23 сентября 2011 года

Лекция 4

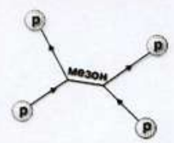
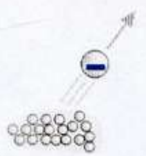
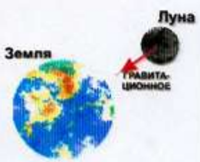
Импульс МТ. Импульс системы МТ и АТТ

Содержание лекции 4:

Элементарный импульс силы как элементарное приращение импульса. Второй закон Ньютона в импульсной форме. Полный импульс силы как разность конечного и начального импульсов МТ.

Центр масс (центр инерции) **Основное уравнение динамики системы МТ. Скорость и ускорение центра масс системы МТ.** Определение замкнутой механической системы МТ. **Закон сохранения импульса.**

МЕХАНИКА ► *Виды взаимодействий*

ВИД	ВЗАИМО-ДЕЙСТВУЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ	ПРОЯВЛЕНИЕ	МЕХАНИЗМ	ИНТЕНСИВ-НОСТЬ	РАДИУС ДЕЙСТВИЯ, М
СИЛЬНОЕ 	тяжелые частицы (пионы и выше)	Ядерные силы, обеспечивающие существование ядер	обмен глюонами	1	10^{-15}
ЭЛЕКТРО-МАГНИТНОЕ 	заряженные частицы, фотоны	Кулоновская сила, обеспечивающая существование атома	обмен фотонами	$\frac{1}{137}$	∞
СЛАБОЕ 	все частицы, кроме фотона	β - распад	обмен бозонами	10^{-10}	10^{-18}
ГРАВИТА-ЦИОННОЕ 	все тела вселенной	Всемирное тяготение, обеспечивающее существование звезд, планетных систем	обмен гравитонами	10^{-38}	∞

4.1. Второй закон Ньютона в импульсной форме

Понятие **массы** было введено в Механику Ньютоном в определении импульса (количества движения) тела.

m - масса тела; $[m]$ = кг .

Импульс тела <u>пропорционален</u> скорости свободного движения тела

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{p}$ - импульс тела; $[p]$ = кг·м/с =Н · с.

По определению **количество движения (импульс)** – мера механического движения, равная для МТ произведению ее массы на скорость.

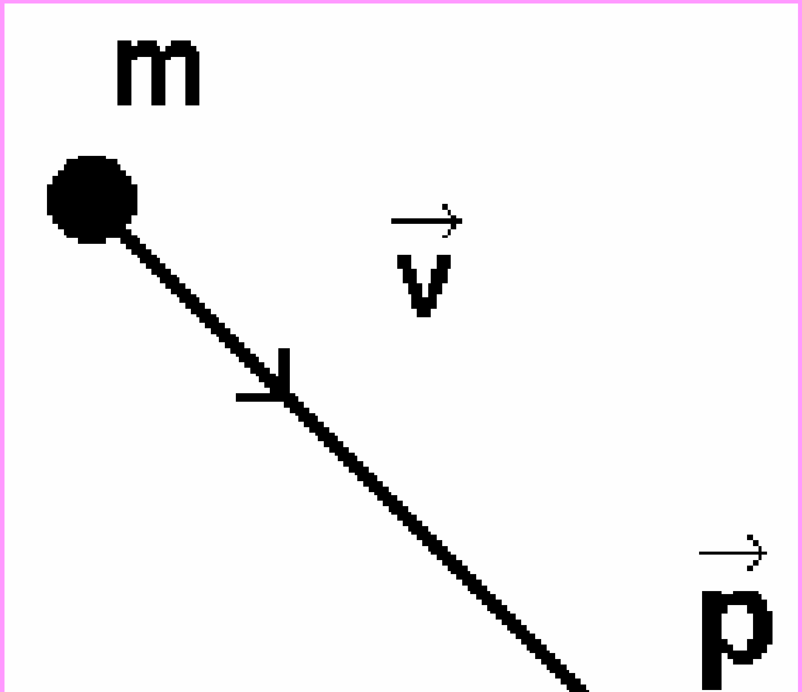


Рис.4.1

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

II закон Ньютона (в импульсной форме)

Элементарное изменение импульса тела равно действующему на тело элементарному импульсу силы

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \qquad (4.1)$$

Согласно II закону Ньютона **изменение импульса** тела равно **импульсу действующей на него силы**:

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\mathrm{d}t}\ , \qquad (4.2)$$

