внешние), действующие на систему:

$$A_{12} = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2} = -\Delta W_{\Pi} .$$

- *Пример 2.* **Потенциальная энергия МТ в поле центральных сил**

- *Пример 3.* **Потенциальная энергия упругого тела (например, пружины)**

5.4. Закон сохранения полной механической энергии

В замкнутой системе тел, между которыми действуют **<u>только консервативные силы</u>**, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем

$$W = W_{\text{К}} + W_{\text{П}} = \text{const}. \qquad (5.9)$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ	⇔	ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА	⇔	ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА	⇔	ИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА

- **ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ – равнозначность всех моментов времени, т.к. замена момента времени t_1 на t_2 без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы.**

Диссипативные силы (ДС) – силы, связанные с процессом **диссипации** (рассеяния) механической энергии, т.е. с переходом энергии упорядоченного процесса в энергию неупорядоченного процесса (в конечном счете – в тепловую).

Примеры ДС – силы трения, силы вязкости, силы сопротивления среды и др.

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + \Delta Q$$

(5.10)

МЕХАНИКА ➤ **Закон сохранения энергии**

Если на тело или систему тел действуют силы, часть которых является консервативными, а часть - диссипативными, то работа равнодействующей силы равна

$$A = A_{конс} + A_{дисс} = \Delta W_К$$

$$A_{конс} = -\Delta W_П$$

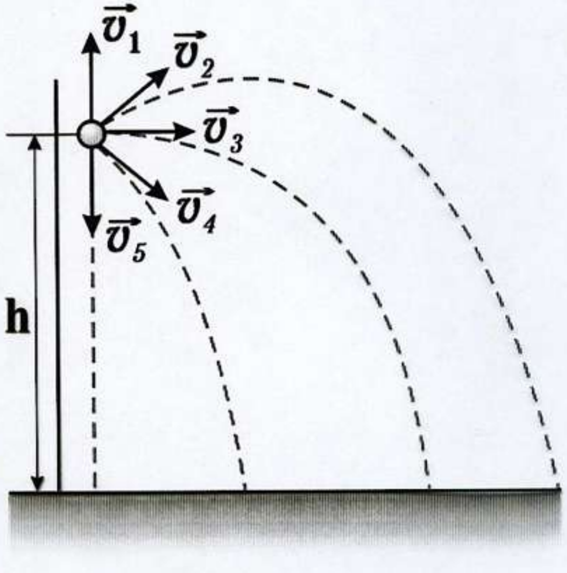
➤ $$A_{дисс} = \Delta W_К + \Delta W_П$$

Если в системе $\vec{F}_{дисс} = 0$ *, то* $A_{дисс} = 0$, т.е. система замкнута

Для консервативной системы

$$\Delta W_К + \Delta W_П = 0$$

$$W_К + W_П = const$$



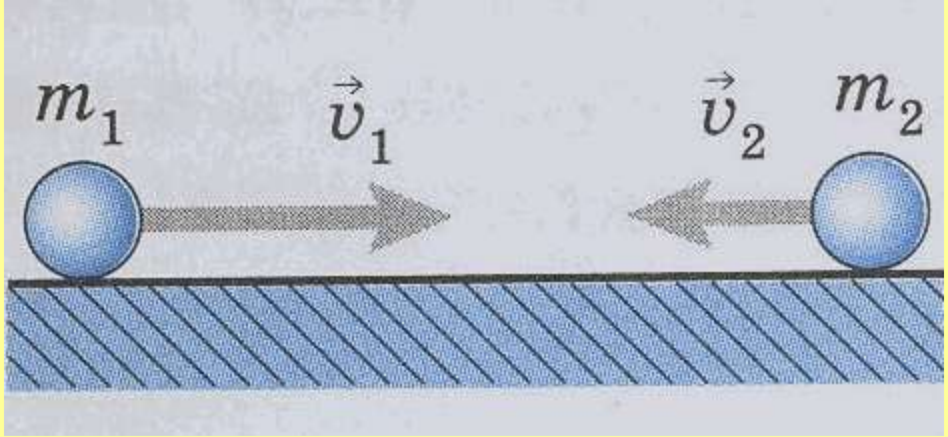
Упражнение :

5 тел массой m брошены с высоты h со скоростями $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v_5$.

