Задание 1. Найти и привести равносильные формулы логики предикатов. (прим. A(x), B(x) – переменные предикаты; C – переменное высказывание)

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [A(x) \wedge B(x)]$
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x [C \wedge B(x)]$
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x [C \vee B(x)]$
8. $C \rightarrow \forall x B(x) \equiv \forall x [C \rightarrow B(x)]$
9. $\forall x [B(x) \rightarrow C] \equiv \exists x B(x) \rightarrow C$
10. $\exists x [A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$
11. $\exists x [C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$
12. $\exists x [C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$
13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y [A(x) \wedge B(y)]$
14. $\exists x [C \rightarrow B(x)] \equiv C \rightarrow \exists x B(x)$
15. $\exists x [B(x) \rightarrow C] \equiv \forall x B(x) \rightarrow C$

Задание 2. Найти и привести законы логических операций (общезначимые формулы логики предикатов).

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$
5. $\forall x [P(x) \wedge Q(x)] \equiv \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
6. $\exists x [P(x) \vee Q(x)] \equiv \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
7. $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
8. $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$
9. $\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$
10. $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \rightarrow \forall x [P(x) \vee Q(x)]$
11. $\exists x [P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$
12. $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow [\forall x P(x) \rightarrow \forall x Q(x)$
13. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$
14. $\forall x [P(x) \rightarrow P(y)] \equiv \exists x P(x) \rightarrow P(y)$
15. $\forall x [P(x) \rightarrow C] \equiv \exists x P(x) \rightarrow C$
16. $P(y) \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [P(y) \rightarrow P(x)]$
17. $C \rightarrow \exists x P(x) \equiv \exists x [C \rightarrow P(x)]$
18. $C \wedge \forall x P(x) \equiv \forall x [C \wedge P(x)]$
19. $C \vee \forall x P(x) \equiv \forall x [C \vee P(x)]$
20. $C \rightarrow \forall x P(x) \equiv \forall x [C \rightarrow P(x)]$

21. $\exists x[C \vee P(x)] \equiv C \vee \exists xP(x)$
22. $\exists x[C \wedge P(x)] \equiv C \wedge \exists xP(x)$
23. $\exists xP(x) \wedge \exists yQ(y) \equiv \exists x\exists y[P(x) \wedge Q(y)]$
24. $\exists x[P(x) \to C] \equiv \forall xP(x) \to C$
25. $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \equiv \forall xP(x) \vee \forall yQ(y) \equiv \forall x[P(x) \vee \forall yQ(y)] \equiv \forall x\forall y[P(x) \vee Q(y)]$
26. $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists yQ(y) \equiv \exists x[P(x) \wedge \exists yQ(y)] \equiv \exists x\exists y[P(x) \wedge Q(y)]$

Задание 3. Придумать формулу и привести ее в нормальную форму.

Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

$$
\begin{aligned}
&F = [(\forall x[\overline{S(x)} \to S(z)]) \to (\exists y\overline{M(x,y)} \sim P(z))] \vee (R(z) \sim \forall xS(x)) \equiv \\
&\equiv [(\exists x\,\overline{S(x)} \to S(z)) \to [(\exists y\overline{M(x,y)} \to P(z)) \wedge (P(z) \to \exists y\overline{M(x,y)})]] \vee \\
&\vee [(\mathrm{R(z)} \to \forall \mathrm{xS(x)})] \wedge (\forall \mathrm{xS(x)} \to \mathrm{R(z)})] \equiv \\
&\equiv [\overline{(\exists x\overline{S(x)}} \vee S(z)) \to \overline{[(\exists y\overline{M(x,y)}} \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)})]] \vee \\
&\vee [\overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\overline{\forall xS(x)} \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv [(\forall xS(x) \vee S(z)) \to [(\forall yM(x,y) \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)})]] \vee \\
&\vee [\overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\exists x\overline{S(x)} \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv \overline{\forall xS(x) \vee S(z)} \vee [(\forall yM(x,y) \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)})] \vee \\
&\vee [\overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\exists x\overline{S(x)} \vee R(z))] \equiv \\
&\equiv \overline{\forall xS(x)} \wedge \overline{S(x)} \vee (\forall yM(x,y) \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)}) \vee \\
&\vee \overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\exists x\overline{S(x)} \vee R(z)) \equiv \\
&\equiv \exists x\overline{S(x)} \wedge \overline{S(x)} \vee (\forall yM(x,y) \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)}) \vee \\
&\vee \overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\exists x\overline{S(x)} \vee R(z)) \\
&F = \exists x\overline{S(x)} \wedge \overline{S(x)} \vee (\forall yM(x,y) \vee P(z)) \wedge (\overline{P(z)} \vee \exists y\overline{M(x,y)}) \vee \overline{(R(z)} \vee \forall xS(x)) \wedge (\exists x\overline{S(x)} \vee R(z))
\end{aligned}
$$

Задание 4. Придумать формулу и получить из нее предваренную нормальную форму(ПНФ).

