ЛЕКЦИЯ 4 (12)

(самостоятельно)

ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Содержание Лекции 12:

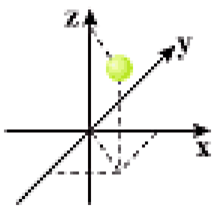
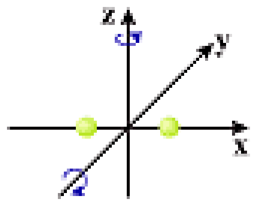
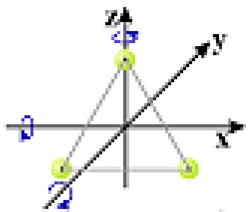
- Степени свободы молекул (поступательные, вращательные, колебательные). Распределение энергии молекул по степеням свободы. **Средняя кинетическая энергия молекул.**
- **Внутренняя энергия идеального газа, его молярная и удельная теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении.** Физический смысл универсальной газовой постоянной. **Уравнение Майера.**
- Адиабатический процесс. **Уравнение адиабаты. Показатель адиабаты.**
- **Работа идеального газа при изохорическом, изобарическом, изотермическом и адиабатическом процессах.**

12.1. Степени свободы молекул (поступательные, вращательные, колебательные). Распределение энергии молекул по степеням свободы. Средняя кинетическая энергия молекул

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Число степеней свободы молекулы

Число степеней свободы молекулы i - число независимых координат, определяющих положение молекулы в пространстве

Одноатомная молекула	Двухатомная молекула	Трёхатомная молекула
		
$i = 3\ (x, y, z)$	$i = 5\ (x, y, z, \alpha, \beta)$	$i = 6\ (x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$

x, y, z - координаты центра масс молекулы,

α, β, γ - углы поворота молекулы относительно трех взаимно-перпендикулярных осей

$$\boxed{i = i_{пост} + i_{вр} + 2i_{колеб}}$$

МОЛЕКУЛА	Характер связи между атомами	Число степеней свободы			i
		поступательное движение	вращательное движение	колебательное движение	
Одноатомная		3			3
Двухатомная	жесткая	3	2		5
Двухатомная	упругая	3	2	1	7
С числом атомов три и выше	жесткая	3	3		6

РНПО Росучприбор Южно-Уральский государственный университет

Примеры:

- МТ (одноатомная частица)

$$i = i_{\text{пост}} = 3 \qquad (\text{оси } x,\, y,\, z)$$

- Двухатомная частица

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 3 + 2 = 5$$

- Трехатомная частица (молекула)

линейная $\quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 3 + 2 = 5$

нелинейная $\quad i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} = 3 + 3 = 6$

Отметим, что во всех примерах рассмотрены «жесткие» молекулы (*положения атомов друг относительно друга остаются неизменными*).

Таким образом, средняя энергия молекулы должна равняться

$$\langle E_i \rangle = \frac{i}{2} \cdot kT,$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2i_{\text{колеб}}$.

<u>Вопрос (*для самостоятельной работы*):</u> Зависит ли число степеней свободы молекулы от температуры? Если зависит, то почему и как зависит?

13.2. Внутренняя энергия идеального газа, его молярная и удельная теплоемкости при постоянном объеме и при постоянном давлении. Физический смысл универсальной газовой постоянной. Уравнение Майера.

Внутренняя энергия ИГ

- для 1 моля ИГ

$$U = N_A \cdot \langle E \rangle = \frac{i}{2} \cdot (N_A \cdot k)T = \frac{i}{2} \cdot RT$$

- для $\nu = m/\mu$ молей ИГ

$$U = \nu \cdot \frac{i}{2} \cdot RT = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot RT$$

Теплоемкость газов

Теплоемкость 1 моля вещества называется **молярной теплоемкостью** и обозначается прописной буквой C_μ; $[C_\mu]$ =Дж/ (моль·К).

Теплоемкость единицы массы вещества называется **удельной теплоемкостью** и обозначается строчной буквой c; $[c]$ =Дж/ (кг·К).

Соотношение между ними:

$c = C_\mu/\mu$, где μ – молярная масса.

Теплоемкость газов

$$C_P = C_V + R$$

- уравнение Майера (вывод).

