



ЛЕКЦИЯ 4 (12)

Самостоятельно

ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

http://194.85.163.125/kur

Обучающий проект - Windows Internet Explorer

http://194.85.163.125/kur/Teach/lectures/Saia/38004v25

Ибранное CMS 2 My Library New Issues Рекомендуемые сайты View history Обновите браузер Канал пользователя SPbl...

Обучающий проект

Страница Безопасность Сервис

ПРЕПОДАВАТЕЛИ НОВОСТИ ПРЕДМЕТЫ КОНТАКТЫ

ФИЗИКА. МЕХАНИКА И МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ТЕМА №3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

Раздел №1: Лекция 13. Статистические распределения молекул

Содержание лекции №13:

Понятие функции распределения, условие нормировки. Функция распределения Максвелла по скоростям молекул. Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости, их зависимость от молярной массы газа и температуры. Барометрическая формула. Зависимость давления на заданной высоте от молярной массы газа и температуры. Функция распределения Больцмана для концентрации молекул в потенциальном поле.

Учебно-методические материалы

Интернет ресурсы

- [Барометрическая формула](#) (Описание)
- [Максвелла распределение](#) (Описание)
- [МАКСВЕЛЛ, ДЖЕЙМС КЛЕРК \(Maxwell, James Clerk\) \(1831-1879\)](#) (Описание)
- [Опытное подтверждение закона распределения скоростей Максвелла](#) (Описание)

Интернет | Защищенный режим: выкл. 125%

RU 1:41 02.12.2011

2 декабря 2011 года

ЛЕКЦИЯ 5 (13)

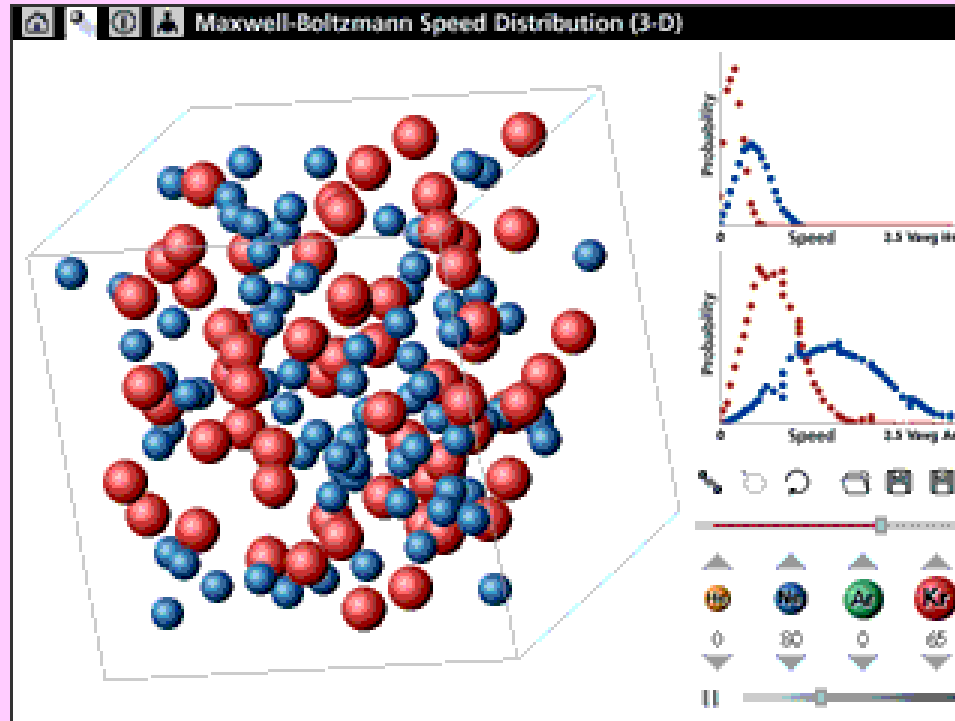


СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЛЕКУЛ

Содержание Лекции 13:

- Понятие функции распределения, условие нормировки. Функция распределения Максвелла по скоростям молекул.
- Наиболее вероятная, средняя и средняя квадратичная скорости, их зависимость от молярной массы газа и температуры.
- Барометрическая формула. Зависимость давления на заданной высоте от молярной массы газа и температуры.
- Функция распределения Больцмана для концентрации молекул в потенциальном поле.

13.1. Функция распределения Максвелла по скоростям молекул



При выводе основного уравнения МКТ мы задавали разные скорости, более того, в результате многократных столкновений скорость каждой молекулы изменяется по модулю и направлению.

Однако из-за хаотичности движения молекул **все направления являются равновероятными**, т.е. в любом направлении в среднем движется одинаковое число молекул.

Ранее мы ввели понятие **средней квадратичной скорости**:

$$\langle v_{\text{КВ}} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2} \quad (13.1)$$

Согласно МКТ как бы не изменялись скорости молекул массой m_0 в газе при столкновениях, **$\langle v_{\text{КВ}} \rangle$ остается постоянной** при $T = \text{const}$.

Термодинамическое равновесие (ТДР) –

система находится в состоянии ТДР, если ее состояние с течением времени не меняется (*предполагается, что внешние условия рассматриваемой системы не изменяются*).

В газе находящемся в состоянии ТДР, устанавливается некоторое **стационарное** **неменяющееся со временем распределение** **молекул по скоростям**, подчиняющееся статистическому закону – **закону Максвелла**.