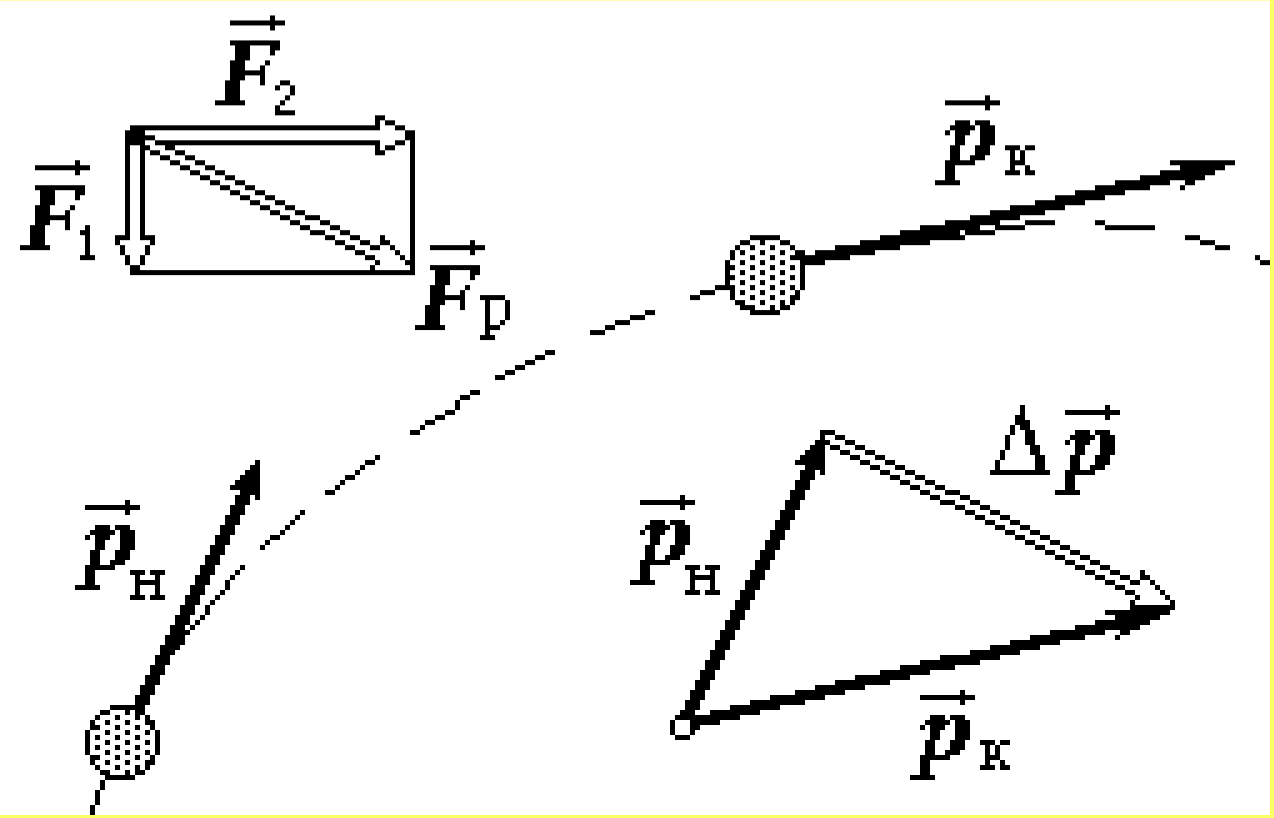
импульс силы

где $\vec{p}_2 = \vec{p}(t_2)$ и $\vec{p}_1 = \vec{p}(t_1)$ - значения импульса МТ в конце ($t=t_2$) и в начале ($t=t_1$) рассматриваемого промежутка времени.

Полный импульс силы как разность конечного и начального импульсов МТ

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t \qquad (4.3)$$

К формуле (4.3)



