

**Задание 1.** Найти и привести равносильные формулы логики предикатов. (прим.  $A(x)$ ,  $B(x)$  – переменные предикаты;  $C$  – переменное высказывание)

1.  $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$
2.  $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
3.  $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$
4.  $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$
5.  $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$
6.  $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$
7.  $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$
8.  $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$
9.  $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$
10.  $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
11.  $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$
12.  $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$
13.  $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y [A(x) \wedge B(y)]$
14.  $\exists x [C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x)$
15.  $\exists x [B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$

**Задание 2.** Найти и привести законы логических операций (общезначимые формулы логики предикатов).

1.  $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$
2.  $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
3.  $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$
4.  $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$
5.  $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
6.  $\exists x [P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
7.  $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
8.  $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$
9.  $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
10.  $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$
11.  $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
12.  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)]$
13.  $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
14.  $\forall x [P(x) \rightarrow P(y)] \equiv \exists x P(x) \rightarrow P(y)$
15.  $\forall x [P(x) \rightarrow C] \equiv \exists x P(x) \rightarrow C$
16.  $P(y) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [P(y) \rightarrow P(x)]$
17.  $C \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [C \rightarrow P(x)]$
18.  $C \wedge \forall x P(x) \equiv \forall x [C \wedge P(x)]$
19.  $C \vee \forall x P(x) \equiv \forall x [C \vee P(x)]$
20.  $C \rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x [C \rightarrow P(x)]$

21.  $\exists x[C \vee P(x)] \equiv C \vee \exists xP(x)$
22.  $\exists x[C \wedge P(x)] \equiv C \wedge \exists xP(x)$
23.  $\exists xP(x) \wedge \exists yQ(y) \equiv \exists x\exists y[P(x) \wedge Q(y)]$
24.  $\exists x[P(x) \rightarrow C] \equiv \forall xP(x) \rightarrow C$
25.  $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \equiv \forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \equiv \forall x[P(x) \vee \forall yQ(y)] \equiv \forall x\forall y[P(x) \vee Q(y)]$
26.  $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists yQ(y) \equiv \exists x[P(x) \wedge \exists yQ(y)] \equiv \exists x\exists y[P(x) \wedge Q(y)]$

**Задание 3.** Придумать формулу и привести ее в нормальную форму.

Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

$$\begin{aligned}
F &= [(\forall x \overline{S(x)} \rightarrow S(z)) \rightarrow (\exists y \overline{M(x, y)} \sim P(z))] \vee (R(z) \sim \forall x S(x)) \equiv \\
&\equiv [(\exists x \overline{S(x)} \rightarrow S(z)) \rightarrow [(\exists y \overline{M(x, y)} \rightarrow P(z)) \wedge (P(z) \rightarrow \exists y \overline{M(x, y)})]] \vee \\
&\vee [(R(z) \rightarrow \forall x S(x)) \wedge (\forall x S(x) \rightarrow R(z))] \equiv \\
&\equiv [(\exists x \overline{S(x)} \vee S(z)) \rightarrow [(\exists y \overline{M(x, y)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y \overline{M(x, y)})]] \vee \\
&\vee [(R(z) \vee \forall x S(x)) \wedge (\forall x S(x) \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv [(\forall x S(x) \vee S(z)) \rightarrow [(\forall y \overline{M(x, y)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y \overline{M(x, y)})]] \vee \\
&\vee [(R(z) \vee \forall x S(x)) \wedge (\exists x \overline{S(x)} \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv \forall x S(x) \vee S(z) \vee [(\forall y \overline{M(x, y)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y \overline{M(x, y)})] \vee \\
&\vee [(R(z) \vee \forall x S(x)) \wedge (\exists x \overline{S(x)} \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv \exists x \overline{S(x)} \wedge \overline{S(x)} \vee (\forall y \overline{M(x, y)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y \overline{M(x, y)}) \vee \\
&\vee (\overline{R(z)} \vee \forall x S(x)) \wedge (\exists x \overline{S(x)} \vee R(z)) \\
F &= \exists x \overline{S(x)} \wedge \overline{S(x)} \vee (\forall y \overline{M(x, y)} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y \overline{M(x, y)}) \vee (\overline{R(z)} \vee \forall x S(x)) \wedge (\exists x \overline{S(x)} \vee R(z))
\end{aligned}$$

**Задание 4.** Придумать формулу и получить из нее предваренную нормальную форму (ПНФ).

Формула логики предикатов имеет предваренную нормальную форму, если в ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики.