Какое из них упадет с большей скоростью ?

Домашнее задание

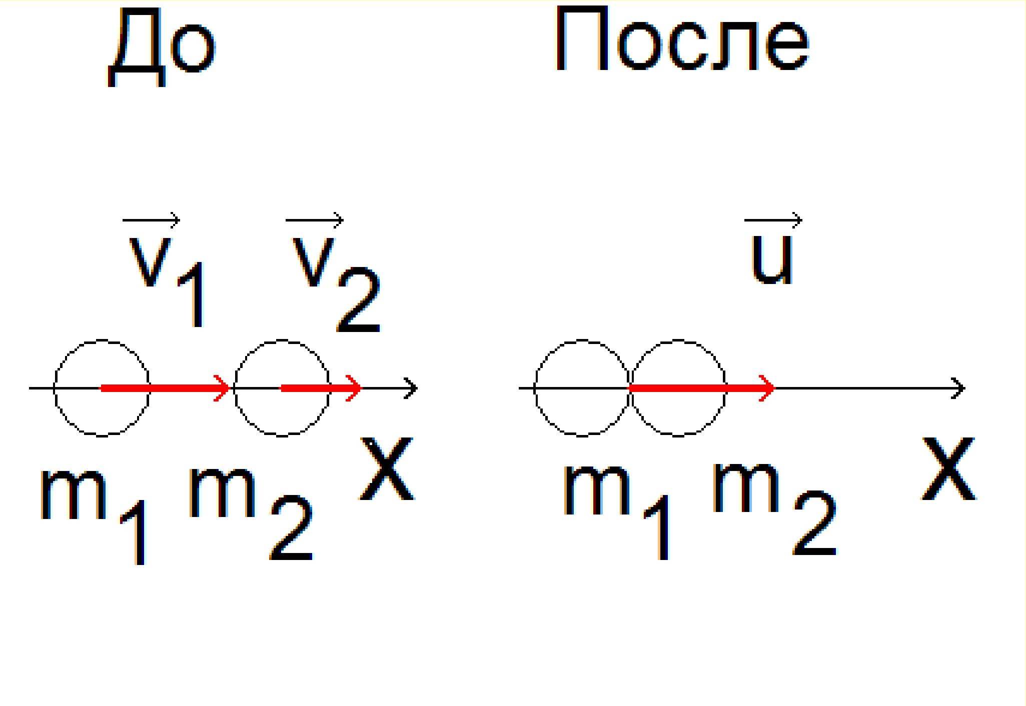
Центральный удар шаров: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары. Рассмотреть с точки зрения выполнения (5.9) или невыполнения закона сохранения полной механической энергии (5.10).



Абсолютно неупругий удар

Имеет место в случае, если после удара оба тела движутся как одно целое.

Пример. В случае центрального удара:



В этом случае можно показать, что после абсолютно неупругого прямого центрального удара тела движутся также поступательно со скоростью (сделать вывод всех последующих формул!)

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Изменение кинетической энергии системы двух сталкивающихся тел

$$\Delta W_K = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_2}{2} v_2^2 =$$

$$= -\frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 < 0$$

Если второе тело до удара покоится, то относительное уменьшение кинетической энергии системы при абсолютно неупругом прямом центральном ударе

$$-\frac{\Delta W_K}{W_{K_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

Абсолютно неупругий прямой центральный удар используется в технике:

- для изменения формы тел (ковка, штамповка, клепка и т.п.);
- для перемещения тел в среде с большим сопротивлением.