$$\boxed{\Delta\vec{p}} = \boxed{\vec{F}\Delta t}$$

Следствие

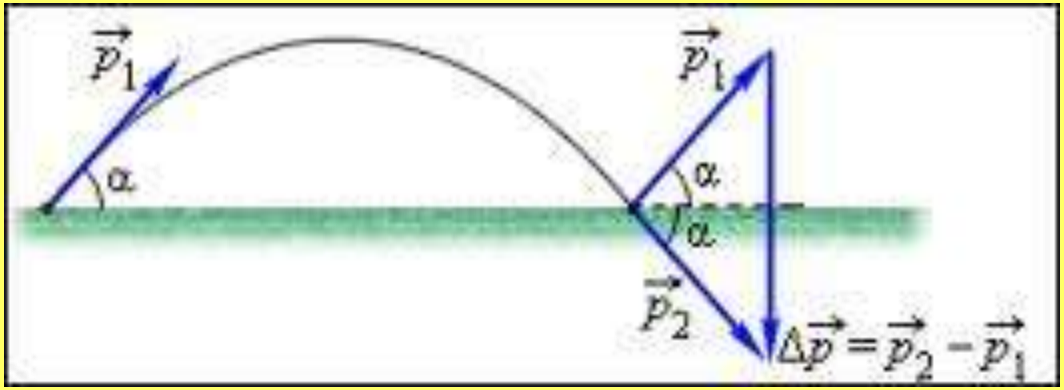
Причина

Пример 1

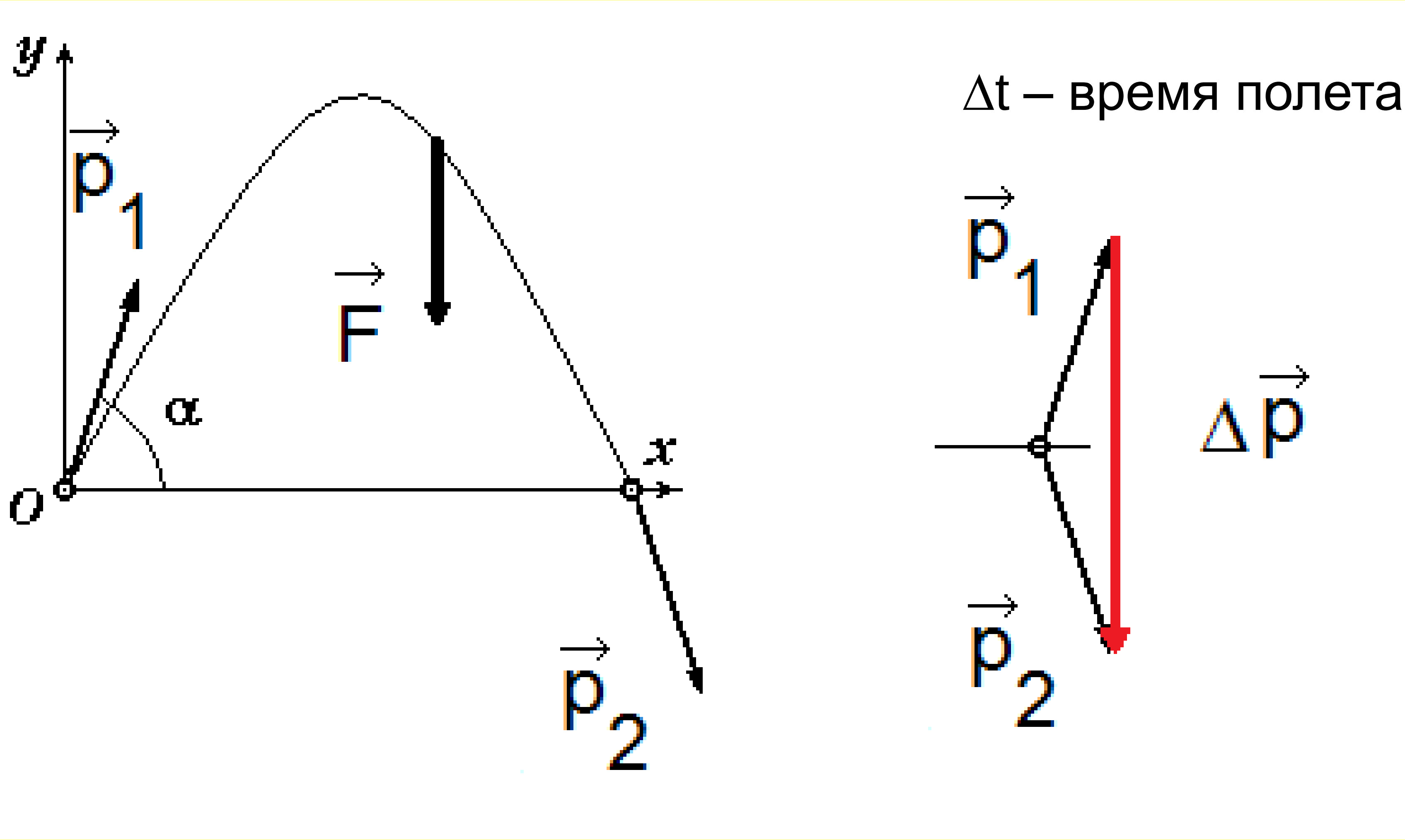
Найти изменение импульса тела Δp массой m, брошенного со скоростью $v_о$ под углом α к горизонту, за время его полета.