Молярная теплоемкость при V=const

$$C=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}=\frac{\mathrm{d}U+\mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\mathrm{V=const}}=\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot RT\right)}{\mathrm{d}T}=\frac{\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot R\cdot\mathrm{d}T}{\mathrm{d}T}=\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot R$$

Для $\frac{m}{\mu}=1$ моль:

$$C_{\mathrm{V}}=\frac{i}{2}\cdot R$$

$$[C_{\mathrm{V}}]=\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$$

Молярная теплоемкость при p=const

$$C = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}U + \mathrm{d}A}{\mathrm{d}T}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_{\text{p=const}} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot RT\right) + p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T} = \frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot R + \frac{p\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$$

При $p = \text{const}:\ p\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu}\cdot R\mathrm{d}T \Rightarrow C_{\text{p}} = \frac{i}{2}\cdot\frac{m}{\mu}\cdot R + \frac{m}{\mu}\cdot R$

Тогда для $\frac{m}{\mu} = 1$ моль:

$$C_{\text{p}} = \frac{i}{2}\cdot R + R = C_{\text{V}} + R$$

$$[C_{\text{p}}] = \frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$$

- $C_V = (i/2)R$;
- $C_P = [(i+2)/2]\cdot R$.

$\boldsymbol{\gamma = C_P/C_V = (i+2)/i}$ − коэффициент Пуассона (показатель адиабаты);

$\gamma = (i+2)/i = 1+2/i$

если $i=3 \rightarrow \gamma = 1{,}67$ (одноатомная молекула);

если $i=5 \rightarrow \gamma = 1{,}4$ (двухатомная молекула);

если $i=6 \rightarrow \gamma = 1{,}33$ (трехатомная молекула).

Газовая постоянная R

- Газовая постоянная R –

(*самостоятельно*)

- Газовая постоянная R – универсальная физическая постоянная

- Физический смысл:

работа расширения 1 моля ИГ при постоянном давлении при нагревании на 1 К

- Величина R = 8,31 Дж/(моль·К)

12.3. Адиабатический процесс. Уравнение адиабаты. Показатель адиабаты

Адиабатический (адиабатный) процесс

- Def.: **Термодинамический процесс в макроскопической системе, при котором система не получает и не отдаёт тепловой энергии.**
- Линия, изображающая адиабатный процесс на какой-либо термодинамической диаграмме, называется адиабатой.
- Следовательно: $\mathrm{d}Q = 0$ или Q=const.
- **Изоэнтропийный процесс** (от *изо...* и *энтропия*), процесс в физической системе, при котором сохраняется неизменной энтропия системы, — обратимый *адиабатный процесс*.

Найдем уравнение, связывающее параметры идеального газа при адиабатическом процессе:

$$\begin{cases} \mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A = 0 \\ \mathrm{d}U = \dfrac{m}{\mu} C_V \mathrm{d}T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{m}{\mu} C_V \mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = 0 \\ p = \dfrac{m}{\mu}\dfrac{RT}{V} \end{cases}$$

$$\Rightarrow C_V \mathrm{d}T + RT\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{T} + \frac{R}{C_V}\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\left(\ln T + \frac{R}{C_V}\ln V\right) = 0 \Rightarrow \ln T + \frac{R}{C_V}\ln V = \mathrm{const}.$$

Далее

$$\begin{cases} \dfrac{R}{C_V} = \gamma - 1, \text{ где } \gamma = C_\mathrm{P}/C_\mathrm{V} \\ \ln T + (\gamma - 1)\ln V = \text{const} \end{cases}$$

потенцируя, получаем $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $$TV^{\gamma-1} = \text{const}.$$