Формула логики предикатов имеет предваренную нормальную форму, если в ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются после всех операций алгебры логики.

$$F=[\overline{\exists x\exists yS(x,y)}\to(\forall x\exists yM(x,y)\to\exists y\exists xP(x,y))]\sim\forall x\exists yR(x,y)\equiv$$
$$\equiv[\forall x\forall y\overline{S(x,y)}\to(\overline{\forall x\exists yM(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,y))]\sim\forall x\exists yR(x,y)\equiv$$
$$\equiv[\forall x\forall y\overline{S(x,y)}\to(\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,y))]\sim\forall x\exists yR(x,y)\equiv$$
$$\equiv[\overline{\forall x\forall y\overline{S(x,y)}}\vee(\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,y))]\sim\forall x\exists yR(x,y)\equiv$$
$$\equiv[\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z)]\sim\forall x\exists yR(x,y)\equiv$$
$$\equiv[(\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z))\to\forall x\exists yR(x,y)]\wedge$$
$$\wedge[\forall x\exists yR(x,y)\to(\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z))]\equiv$$
$$\equiv[\overline{(\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z))}\vee\forall x\exists yR(x,y)]\wedge$$
$$\wedge[\overline{\forall x\exists yR(x,y)}\vee\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z)]\equiv$$
$$\equiv[\forall x\forall y\overline{S(x,y)}\wedge\forall x\exists yM(x,y)\wedge\forall x\forall y\overline{P(x,y)}\vee\forall p\exists yR(p,y)]\wedge$$
$$\wedge[\exists x\forall y\overline{R(x,y)}\vee\exists x\exists yS(x,y)\vee\exists x\forall y\overline{M(x,y)}\vee\exists y\exists xP(x,z)]\equiv$$
$$\equiv\forall x[\forall y\overline{S(x,y)}\wedge\exists yM(x,y)\wedge\forall y\overline{P(x,y)}\vee\exists yR(p,y)]\wedge$$
$$\wedge[\exists k\forall y\overline{R(k,y)}\vee\exists k\exists yS(k,y)\vee\exists k\forall y\overline{M(k,y)}\vee\exists y\exists kP(k,z)]\equiv$$
$$\equiv\forall x\exists k[\forall t\overline{S(x,t)}\wedge\exists yM(x,y)\wedge\forall t\overline{P(x,t)}\vee\exists yR(p,y)]\wedge$$
$$\wedge[\forall t\overline{R(k,t)}\vee\exists yS(k,y)\vee\forall t\overline{M(k,t)}\vee\exists yP(k,z)]\equiv$$
$$\equiv\forall x\exists k\forall t[\overline{S(x,t)}\wedge\exists yM(x,y)\wedge\overline{P(x,t)}\vee\exists yR(p,y)]\wedge$$
$$\wedge[\overline{R(k,t)}\vee\exists yS(k,y)\vee\overline{M(k,t)}\vee\exists yP(k,z)]\equiv$$
$$\equiv\forall x\exists k\forall t\exists y[\overline{S(x,t)}\wedge M(x,y)\wedge\overline{P(x,t)}\wedge R(p,y)]\wedge$$
$$\wedge[\overline{R(k,t)}\vee S(k,y)\vee\overline{M(k,t)}\vee P(k,z)]$$

$$\underline{F=\forall x\exists k\forall t\exists y[\overline{S(x,t)}\wedge M(x,y)\wedge\overline{P(x,t)}\wedge R(p,y)]\wedge[\overline{R(k,t)}\vee S(k,y)\vee\overline{M(k,t)}\vee P(k,z)]}$$

Задание 5. Найти и привести в соответствии с обозначениями запись математических предложений.

<u>Определение предела “b” функции f(x), определенной в области E, в точке x_0.</u>

$b=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in E(0<|x-x_0|<\delta\to|f(x)-b|<\varepsilon)$. Используя трехместный предикат $P(\varepsilon,\delta,x)$, запишем:

$b=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in E(P(\varepsilon,\delta,x))$,

где $P(\varepsilon,\delta,x)=(0<|x-x_0|<\delta\to|f(x)-b|<\varepsilon)$

Задание 6.(дополнительно). Проверить формулу методом резолюций.

$$F=\overline{A(x)}\wedge B(x)\vee\overline{C(z)\vee B(a)}\vee\overline{B(y)}\wedge A(a)\vee C(b)\wedge D(z)\vee C(a)\wedge B(b)\text{ v }\overline{(C(z)\vee D(b))}$$

Находим обратную формулу:

$$\overline{F} = (A(x) \vee \overline{B(x)})(C(z) \vee B(a))(B(y) \vee \overline{A(a)})(\overline{C(b)} \vee \overline{D(z)})(\overline{C(a)} \vee \overline{B(b)})(C(z) \vee D(b));$$

(x/a) (y/b)

$$A(a) \vee C(z) \qquad \overline{A(a)} \vee \overline{C(a)}$$

$$\overline{F} = (A(a) \vee C(z))(\overline{A(a)} \vee \overline{C(a)})(\overline{C(b)} \vee \overline{D(z)})(C(z) \vee D(b));$$

(z/a) (z/b)

$$A(a) \vee \overline{A(a)} \qquad \overline{D(b)} \vee D(b)$$

$$\overline{F} = (A(a) \vee \overline{A(a)})(\overline{D(b)} \vee D(b));$$

$$\square \qquad \square$$

Пустое множество, $\neg F$ тавтология, следовательно, исходная формула общезначима.