Пример 1

Найти изменение импульса тела Δp массой m, брошенного со скоростью v_o под углом α к горизонту, за время его полета.



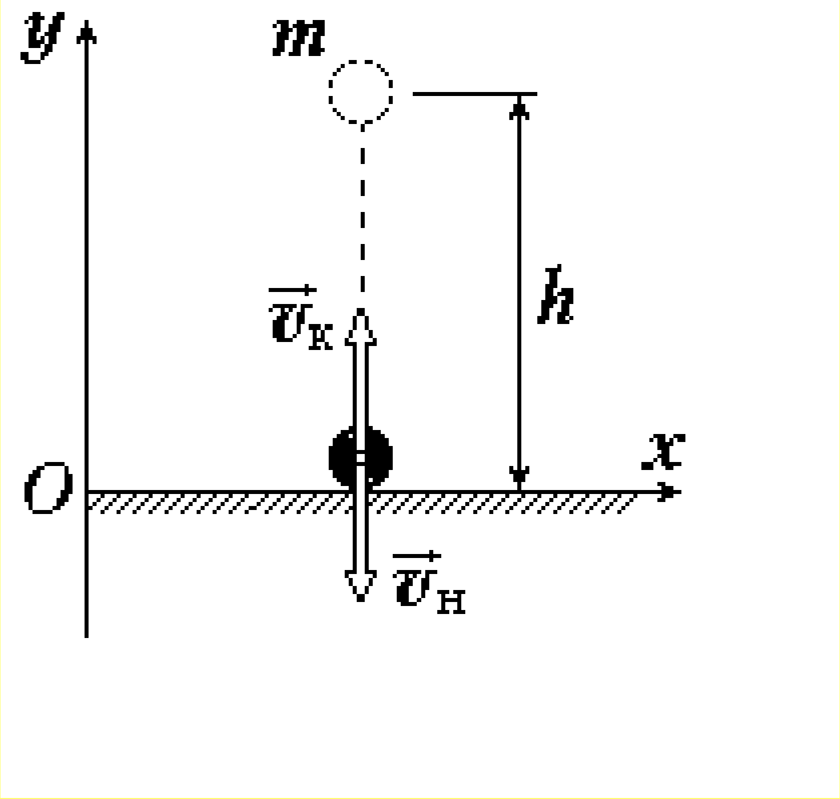
Пример 1



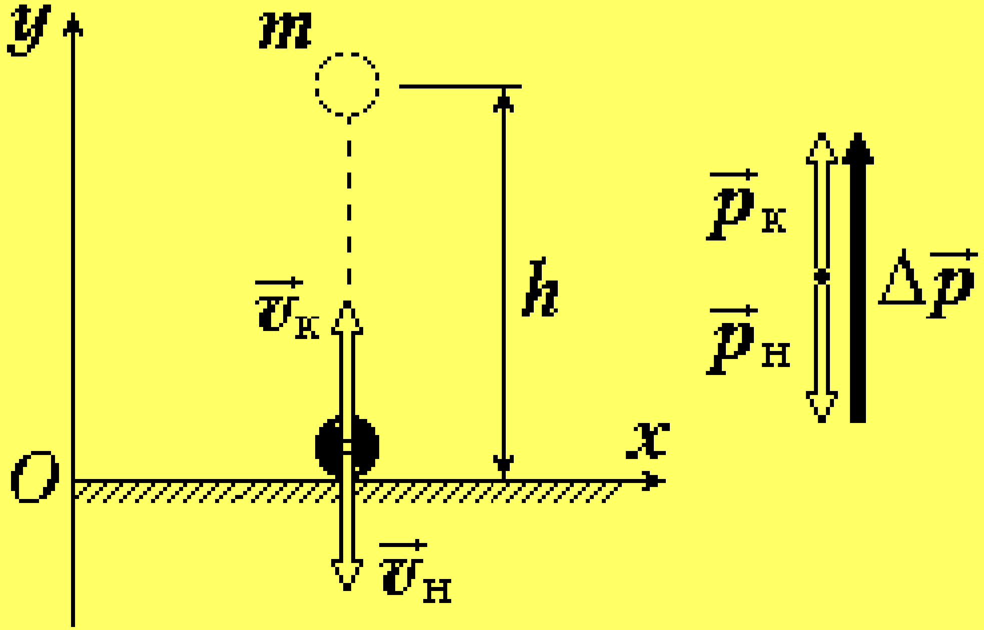
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{F}\Delta t$$

Пример 2. Мяч массой 0.1 кг упруго отскакивает от горизонтальной поверхности, причем величина его импульса изменяется на 6 Н·с.