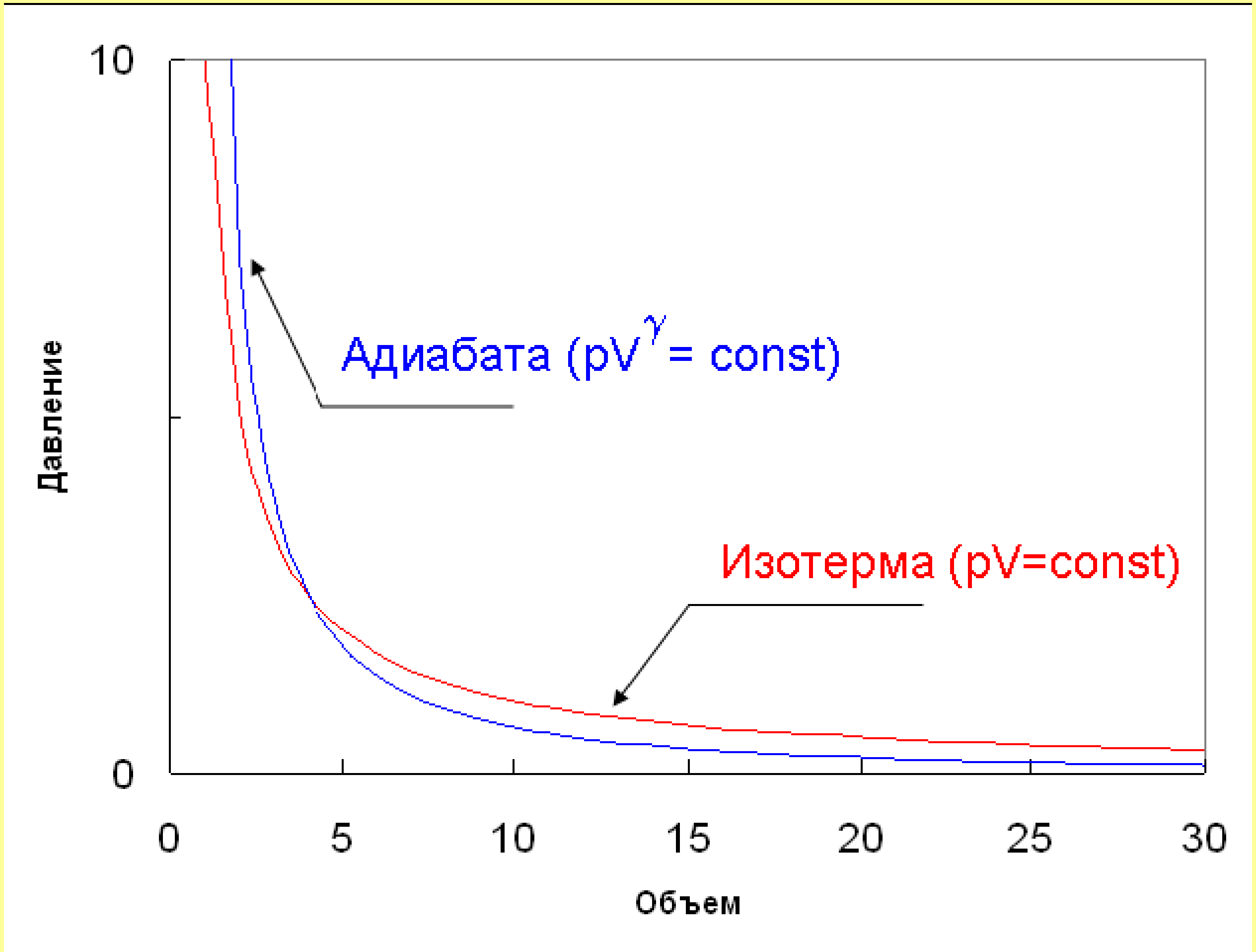
Дальнейшие преобразования приводят к следующим результатам (*самостоятельно*) :

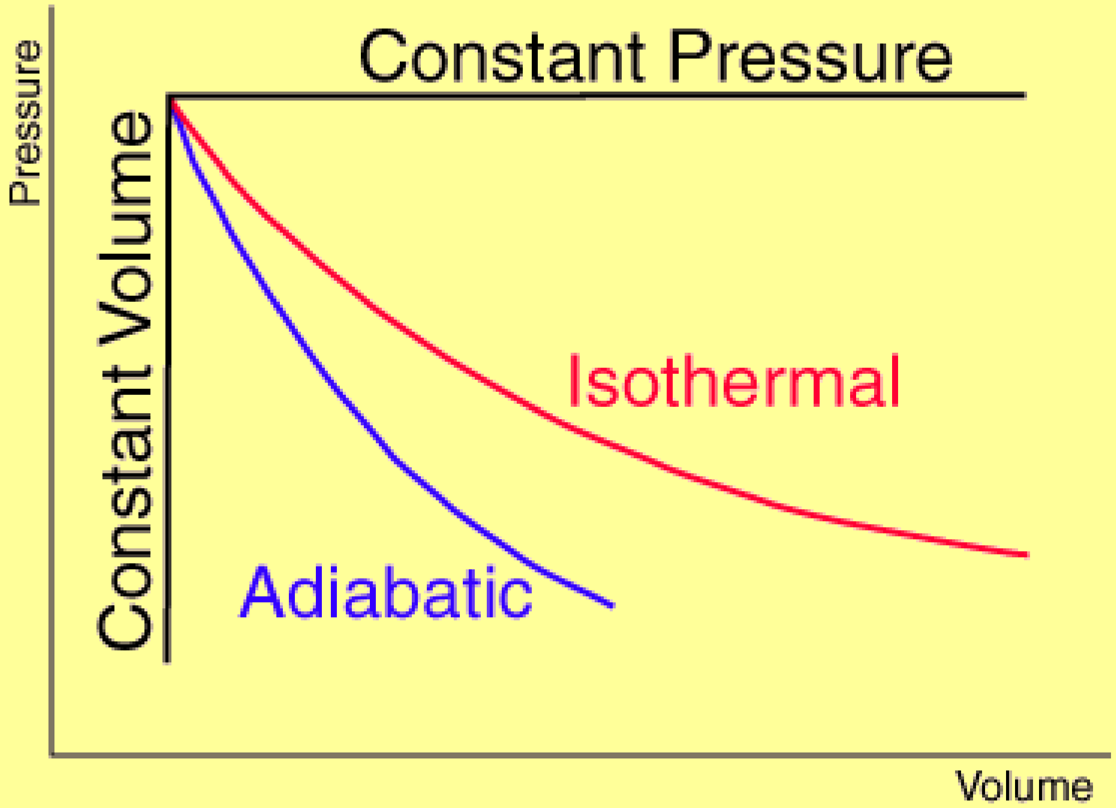
$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \Rightarrow \; pV^{\gamma} = \text{const} \; \Rightarrow$$