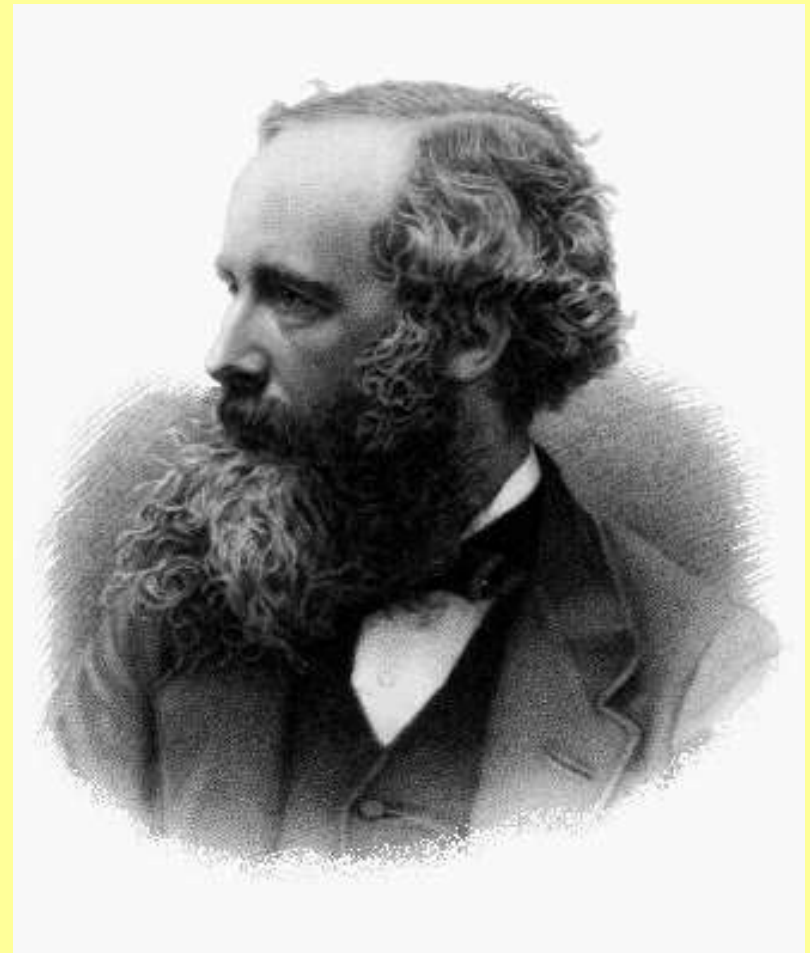
Закон Максвелла описывает функцию
распределения молекул газа по
скоростям $f(v)$:

функция распределения определяет
относительное число молекул газа $dN(v)/N$,
скорости которых лежат в интервале
скоростей от v до $v+dv$.

Максвелл, Джеймс Клерк

(Maxwell James Clerk; 1831 - 1879)

Выдающийся британский физик и математик. Создатель классической электродинамики (уравнения Максвелла), один из основателей статистической физики.



Итак, распределение Максвелла:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv, \quad (13.2)$$

откуда

$$f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}. \quad (13.3)$$

Выражение $f(v)dv$ – вероятность того, что скорости молекул заключены в интервале от v до $v+dv$.

Применяя методы теории вероятности, Максвелл нашел вид функции $f(v)$ для распределения молекул ИГ по скоростям (1860 год):

$$f(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}} .$$

(13.4)

Итак,

$$f(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Обозначим

$$A = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}}, \text{ при } T = \text{const} \text{ и } A = \text{const},$$