Найти высоту, с которой свободно падал мяч до удара. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Главный вопрос: что такое «… величина его импульса изменяется на 6 Н·с»?



$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_{кон} - \vec{p}_{нач}$$

$$y: \quad \left|\Delta\vec{p}\right| = p_{кон} - \left(-p_{нач}\right) = p_{кон} + p_{нач}$$

$$\Delta p = p_{нач} + p_{кон}$$

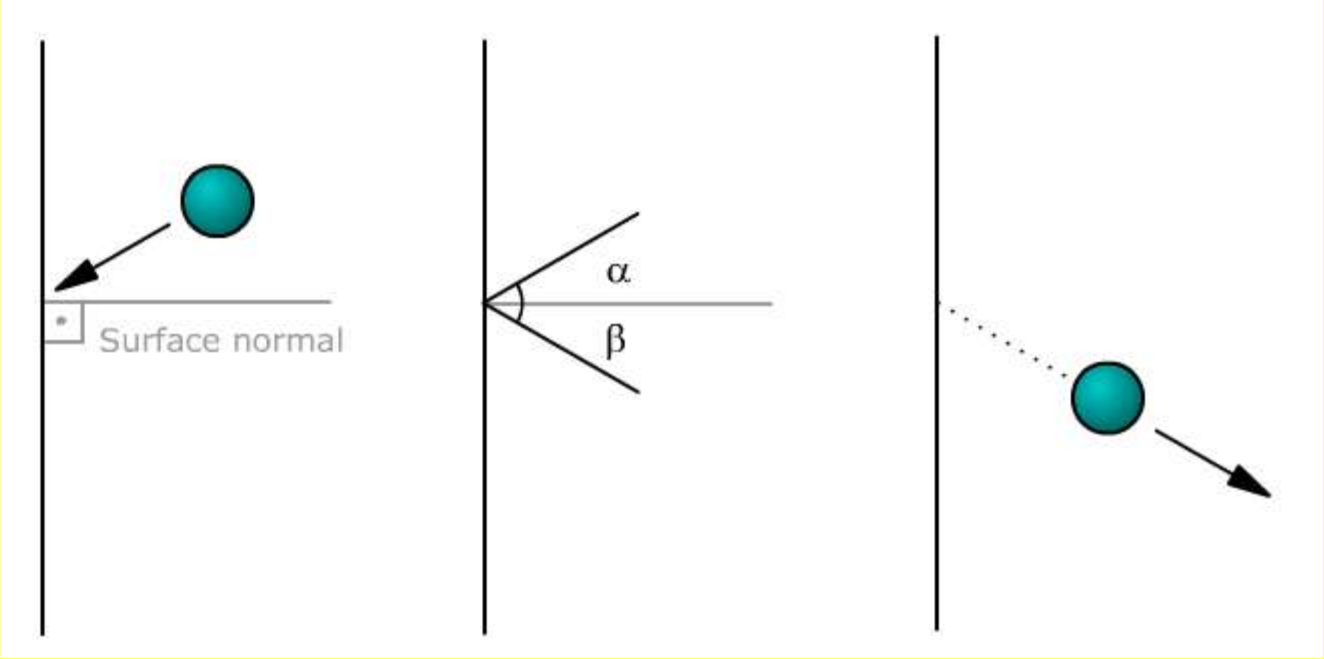
Пример 3. Тело массой 1 кг свободно падает с высоты 20 м на горизонтальную поверхность и после отскока поднимается на максимальную высоту 5 м спустя 3.1 с после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

Определить среднюю силу удара, действующую на тело во время удара.

[Ответ: 300 Н]

Пример 4. При ударе шарика об идеально гладкую горизонтальную поверхность теряется треть его кинетической энергии.

Зная, что угол падения шарика равен 45°, определить в градусах угол отражения.



Важное указание: углы падения и отражения равны только в случае абсолютно упругого удара, т.е. в том случае когда нет потерь энергии.

4.2. Центр масс (центр инерции). Основное уравнение динамики системы МТ. Скорость и ускорение центра масс системы МТ.