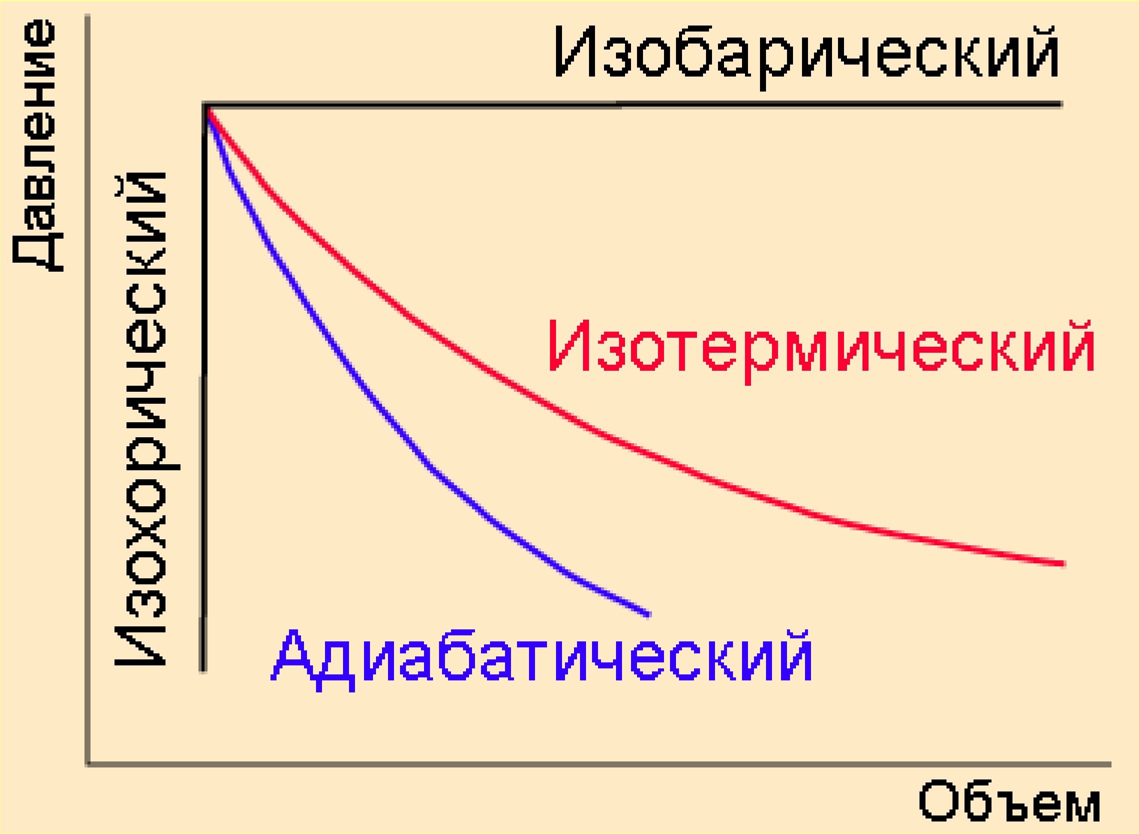
$$\Rightarrow \; f(p, T) = \text{const}.$$