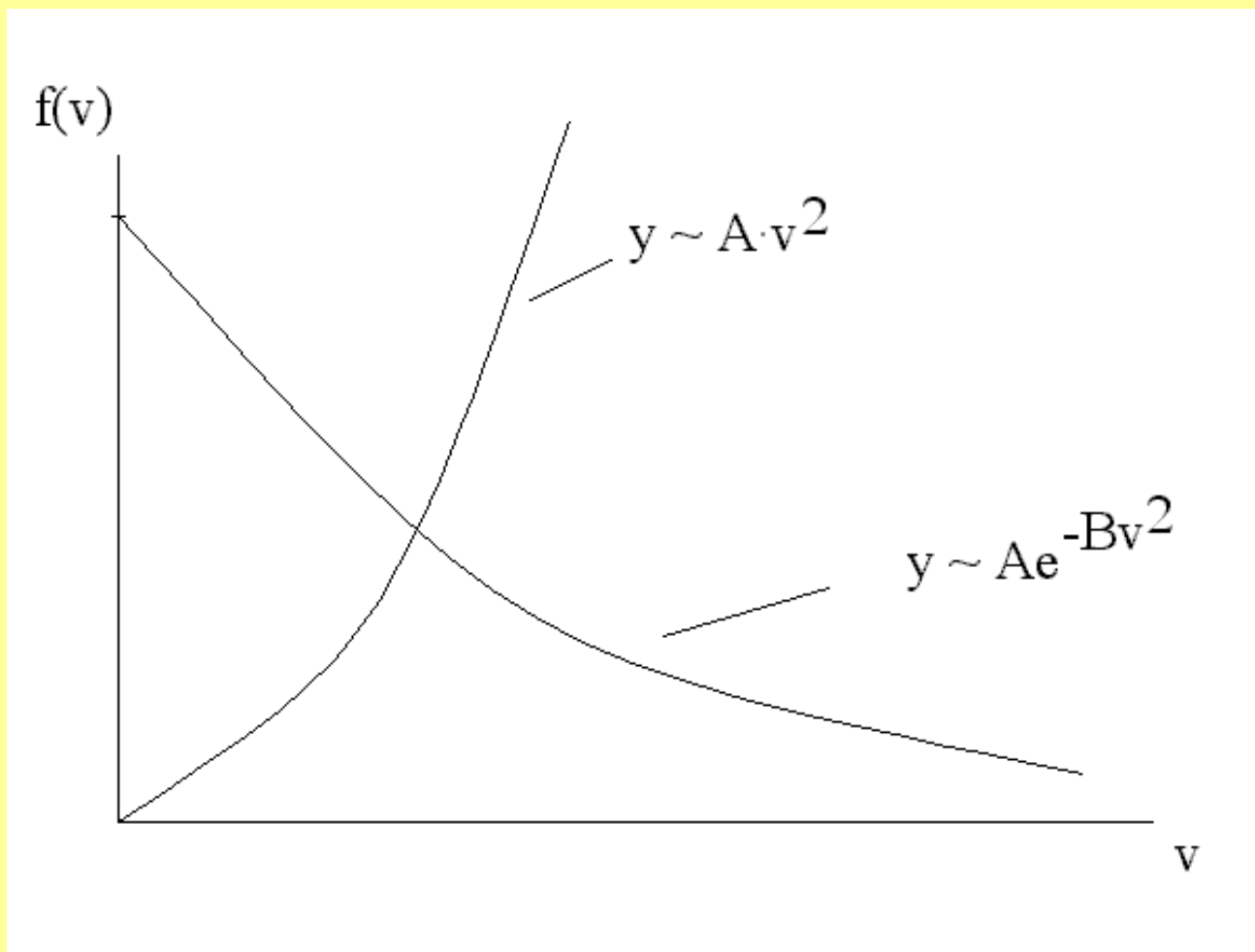
$$B = \frac{m_0}{2kT}.$$

Тогда

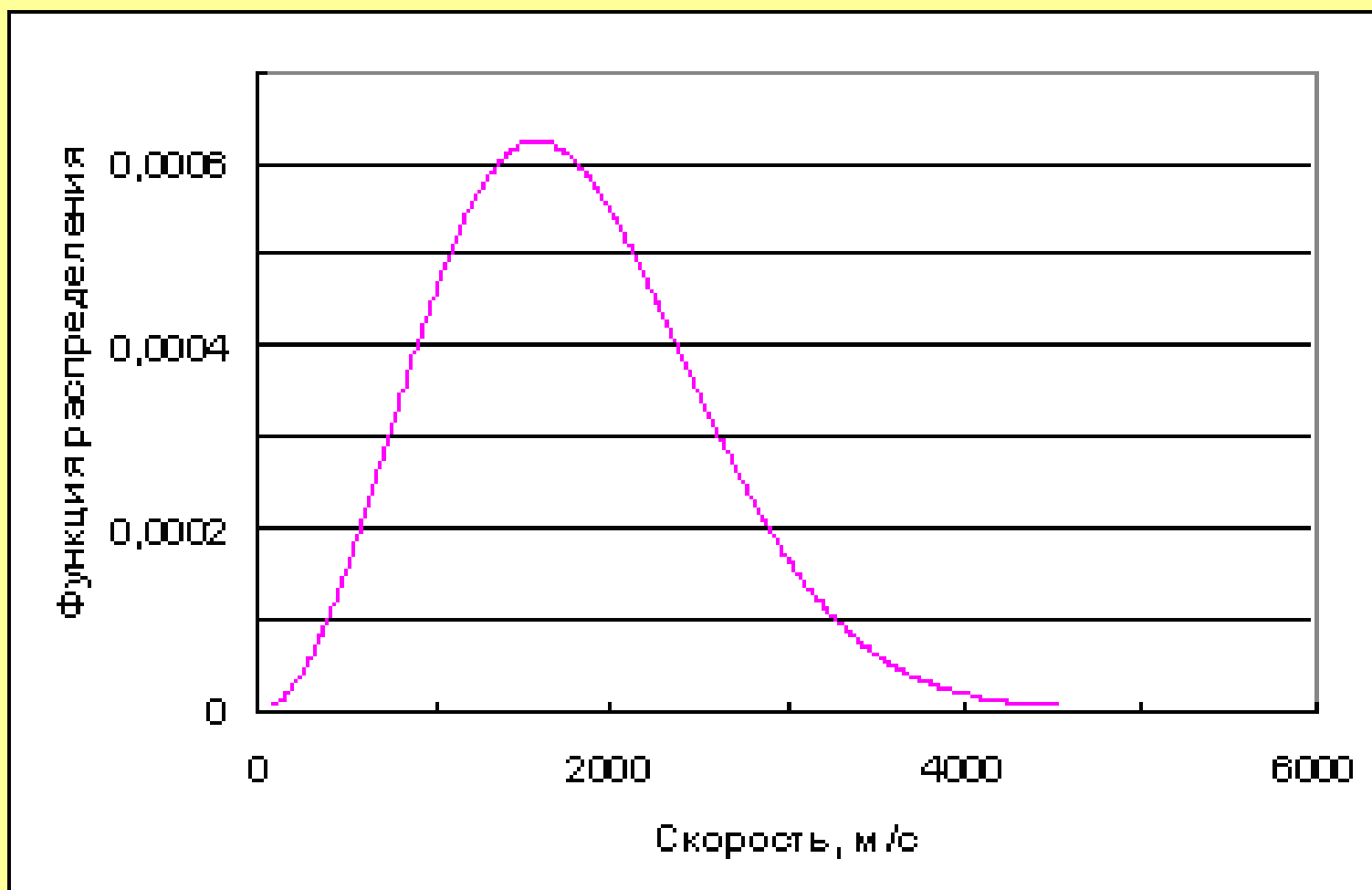
$$f(v) = Av^2 e^{-Bv^2}.$$

Рассмотрим основные свойства полученного выражения:

1). $f(v) = A \cdot v^2 \cdot \exp(-B \cdot v^2)$ при $T = \text{const}$



Расчет выполнен для молекул водорода
($\mu = 0.002$ кг/моль) при $T = 300$ К.



2). Условие нормировки для функции $f(v)$

По своему смыслу функция $f(v)$ – плотность вероятности.

Следовательно,

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1 \quad , \quad (13.5)$$

т.е. вероятность того что любая молекула имеет какую-нибудь скорость $v \rightarrow P = 1$.