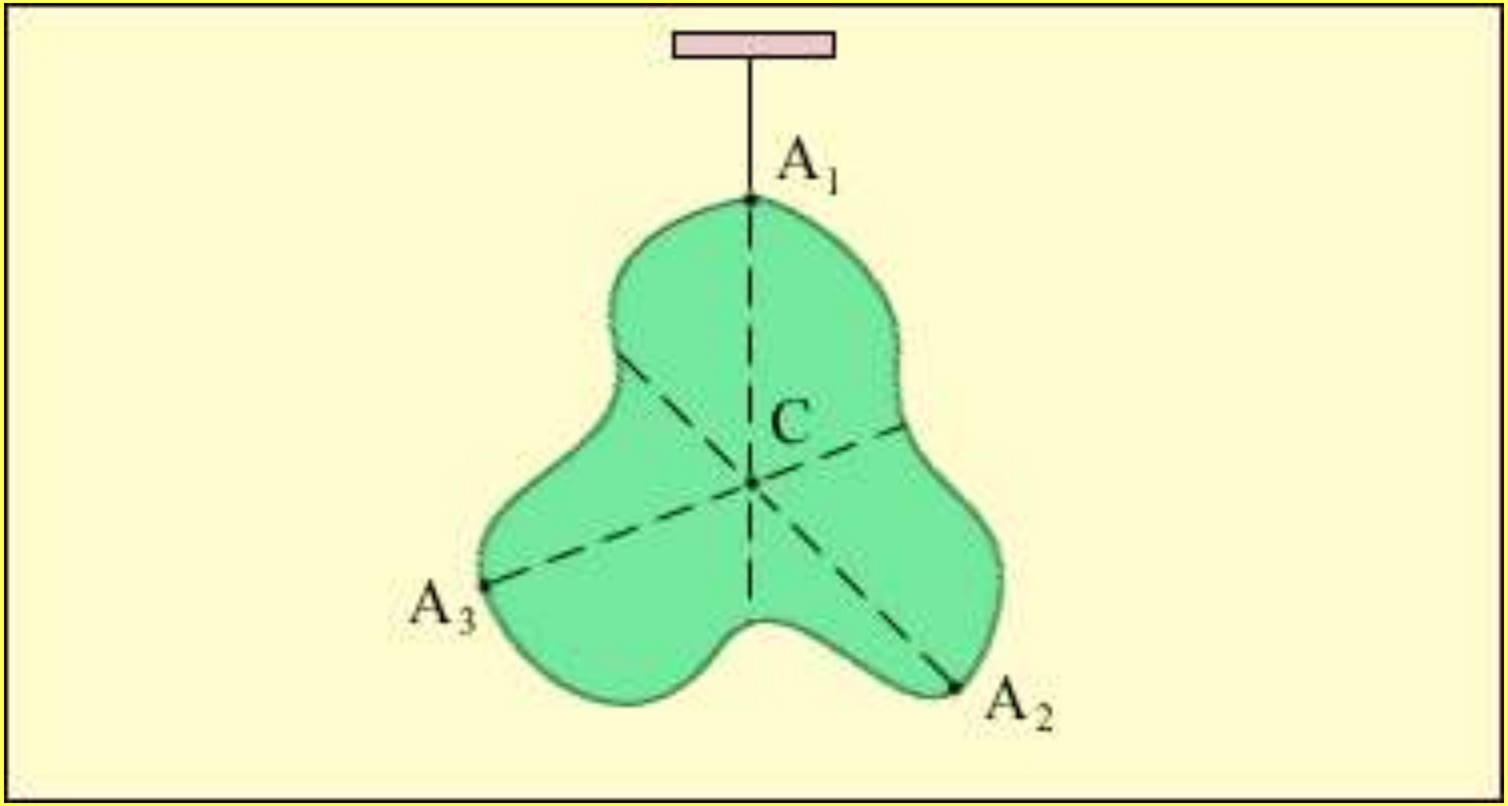
Основные понятия

- Механическая система – совокупность МТ (тел), рассматриваемых как единое целое
- Внутренние силы – силы взаимодействия между МТ механической системы
- Внешние силы – силы, с которыми на МТ механической системы действуют внешние тела

Центр масс системы материальных точек (тела)

ЦМ - это воображаемая точка С, положение которой характеризует распределение массы этой системы (тела).

Для определения положения ЦМ достаточно поочередно подвесить тело за две различные точки на его поверхности и провести через точки подвеса вертикали, пересечение которых и даст положение центра масс (вообще говоря центр масс может располагаться вне тела).


A1
C
A3
A2

Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m} \qquad (4.4)$$

где m_i и $\vec{r}_i$ - соответственно масса и радиус-вектор i-ой МТ; n - число МТ в системе; m - масса системы (масса величина аддитивная, т.е. $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\mathrm{n}$)

Заметим, что:

$$m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \qquad (4.5)$$

- Математическая запись
- Физический смысл –

свойство аддитивности: масса системы МТ является суммой масс МТ, составляющих эту системы

Скорость центра масс

- Учтем, что

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m}$$

- Получим результат:

$$\vec{v}_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i}{m} \qquad (4.6)$$

Закон движения центра масс

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \qquad (4.7)$$

Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме внешних сил, прилоэженных к системе.