$pV^{\gamma} = \text{const}$ - уравнение Пуассона

Адиабатический процесс




Constant Pressure
Pressure
Constant Volume
Isothermal
Adiabatic
Volume

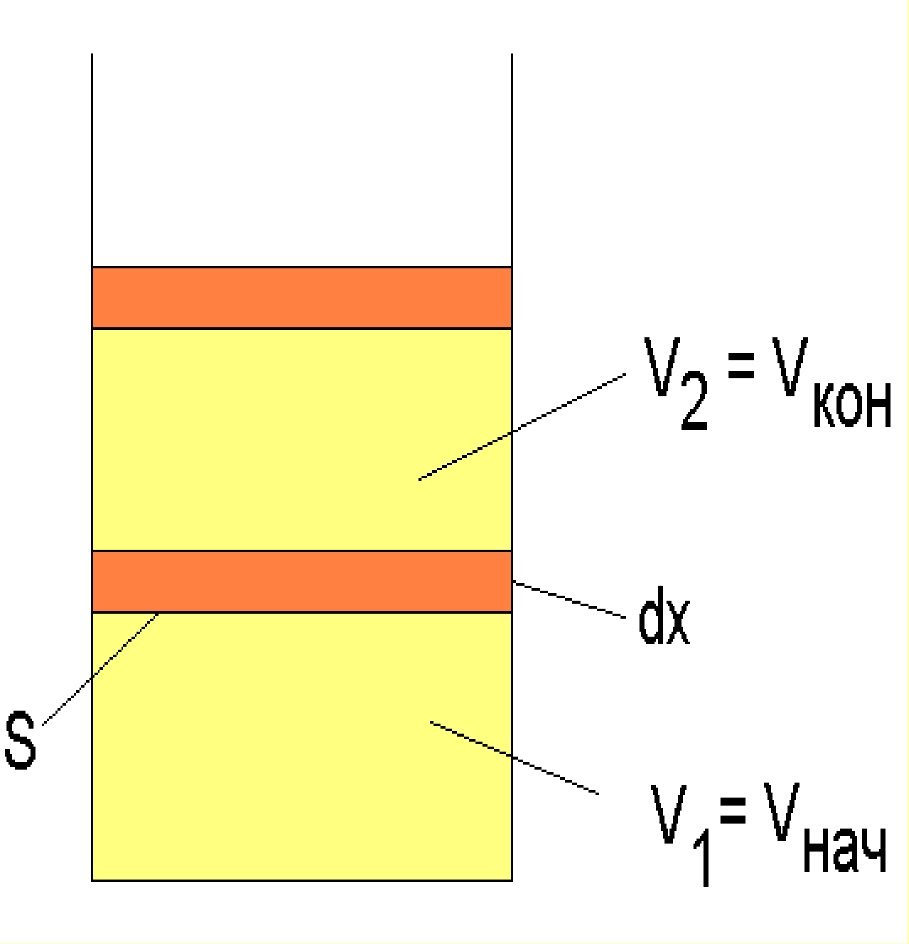

Давление
Изобарический
Изохорический
Изотермический
Адиабатический
Объем

13.4. Работа идеального газа при изохорическом, изобарическом, изотермическом и адиабатическом процессах

Расчет работы A

- $V_{\text{нач}} \Rightarrow V_{\text{кон}}$
- $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x$, где $F = pS$
- $\mathrm{d}A = pS\mathrm{d}x = p\mathrm{d}V$
- **Полная работа A:**

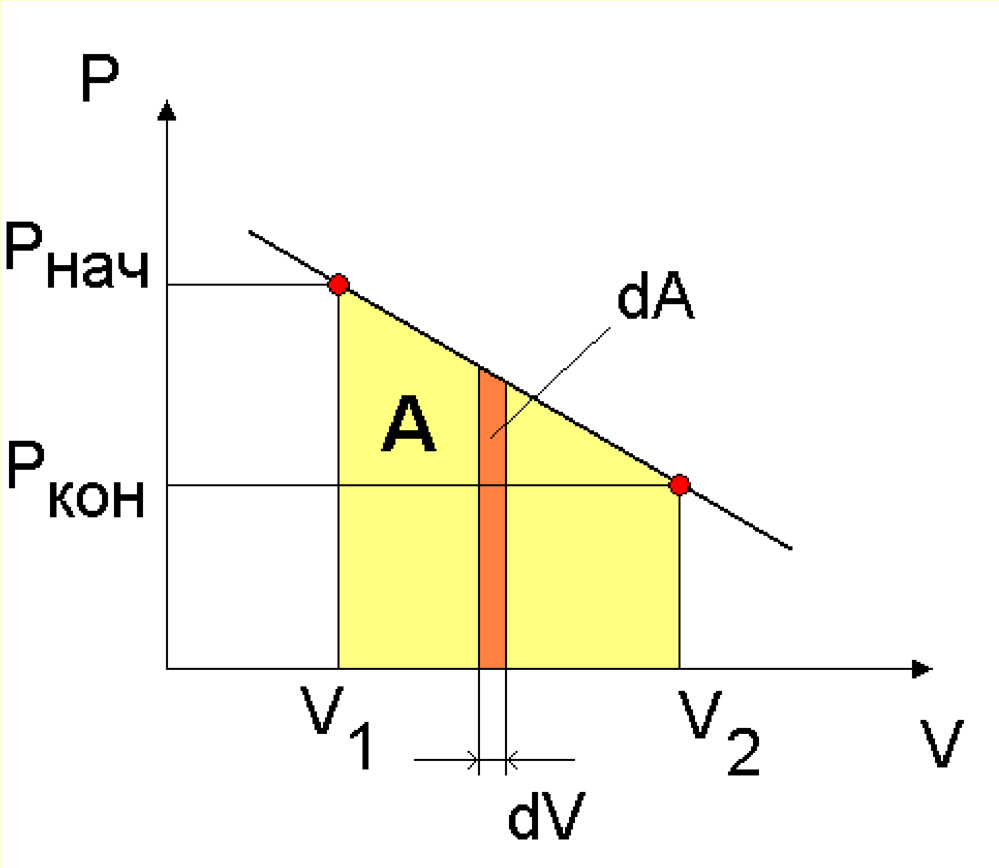
$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$