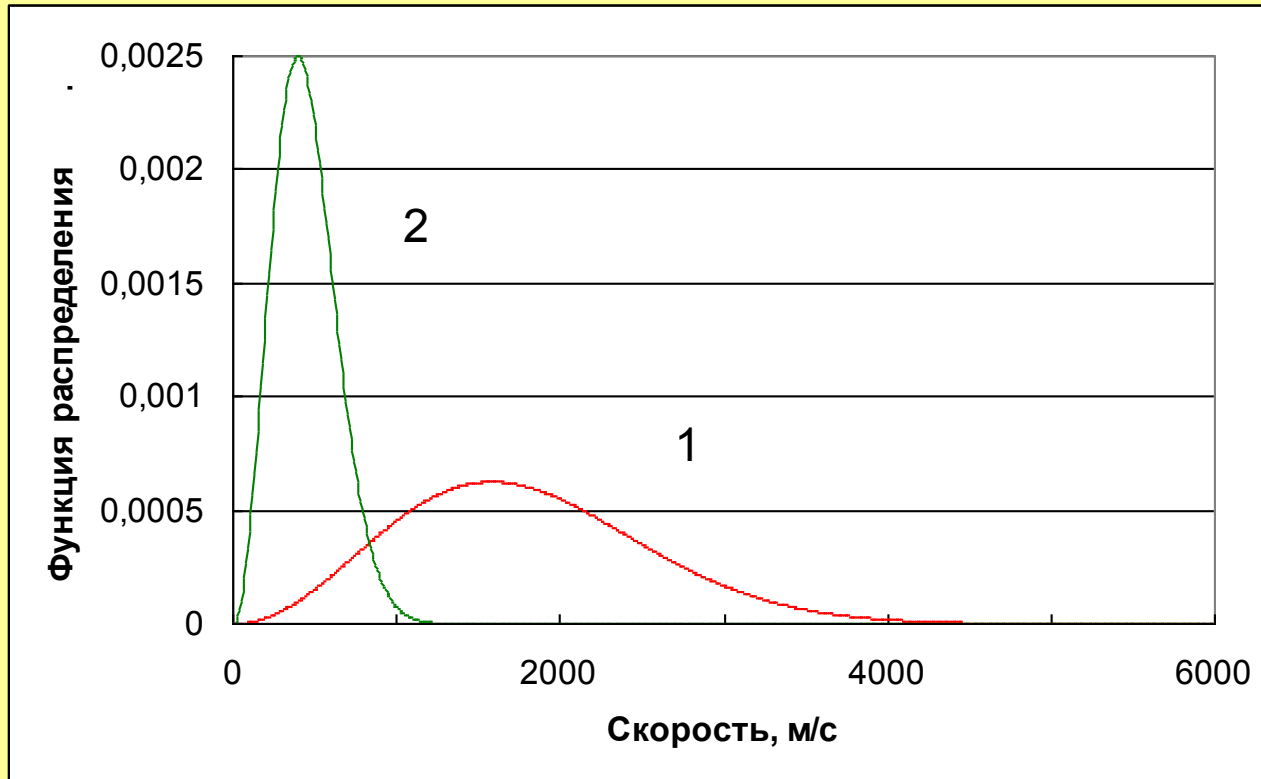
Другими словами, площадь под кривой равна единице.

$$f(v) = Av^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right).$$

Коэффициент A находят из условия нормировки для функции $f(v)$, а именно интегрируя выражение:

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = A \int_0^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{m_0 v^2}{2kT}\right) \cdot dv = 1 \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}, \quad (13.6)$$

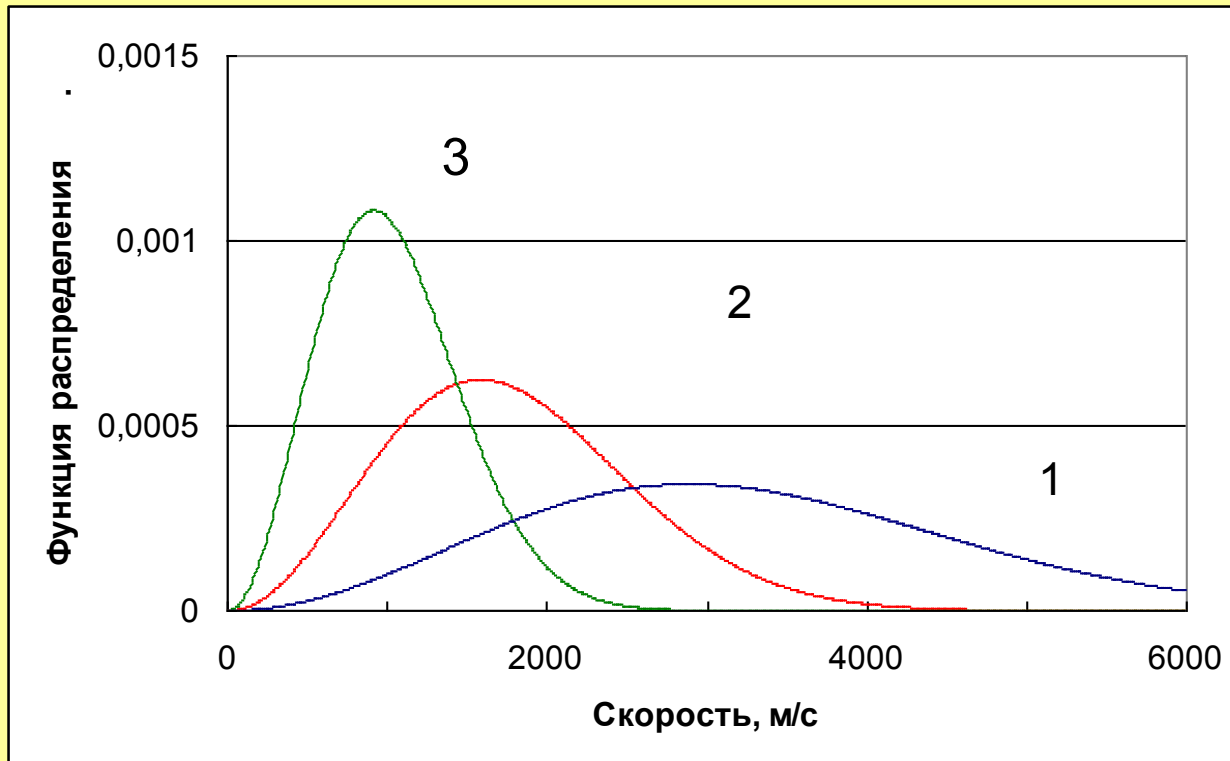
3). Зависимость функции распределения $f(v)$ от массы молекул ($T = \text{const}$):



1 - водород; 2 - кислород ($T = 300 \text{ K}$)

$$m_2 > m_1$$

4). Зависимость распределения $f(v)$ от температуры T (масса молекул = const):



Расчет выполнен для молекул H_2 для различных T :

1 - $T_1 = 1000$ К; 2 - $T_2 = 300$ К; 3 - $T_3 = 100$ К.

