Припадчев Артём, гр.1125

Задание 1

Пусть A(x) и B(x) – переменные предикаты, а C – переменное высказывание (или формула, не содержащая x).

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}.$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}.$
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}.$
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}.$
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)]$.
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C.$
10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x).$
11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x).$
12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x).$

Задание 2

1. ∀x (F(x) & G(x)) ≡ ∀x F(x) & ∀x G(x)
2. ∃x (F(x) v G(x)) ≡ ∃x F(x) v ∃x G(x)
3. ∀x∀y F(x, y) ≡ ∀y∀x F(x, y)
4. ∃x∃y F(x, y) ≡ ∃y∃x F(x, y)
5. ˥(∀x F(x)) ≡ ∃x ˥F(x)
6. ˥(∃x F(x)) ≡ ∀x ˥F(x)

Задание 3

((∃z R(z) → (∃x J(x) ~ ∀y Q(y))) & (((∃x M(x) → ∃x P(x))) ~∀y Q(y))

≡ ((˥(∃z R(z)) v (∃x J(x) ~ ∀y Q(y))) & ((˥(∃x M(x)) v ∃x P(x))) ~∀y Q(y))
≡ ((˥(∃z R(z)) v ˥((∃x J(x)) v ∀y Q(y))& (∃x (x) v ˥(∀y Q(y))))) & ((˥˥(∃x M(x)) v ∃x P(x))) v ∀y Q(y))& ((˥(∃x M(x)) v ∃x P(x))) v ˥(∀y Q(y)))
≡ ((∀z ˥R(z) v (∀x ˥J(x) v ∀y Q(y))& (∃x (x) v ∃y ˥Q(y))) & (∃x M(x) v ∃x P(x) v ∀y Q(y))& (∀x ˥M(x) v ∃x P(x) v ∃y ˥Q(y))

Задание 4

((∃x∀y P(x,y)) → (∀x∀y Q(x,y)))&(∃x∀y P(x,y) ~ ∀x∃y R(x,y) → ∃x∃y M(x,y) ~ ∀x∀y Q(x,y))
≡ (˥(∃x∀y P(x,y)) v (∀x∀y Q(x,y)))& (∃x∀y P(x,y) ~ ˥(∀x∃y R(x,y)) v ∃x∃y M(x,y) ~ ∀x∀y Q(x,y))
≡ (˥(∃x∀y P(x,y)) v (∀x∀y Q(x,y)))& ((˥(∃x∀y P(x,y)) v ˥(∀x∃y R(x,y)))& (∃x∀y P(x,y) v ˥˥(∀x∃y R(x,y))) v (˥(∃x∃y M(x,y)) v (∀x∀y Q(x,y)))& ((∃x∃y M(x,y)) v ˥(∀x∀y Q(x,y))))
≡ (∀x∃y ˥P(x,y) v ∀x∀y Q(x,y))& ((∀x∃y ˥P(x,y) v ∃x∀y ˥R(x,y)) & (∃x∀y P(x,y) v ∀x∃y R(x,y)) v ∀x∀y ˥M(x,y) v ∀x∀y Q(x,y)) & (∃x∃y M(x,y) v ∃x∃y ˥Q(x,y)))

Задание 5

Определение возрастающей функции.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E возрастает на этом множестве, если $\forall x_1 \in E \forall x_2 \in E(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Здесь использован двуместный предикат $W(x_1, x_2) : (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$.

Задание 6 (дополнительно)

Проверить формулу методом резолюций.

Рассмотрим формулы $F_1 = \forall x(c(x) \to w(x) \wedge r(x))$; $F_2 = \exists x(c(x) \wedge q(x))$; $G = \exists x(q(x) \wedge r(x))$. Покажем, что G есть логическое следствие F_1 и F_2. Это значит, что множество формул F_1, F_2, $\neg G$ противоречиво.

Преобразуем формулы рассматриваемого множества

$$\begin{aligned}
&F_1 \simeq \forall x(\neg c(x) \vee (w(x) \wedge r(x)) \simeq \forall x\big([\neg c(x) \vee w(x)] \wedge [\neg c(x) \vee r(x)]\big);\\
&F_2 \simeq c(a) \wedge q(a);\\
&\neg G \simeq \forall x(\neg q(x) \vee \neg r(x)).
\end{aligned}$$

Требуется опровержение формулы $F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G$

$$F_1 \wedge F_2 \wedge \neg G \simeq \forall x\big([\neg c(x) \vee w(x)] \wedge [\neg c(x) \vee r(x)] \wedge c(a) \wedge q(a) \wedge [\neg q(x) \vee \neg r(x)]\big).$$

Отбрасывая квантор, получим множество дизъюнктов

$$\neg c(x) \vee w(x), \quad \neg c(x) \vee r(x), \quad c(a), \quad q(a), \quad \neg q(x) \vee \neg r(x).$$

Для доказательства противоречивости этого множества используем метод резолюций:

$$\begin{tikzcd}
\neg c(x) \vee r(x) \arrow[dr, dash] & & c(a) \arrow[dl, dash] & \neg q(x) \vee \neg r(x) \arrow[dr, dash] & & q(a) \arrow[dl, dash] \\
& r(a) \arrow[drr, dash] & & & \neg r(a) \arrow[dl, dash] & \\
& & & \square & &
\end{tikzcd}$$

Поскольку методом резолюющий получен вывод пустого дизъюнкта, заключаем, что множество дизъюнктов противоречиво, а следовательно, формула G есть логическое следствие F_1 и F_2.