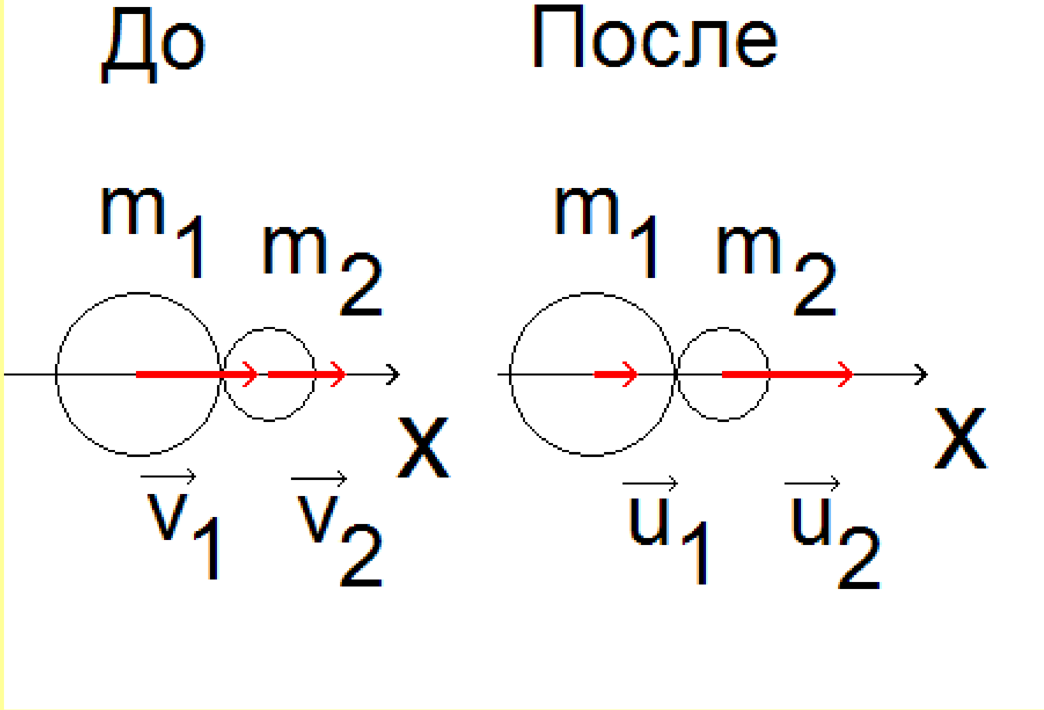
В случае изменения формы тел (ковка, штамповка, клепка и т.п.) необходимо, чтобы $-\Delta W/W \to 1$, т.е. необходимо, чтобы $m_2 >> m_1$ (масса изделия и наковальни должна во много раз превосходить массу молота).

В случае перемещения тел в среде с большим сопротивлением (забивание гвоздей, свай и т.п.) потери кинетической энергии должны быть возможно меньшими, т.е. необходимо чтобы $m_1 >> m_2$ (масса молотка должна во много раз превосходить массу забиваемого гвоздя).

Абсолютно упругий удар

Имеет место в случае, если при этом ударе механическая энергия системы не изменяется, т.е. тела являются абсолютно упругими.

Пример. *Абсолютно упругий прямой центральный удар*:



Для нахождения скоростей u_1 и u_2 воспользуемся законами сохранения импульса и механической энергии:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

Скорости u_1 и u_2 направлены вдоль оси OX, а их проекции на эту ось равны (*сделать вывод!*):

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

В частности,

• *если массы тел одинаковы*, то при ударе тела обмениваются скоростями:

$$u_{1x} = v_{2x} \quad \text{и} \quad u_{2x} = v_{1x};$$

• *если масса второго тела во много раз больше массы первого тела*, то

$$u_{1x} \approx 2v_{2x} - v_{1x} \text{ и } u_{2x} \approx v_{2x}.$$

Дополнительный пример *(самостоятельно)*.

Абсолютно упругий косой центральный удар

Лекция 6

Динамика вращения твердого тела. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!