$$T_1 > T_2 > T_3$$

5). Относительное число молекул, имеющих скорость в интервале от v_1 до v_2 :

$$\frac{\Delta N_{12}}{N} = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv . \quad (13.7)$$

v/v_B	$\Delta N/N, \%$	v/v_B	$\Delta N/N, \%$
0...0.5	8.1	2.0...3.0	4.6
0.5...1.5	70.7	>3	0.04
1.5...2.0	16.6	>5	$8 \cdot 10^{-9}$

6). Относительное число молекул, скорость которых превышает некоторое значение v_0 , определяется выражением

$$\frac{\Delta N}{N} = \int_{v_0}^{\infty} f(v) dv \quad (13.8)$$

7). Распределение молекул по энергиям теплового движения определяется долей $dN(E)/N$ из общего числа молекул N , которые имеют кинетические энергии $E = mv^2/2$, заключенные в интервале от E до $E + dE$:

$$\begin{aligned} dN(E) &= Nf(E)dE = \\ &= \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE \quad . \quad (13.9) \end{aligned}$$

При выводе формулы (13.9) использовалось следующее:

$$f(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m_0}{2\pi \cdot kT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}},$$

а
$$dN_v = Nf(v)dv.$$

В свою очередь, скорость

$$v = (2E/m)^{1/2}, \quad dv = (2mE)^{-1/2}dE,$$

получаем

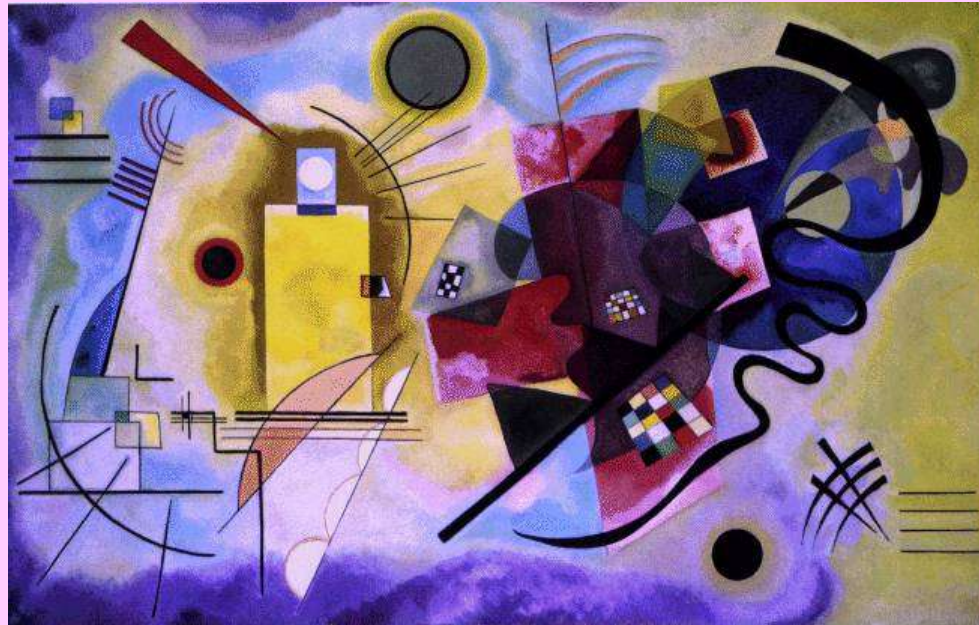
$$dN(E) = \frac{2N}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-\frac{3}{2}} E^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} dE.$$

Домашнее задание.