Расчет работы A

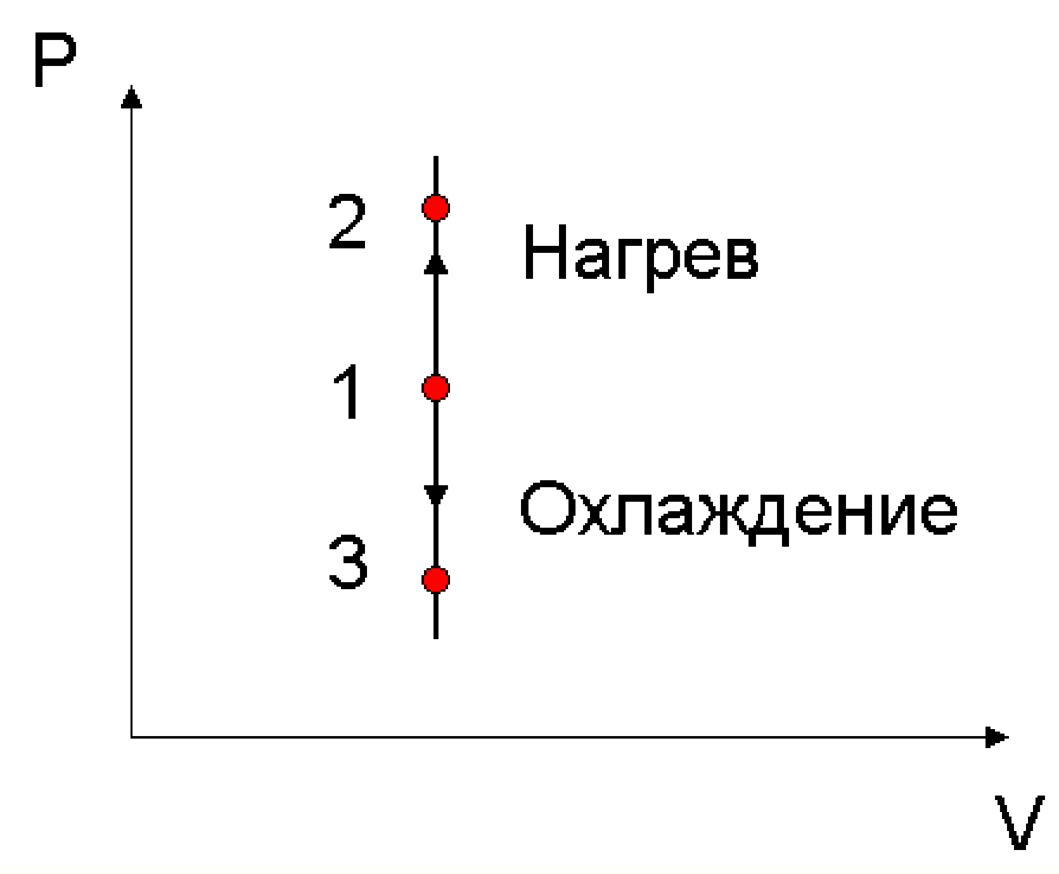
- $V_{\text{нач}} \Rightarrow V_{\text{кон}}$
- $\mathrm{d}A = F\mathrm{d}x$, где $F = pS$
- $\mathrm{d}A = pS\mathrm{d}x = p\mathrm{d}V$
- **Полная работа A:**

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V$$



Изохорический процесс

- $V = \text{const} \Rightarrow \mathrm{d}V = 0$
- $A = 0$



$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot R\mathrm{d}T$$

$$C_{\mathrm{V}} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T} = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot R$$