$$\begin{aligned}
F &= \overline{[\exists x \exists y S(x, y) \rightarrow (\forall x \exists y M(x, y) \rightarrow \exists y \exists x P(x, y))]} \sim \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\
&\equiv \overline{[\forall x \forall y \overline{S(x, y)} \rightarrow (\forall x \exists y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, y)})]} \sim \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\
&\equiv \overline{[\forall x \forall y \overline{S(x, y)} \rightarrow (\exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, y)})]} \sim \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\
&\equiv \overline{[\forall x \forall y \overline{S(x, y)} \vee (\exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, y)})]} \sim \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\
&\equiv [\exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)}] \sim \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\
&\equiv [(\exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)}) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)] \wedge \\
&\wedge [\forall x \exists y R(x, y) \rightarrow (\exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)})] \equiv \\
&\equiv \overline{[(\exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)}) \vee \forall x \exists y R(x, y)]} \wedge \\
&\wedge \overline{[\forall x \exists y R(x, y) \vee \exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)}]} \equiv \\
&\equiv [\forall x \forall y \overline{S(x, y)} \wedge \forall x \exists y \overline{M(x, y)} \wedge \forall x \forall y \overline{P(x, y)} \vee \forall p \exists y R(p, y)] \wedge \\
&\wedge [\exists x \forall y \overline{R(x, y)} \vee \exists x \exists y S(x, y) \vee \exists x \forall y \overline{M(x, y)} \vee \exists y \exists x \overline{P(x, z)}] \equiv \\
&\equiv \forall x [\forall y \overline{S(x, y)} \wedge \exists y \overline{M(x, y)} \wedge \forall y \overline{P(x, y)} \vee \exists y R(p, y)] \wedge \\
&\wedge [\exists k \forall y \overline{R(k, y)} \vee \exists k \exists y S(k, y) \vee \exists k \forall y \overline{M(k, y)} \vee \exists y \exists k \overline{P(k, z)}] \equiv \\
&\equiv \forall x \exists k [\forall t \overline{S(x, t)} \wedge \exists y \overline{M(x, y)} \wedge \forall t \overline{P(x, t)} \vee \exists y R(p, y)] \wedge \\
&\wedge [\forall t \overline{R(k, t)} \vee \exists y S(k, y) \vee \forall t \overline{M(k, t)} \vee \exists y \overline{P(k, z)}] \equiv \\
&\equiv \forall x \exists k \forall t [\overline{S(x, t)} \wedge \exists y \overline{M(x, y)} \wedge \overline{P(x, t)} \vee \exists y R(p, y)] \wedge \\
&\wedge [\overline{R(k, t)} \vee \exists y S(k, y) \vee \overline{M(k, t)} \vee \exists y \overline{P(k, z)}] \equiv \\
&\equiv \forall x \exists k \forall t \exists y [\overline{S(x, t)} \wedge \overline{M(x, y)} \wedge \overline{P(x, t)} \wedge R(p, y)] \wedge \\
&\wedge [\overline{R(k, t)} \vee S(k, y) \vee \overline{M(k, t)} \vee P(k, z)]
\end{aligned}$$

$$F = \forall x \exists k \forall t \exists y [\overline{S(x, t)} \wedge \overline{M(x, y)} \wedge \overline{P(x, t)} \wedge R(p, y)] \wedge [\overline{R(k, t)} \vee S(k, y) \vee \overline{M(k, t)} \vee P(k, z)]$$

Задание 5. Найти и привести в соответствии с обозначениями запись математических предложений.

Определение предела "b" функции f(x), определенной в области E, в точке x<sub>0</sub>.

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon). \text{ Используя}$$

трехместный предикат  $P(\varepsilon, \delta, x)$ , запишем:

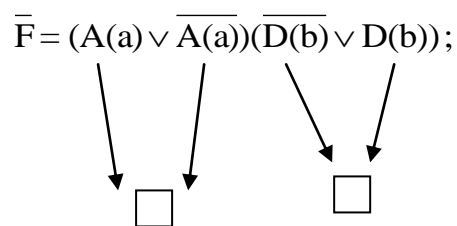
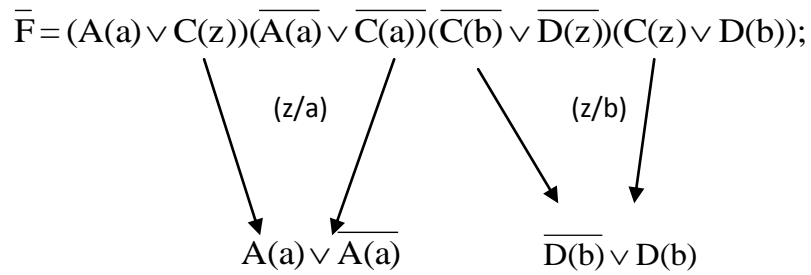
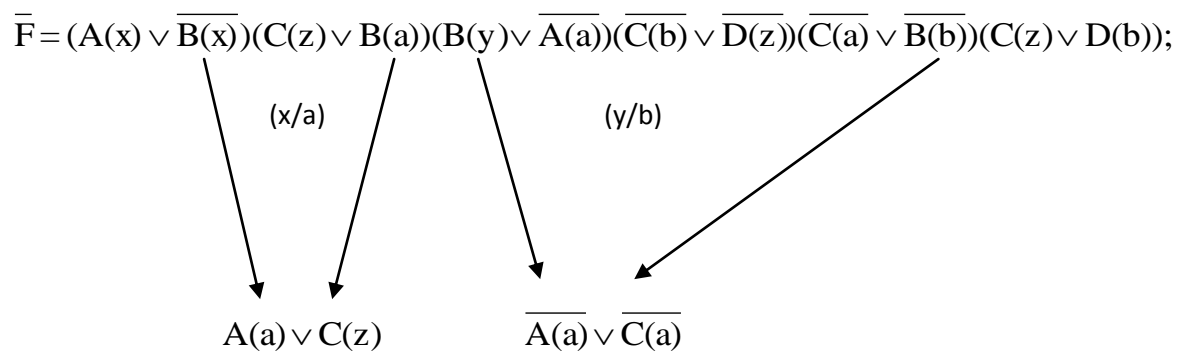
$$b = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in E (P(\varepsilon, \delta, x)),$$

$$\text{где } P(\varepsilon, \delta, x) = (0 < |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$$

Задание 6. (дополнительно). Проверить формулу методом резолюций.

$$F = \overline{A(x)} \wedge \overline{B(x)} \vee \overline{C(z)} \vee \overline{B(a)} \vee \overline{B(y)} \wedge \overline{A(a)} \vee \overline{C(b)} \wedge \overline{D(z)} \vee \overline{C(a)} \wedge \overline{B(b)} \vee \overline{(C(z) \vee D(b))}$$

Находим обратную формулу:



Пустое множество,  $\top$  тавтология, следовательно, исходная формула общезначима.