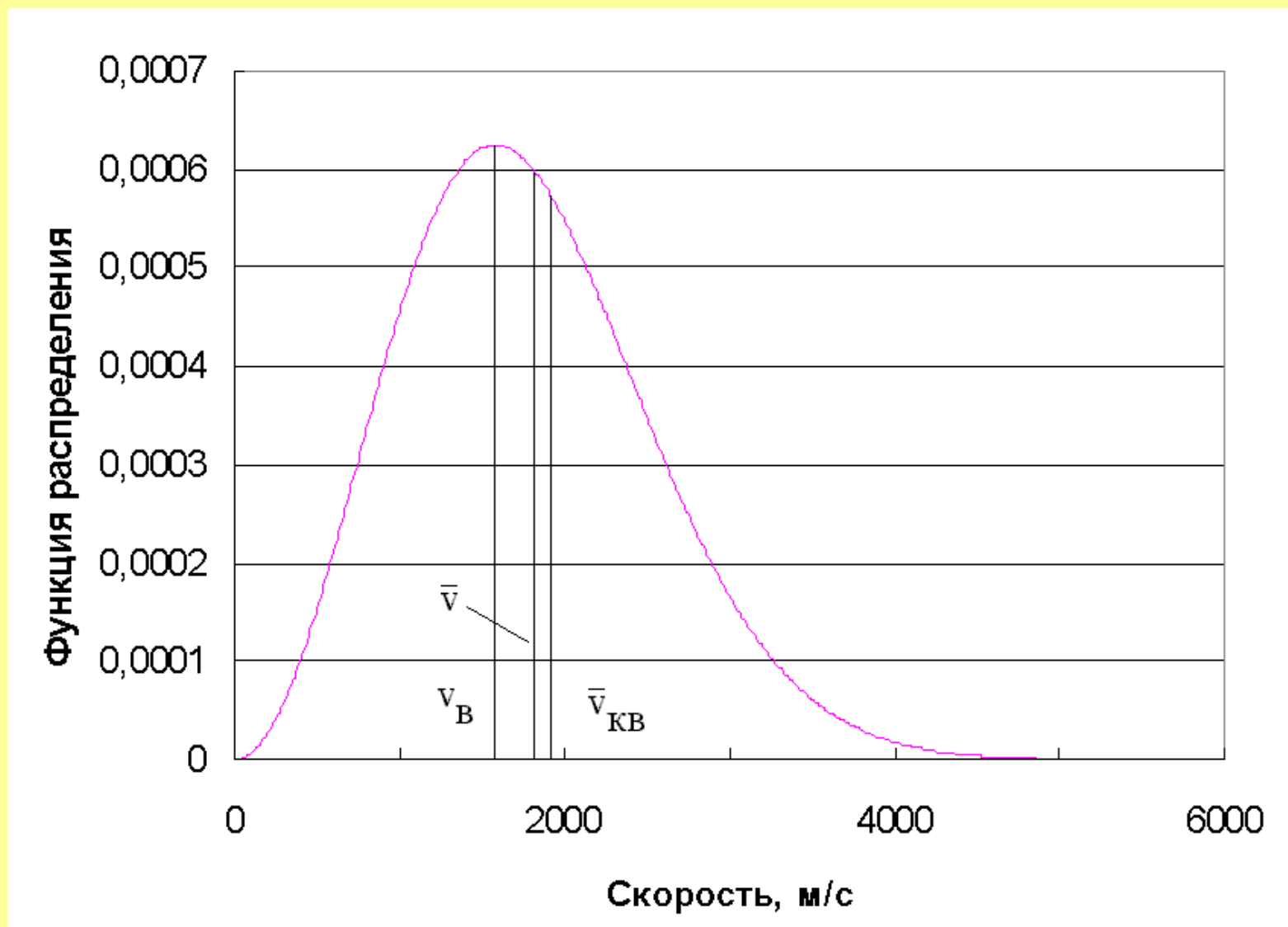
Самостоятельно доказать, что

$$\langle E \rangle = \int_0^{\infty} E \cdot f(E) dE = \dots = \frac{3}{2} \cdot kT. \quad (13.10)$$

14.2. Характерные скорости молекул



Введем понятие характерных скоростей.



а) Средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{KB}} \rangle$

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \cdot (13.11)$$

В случае водорода ($\mu = 0.002$ кг/моль; $T = 300$ К):

$$\langle v_{\text{KB}} \rangle = 1930 \text{ м/с} .$$

b) Наиболее вероятная скорость v_B :

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} \quad . \quad (13.12)$$

В случае водорода ($\mu = 0.002$ кг/моль; $T = 300$ К):

$$v_B = 1580 \text{ м/с} .$$

Вывод формулы (13.12)

$$f(v) = \max \Leftrightarrow \text{при } v = v_{\text{вер}}$$

$$\frac{df(v)}{dv} = 0; \text{ запишем } f(v) = Av^2 \exp(-Bv^2),$$

$$\text{где } A = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2}, \quad B = \frac{m_0}{2kT}.$$

Тогда

$$\frac{df(v)}{dv} = A \cdot (2v \cdot \exp(-Bv^2) + v^2 \exp(-Bv^2) \cdot (-B \cdot 2v)) = 0,$$

$$\frac{df(v)}{dv} = A \cdot 2v \cdot \exp(-Bv^2) \cdot (1 - Bv^2) = 0, \quad (1 - Bv^2) = 0$$

$$\Rightarrow v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{1}{B}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

с) Средняя арифметическая $\langle v \rangle$:

$$v_B = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \mu}} \approx \sqrt{2,55 \cdot \frac{RT}{\mu}}.$$

(13.13)

В случае водорода ($\mu = 0.002$ кг/моль; $T = 300$ К):

$$v_B = 1780 \text{ м/с} .$$

Вывод формулы (13.13)

Самостоятельно рассчитать, используя то условие, что средняя арифметическая скорость определяется по формуле:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \dots = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} .$$

Задача. Температура окиси азота NO $T=300$ К.
Определить долю молекул, скорость которых лежит в интервале от $v_1 = 820$ м/с до $v_2 = 830$ м/с.

Задача. Температура окиси азота NO $T=300$ К.
Определить долю молекул, скорость которых лежит в интервале от $v_1 = 820$ м/с до $v_2 = 830$ м/с.

- Ответ: $\Delta N/N = 4 \cdot 10^{-3}$, т.е. 4%

14.3. Барометрическая формула



Барометрическая формула

Определяет зависимость атмосферного давления p от высоты h .

Исходные положения при выводе формулы:

- поле тяготения однородно;
- ускорение свободного падения постоянно ($g=const$);
- температура атмосферы постоянна ($T=const$);
- масса всех молекул одинакова.

Барометрическая формула

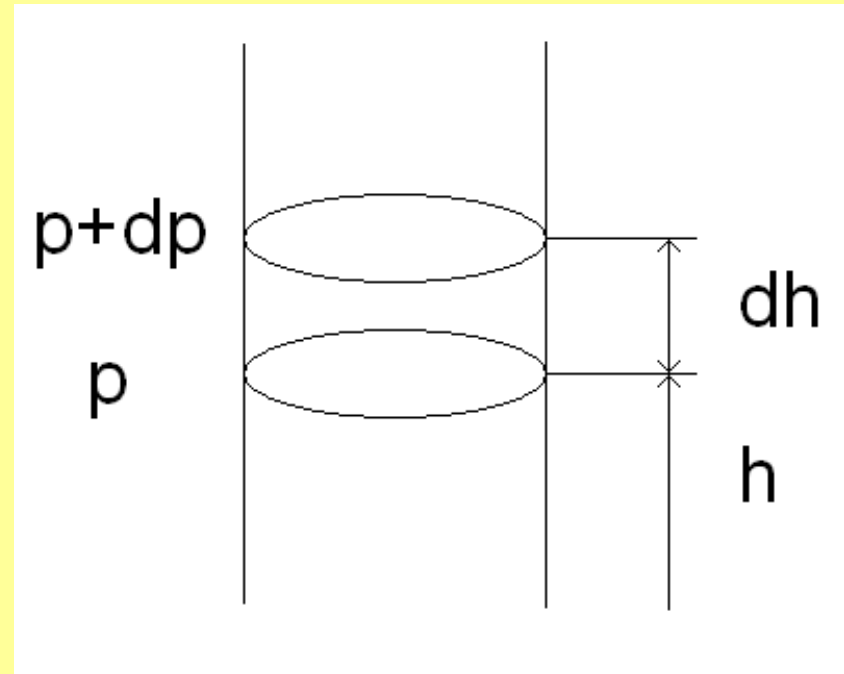
Атмосферное давление на какой-либо высоте h обусловлено весом вышележащих слоев газа.

Давление на высоте $h+dh$ будет $p+dp$, а их разность

$$p - (p+dp) = \rho g dh,$$

где ρ – плотность газа на высоте h . Отсюда:

$$dp = - \rho g dh .$$



$dh > 0, dp < 0$
Давление с высотой
убывает

Барометрическая формула

Величина $\rho g dh$ – вес газа, заключенного в объеме цилиндра высотой dh , площадь основания которого равна единице площади,

где ρ – плотность газа на высоте h .