Изобарический процесс

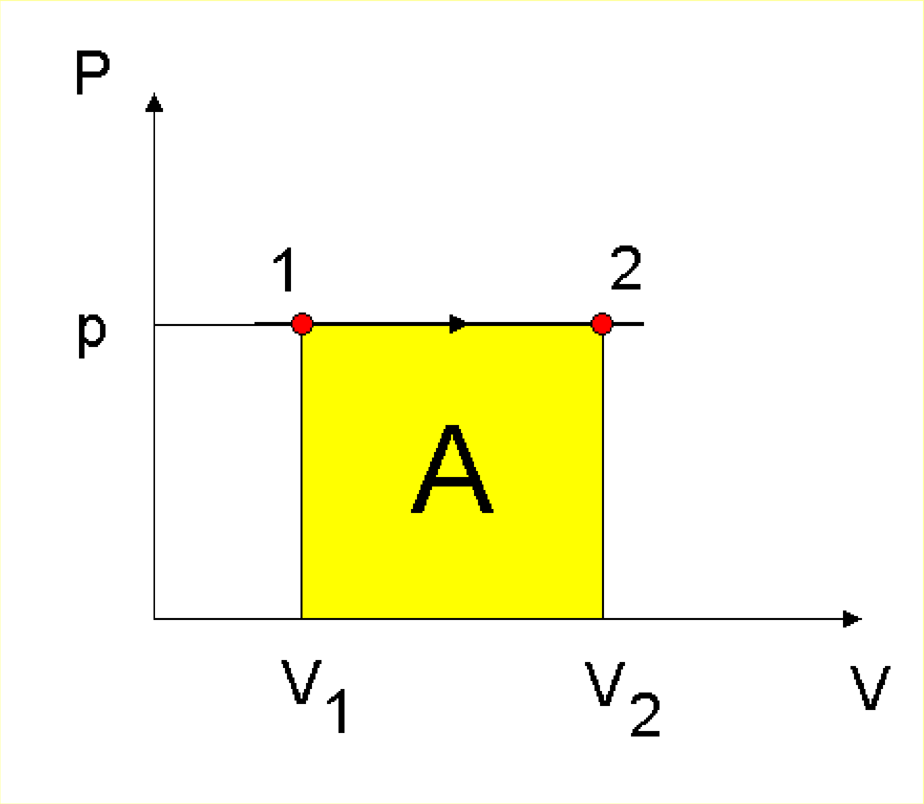
- p = const

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \mathrm{d}V \quad = \quad p \int_{V_1}^{V_2} \mathrm{d}V$$

- $A = p(V_2 - V_1) = p\Delta V$

$$V_2 - V_1 = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{R}{p} \cdot (T_2 - T_1)$$

Тогда:



Изобарический процесс

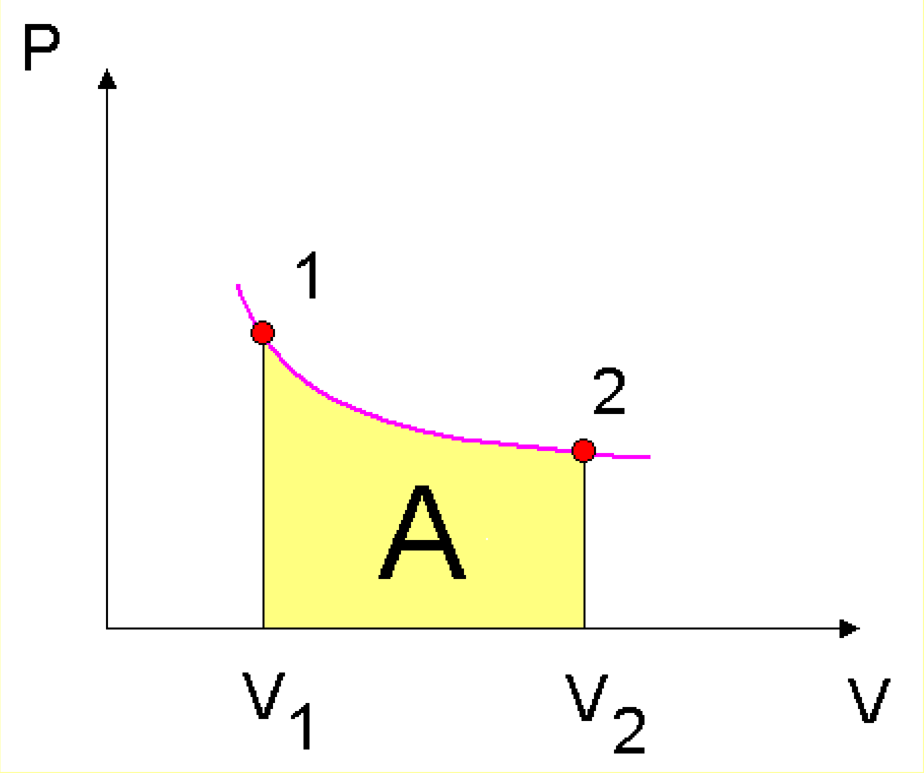
$$A = p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \left(T_2 - T_1\right)$$

$$\mathrm{d}A = p\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu} \cdot R \cdot \mathrm{d}T$$