4.3. Определение замкнутой механической системы МТ

Система тел, взаимодействующих только между собой и не взаимодействующих с другими (внешними) телами, называется ЗАМКНУТОЙ.

Для замкнутых систем существуют такие функции координат и скоростей, образующих систему частиц, которые сохраняют при движении постоянные значения.

Эти функции носят название **интегралов движения**.

Вообще говоря, система из N частиц, между которыми нет жестких связей, имеет **6·N – 1 интегралов движения**.

Но **аддитивных интегралов движения** имеется всего три:

- **энергия;**
- **импульс (количество движения);**
- **момент импульса (момент количества движения).**

Свойство аддитивности заключается в том, что значения интеграла движения для системы, состоящей из частей, взаимодействием которых можно пренебречь, равно сумме значений для каждой из частей в отдельности.

Для замкнутых систем неизменными оказываются три физические величины:

- **энергия,**
- **импульс,**
- **момент импульса**.

Для них имеют место **соответствующие законы сохранения**, которые в свою очередь тесно связаны с **основными свойствами пространства и времени**.

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ	⇔	ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА	⇔	ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА	⇔	ИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА

ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ –

ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА –
одинаковость свойств пространства во всех точках.

ИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА –

ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ –

равнозначность всех моментов времени, т.к. замена момента времени t_1 на t_2 без изменения координат и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы.

ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА –

одинаковость свойств пространства во всех точках.

ИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА –

одинаковость свойств пространства по всем направлениям, т.е. поворот замкнутой системы как целого не отражается на ее механических свойствах.

4.4. Закон сохранения импульса

Рассмотрим систему, состоящую из двух тел. Опыт показывает, что для **замкнутой системы тел** при $v << c$:

$$\frac{|\Delta v_1|}{|\Delta v_2|} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (4.8)$$

$$m_1 \cdot \Delta\vec{v}_1 \;=\; -m_2 \cdot \Delta\vec{v}_2$$

Опыт показывает, что эти приращения всегда имеют противоположные направления.

При $m = \text{const}$:

$$\Delta(m_1 \cdot \vec{v}_1) \;=\; -\Delta(m_2 \cdot \vec{v}_2) \qquad (4.9)$$

Закон сохранения импульса:

импульс замкнутой системы не изменяется

с течением времени, т.е.

$$\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \vec{P} = \mathrm{const}\,. \qquad (4.10)$$

Этот закон – фундаментальный закон природы (он универсален).

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0 \qquad \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0$$

Тогда

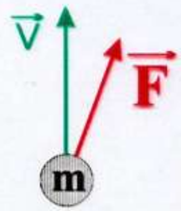
$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \mathrm{const}, \qquad (4.11)$$

где $\vec{P}$ - полный импульс замкнутой системы.

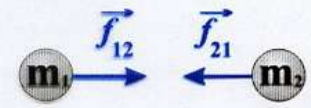
Утверждение (4.11) также выражает **закон сохранения импульса**.

МЕХАНИКА ➤ Законы Ньютона

Для материальной точки



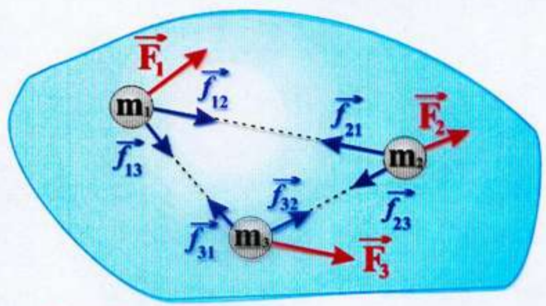
$$\vec{F}\Delta t = \Delta(m\vec{v})$$



$\vec{F} = 0$, $m = const$ | $m = const$

$\vec{v} = const$	$\vec{F} = m\vec{a}$	$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$
I ЗАКОН	II ЗАКОН	III ЗАКОН

Для системы тел



$$(\vec{F}\Delta t)_{сист} = \Delta\vec{P}_{сист}$$

$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ - внешние силы

$\vec{f}_{12}, \vec{f}_{21}, \vec{f}_{13}, \vec{f}_{31}, \vec{f}_{23}, \vec{f}_{32}$ - внутренние силы

Приращение импульса $\vec{P}$ системы тел равно по величине и по направлению импульсу **внешних сил**, действующих на тело.

Внутренние силы не могут изменять состояние системы

Весьма важное утверждение:

- **Импульсом могут обладать не только частицы и тела, но также и поля.**

- Например,

свет оказывает давление на поверхность отражающего или поглощающего тела именно потому, что электромагнитное поле световой волны обладает импульсом.