Отсюда

$$dp = - \rho g dh .$$

(13.14)

Барометрическая формула

Плотность воздуха можно вычислить из уравнения Клапейрона-Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT} .$$

$$\text{Тогда } dp = -\frac{p\mu}{RT} g dh \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\mu g}{RT} dh .$$

$$\int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu g}{RT} dh \quad \Rightarrow \quad \ln p = -\frac{\mu g}{RT} h + \ln C .$$

$$\text{Окончательно, } p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) .$$

Барометрическая формула

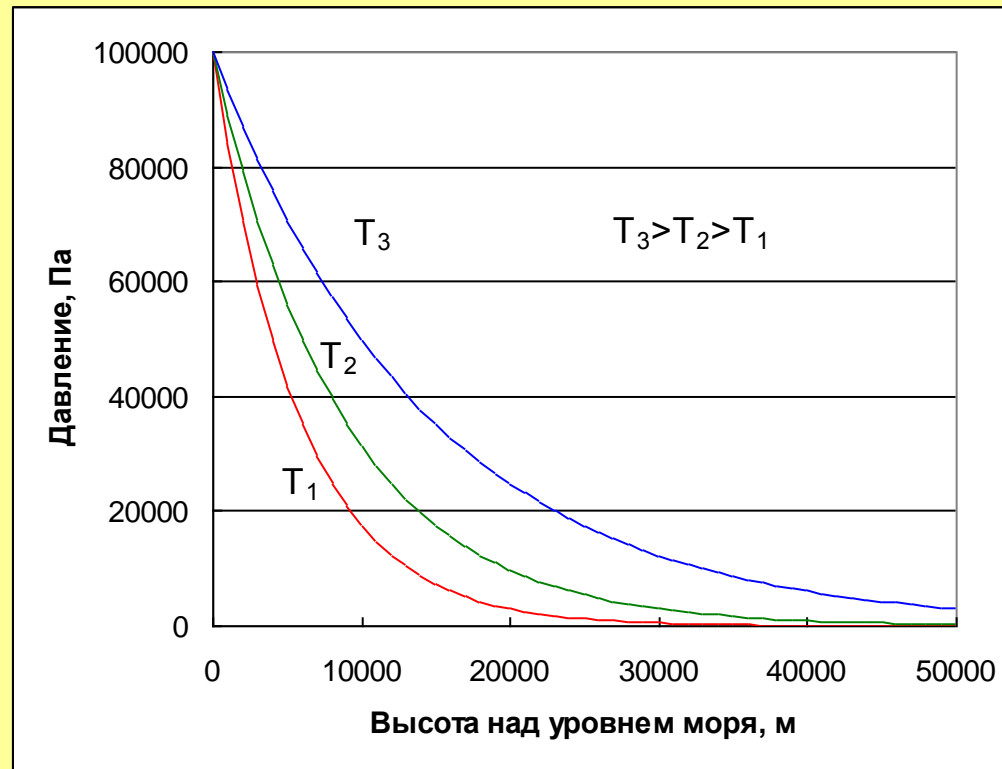
$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) \quad (13.15)$$

Отметим:

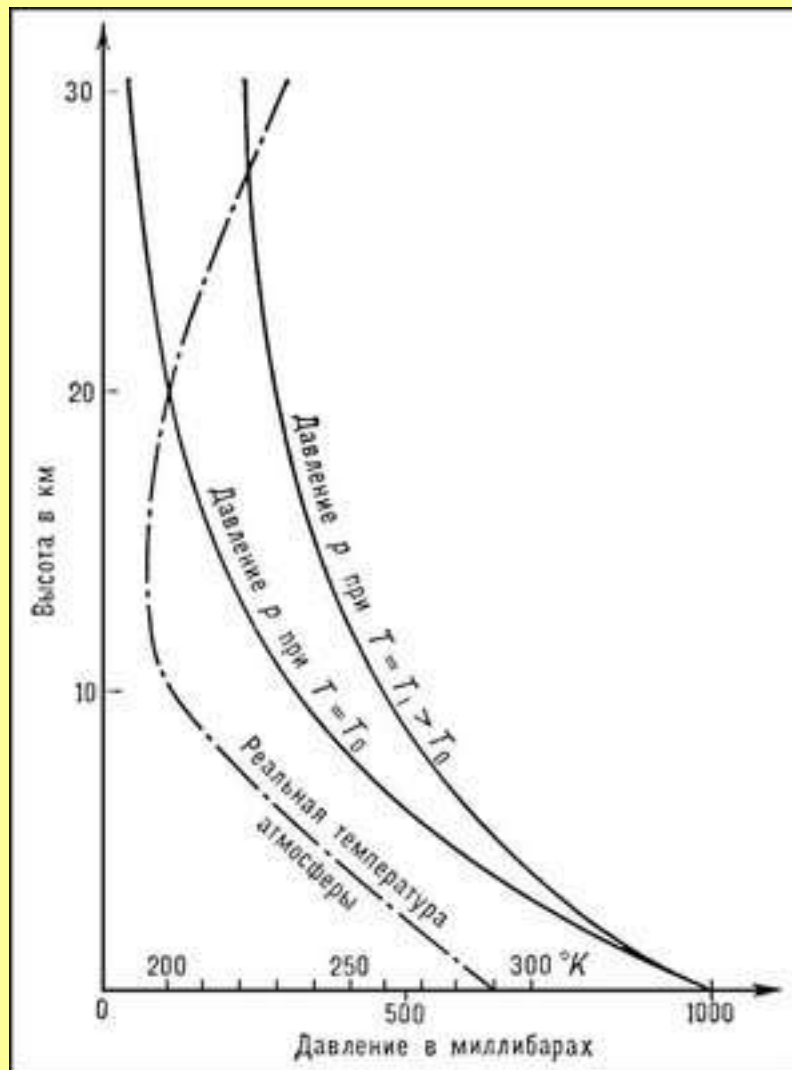
Высота h обычно обозначаются относительно уровня моря, где давление считается нормальным p_0 .