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A = \frac{m}{\mu} \cdot \frac{i}{2} \cdot R\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V = \frac{m}{\mu} C_P \mathrm{d}T$$

Изотермический процесс

- $T = \text{const}$



$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\mathrm{d}V \; =$$

$$= \int_{V_1}^{V_2} RT\frac{dV}{V} = RT\,(lnV\,)\Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= RT(lnV_2 - lnV_1) = RT\,ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Изотермический процесс

$$\mathrm{d}U = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = A \ (!) \ ,$$

$$Q = A \ = RT\,ln\frac{V_2}{V_1} = RT\,ln\frac{p_1}{p_2}\,.$$

Адиабатический процесс

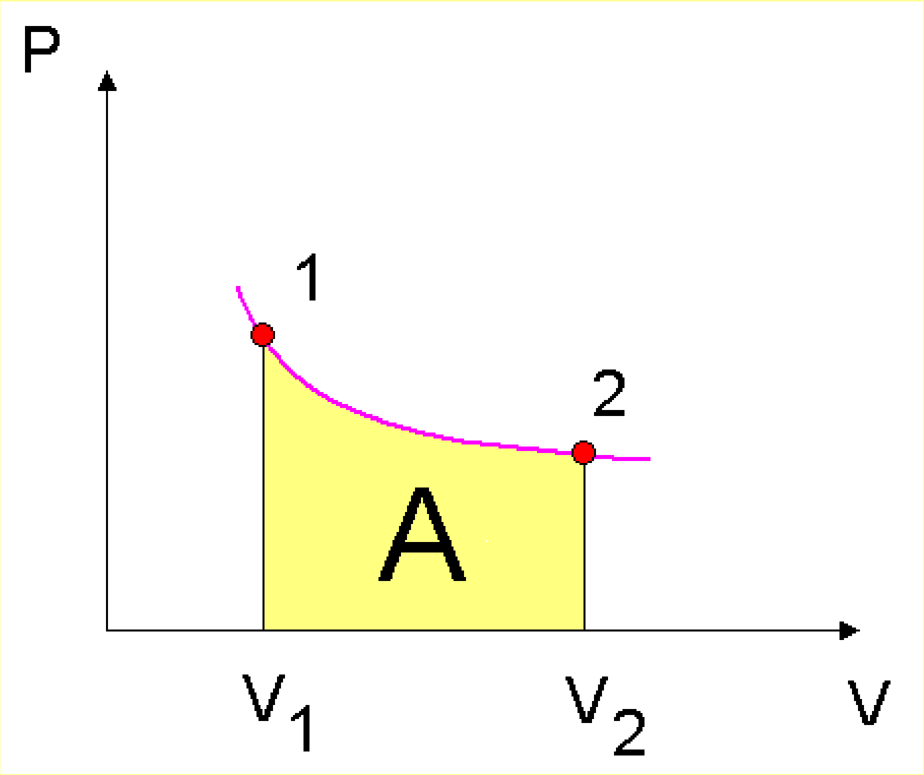
- $pT^{\gamma} = \mathrm{const}$

Работа газа равна $\mathbf{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{p}\mathbf{d}\boldsymbol{V}$.

Из уравнения Пуассона:

$$pV^{\gamma} = \mathrm{p}_1\mathrm{V}^{\gamma}{}_1\,,$$

где $p = p_1 V^{\gamma}{}_1 / V^{\gamma}$



Адиабатический процесс

Работа для 1 моля газа равна

$$A_\mu = \int_{V_1}^{V_2} p_1 V_1^\gamma \frac{dV}{V^\gamma} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma}\left(V_2^{(1-\gamma)} - V_1^{(1-\gamma)}\right) = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{1}{V_1^{\gamma-1}} - \frac{1}{V_2^{\gamma-1}}\right) =$$

$$= \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma}\frac{1}{V_1^{\gamma-1}}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right].$$

Для массы газа М работа при адиабатическом процессе равна

$$A = \frac{M}{\mu}\frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

Адиабатический процесс

Но

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$$

Далее получаем:

$$A = \frac{RT_1}{\gamma-1}\left[1 - \frac{T_2}{T_1}\right] = \frac{R}{\gamma-1}\left[T_1 - T_2\right] = C_V (T_1 - T_2)$$

Так как

$$C_p - C_V = R\,, \quad \gamma = {C_p}/{C_V} \Rightarrow \frac{R}{{C_p}/{C_V} - 1} = C_V$$

Важный вывод

- При адиабатическом расширении газа работа меньше, чем при изотермическом для данного объёма.

- Почему? Доказать.

Политропический процесс

Домашнее задание

ЛЕКЦИЯ 5

СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ

Спасибо за внимание!