Давление газа p убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (чем больше μ) и чем ниже температура T .

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right) = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 gh}{kT}\right)$$



Параметры расчета: $\mu = 0,029$ кг/моль; $g = 9,8$ м/с²; $R = 8,31$ Дж/(моль·К);
 $T_1 = 200$ К ; $T_2 = 300$ К ; $T_3 = 500$ К .



14.4. Функция распределения Больцмана для концентрации молекул в потенциальном поле



Людвиг Больцман (L. Boltzmann) (1844-1906)

- Австрийский физик-теоретик, один из основоположников классической статистической физики
- Основные работы в области кинетической теории газов, термодинамики и теории излучения.



Распределение Больцмана

Распределение справедливо для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения и находящихся в любом потенциальном поле сил (например, в потенциальном поле сил земного тяготения).

Распределение Больцмана

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_P}{kT}\right), \quad (13.16)$$

где n - плотность молекул в том месте пространства, где потенциальная энергия молекулы имеет значение E_P , n_0 - плотность молекул в том месте, где потенциальная энергия молекулы равна нулю.

The probability that a particle will have energy E

With increasing energy E, it is progressively less likely that any given particle will attain that energy, so more particles will be found with lower energies. It is assumed that an unlimited number of particles can occupy any energy state.

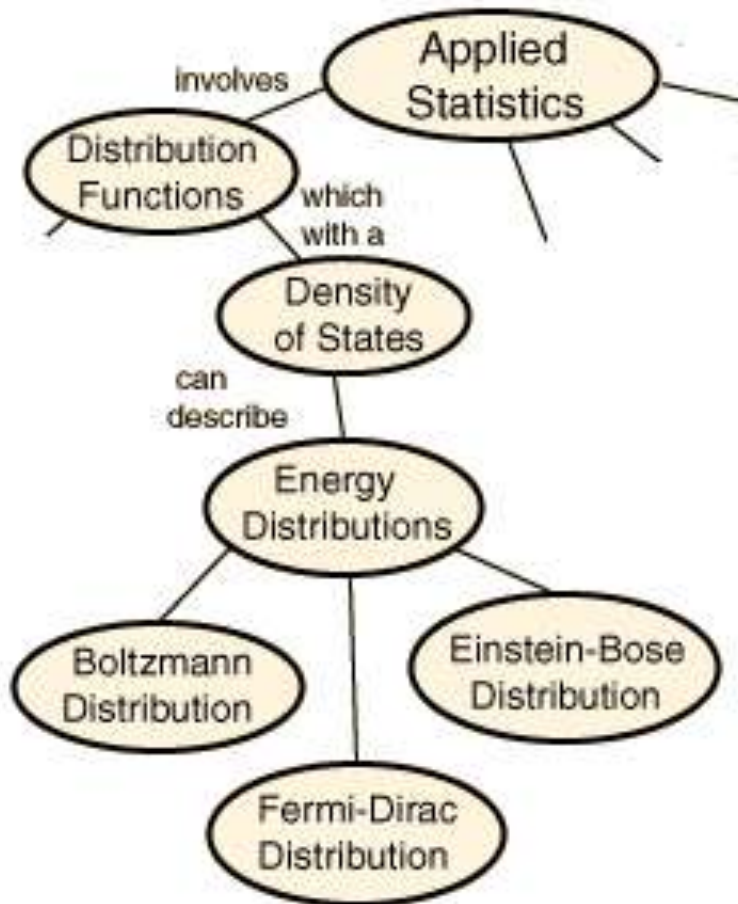
$$f(E) = \frac{1}{Ae^{E/kT}}$$

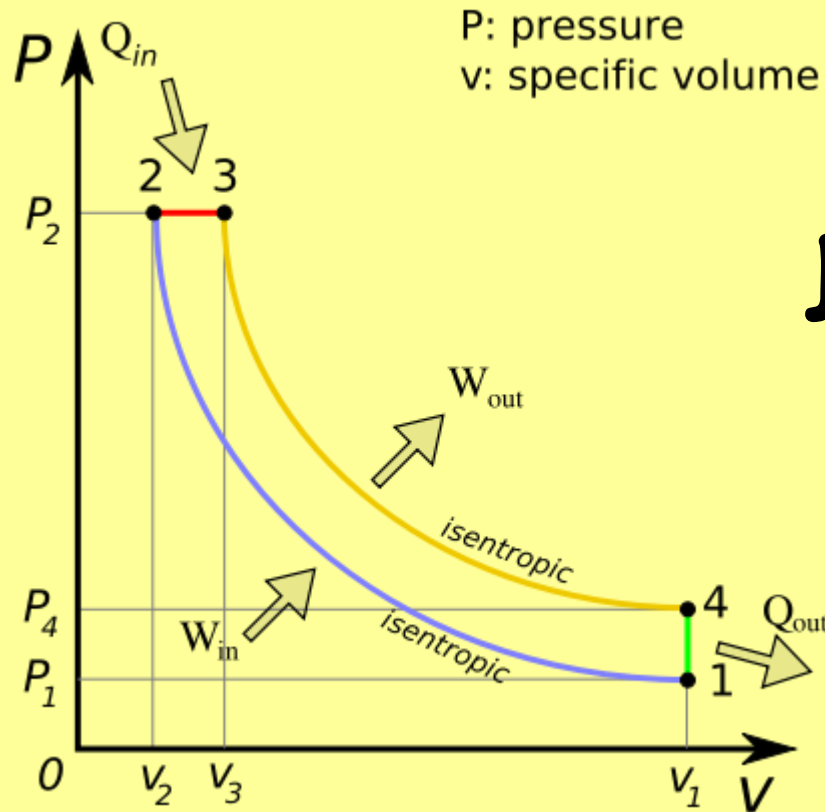
Maxwell-Boltzmann

Normalization constant A

The probability for occupying a given energy state decreases exponentially with energy

Boltzmann's constant k times the absolute temperature T. The implication of this term is that for a higher temperature, it is more probable that a given particle can be found with energy E.





ЛЕКЦИЯ 2_6 (14)

Второе начало термодинамики.

Тепловые машины