4.5. Центральные удары двух тел: абсолютно упругий и абсолютно неупругий удары (начало)

Определения

Удар – столкновение тел, при котором за весьма малый промежуток времени происходит значительное изменение скоростей тел.

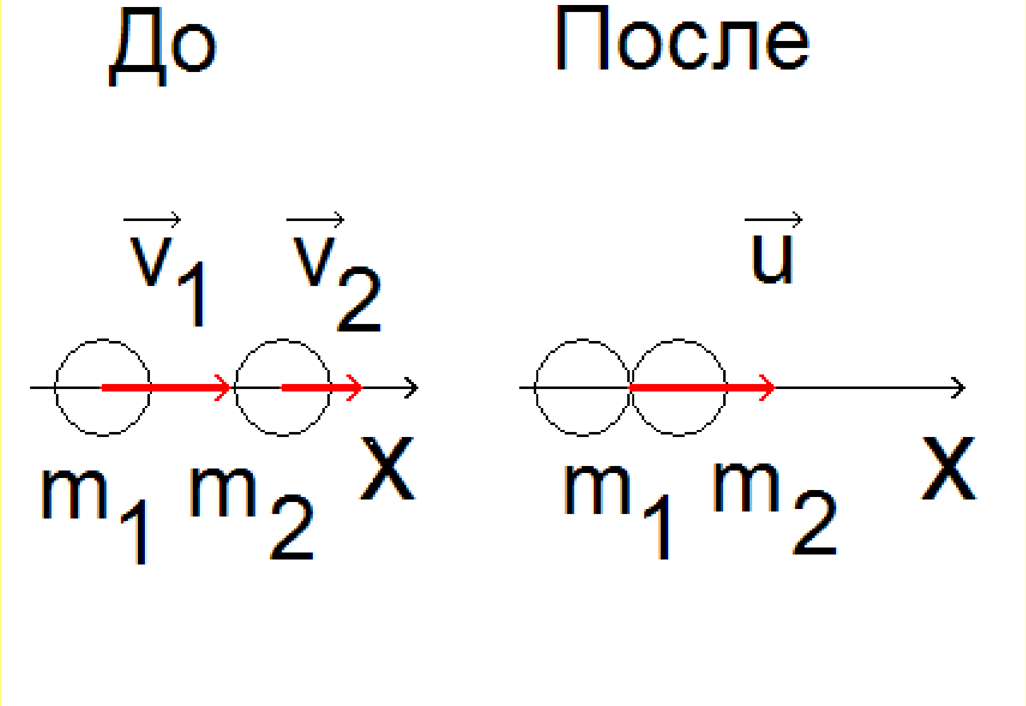
Центральный удар – удар, если в момент удара центры масс сталкивающихся тел находятся на линии удара.

Удар называется **прямым**, если скорости центров масс сталкивающихся тел перед ударом направлены параллельно линии удара.

Абсолютно неупругий удар

Абсолютно неупругий удар имеет место в случае, если после удара оба тела движутся как одно целое.

Пример. В случае центрального удара:



В этом случае можно показать, что после абсолютно неупругого прямого центрального удара тела движутся также поступательно со скоростью (вывод самостоятельно)

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.12)$$

Изменение кинетической энергии системы двух сталкивающихся тел (вывод самостоятельно)

$$\Delta W_K = \frac{m_1 + m_2}{2} u^2 - \frac{m_1}{2} v_1^2 - \frac{m_2}{2} v_2^2 =$$

$$= -\frac{m_1 \cdot m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 < 0$$

(4.13)

Если второе тело до удара покоится, то относительное уменьшение кинетической энергии системы при абсолютно неупругом прямом центральном ударе (вывод самостоятельно):

$$-\frac{\Delta W_K}{W_{K_1}} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \,. \qquad (4.14)$$

Абсолютно неупругий прямой центральный удар используется в технике:

- для изменения формы тел (ковка, штамповка, клепка и т.п.);
- для перемещения тел в среде с большим сопротивлением.

В случае изменения формы тел (ковка, штамповка, клепка и т.п.) необходимо, чтобы $-\Delta W/W \to 1$, т.е.необходимо, чтобы $m_2 >> m_1$ (масса изделия и наковальни должна во много раз превосходить массу молота).

В случае перемещения тел в среде с большим сопротивлением (забивание гвоздей, свай и т.п.) потери кинетической энергии должны быть возможно меньшими, т.е. чтобы $m_1 >> m_2$ (масса молотка должна во много раз превосходить массу забиваемого гвоздя).

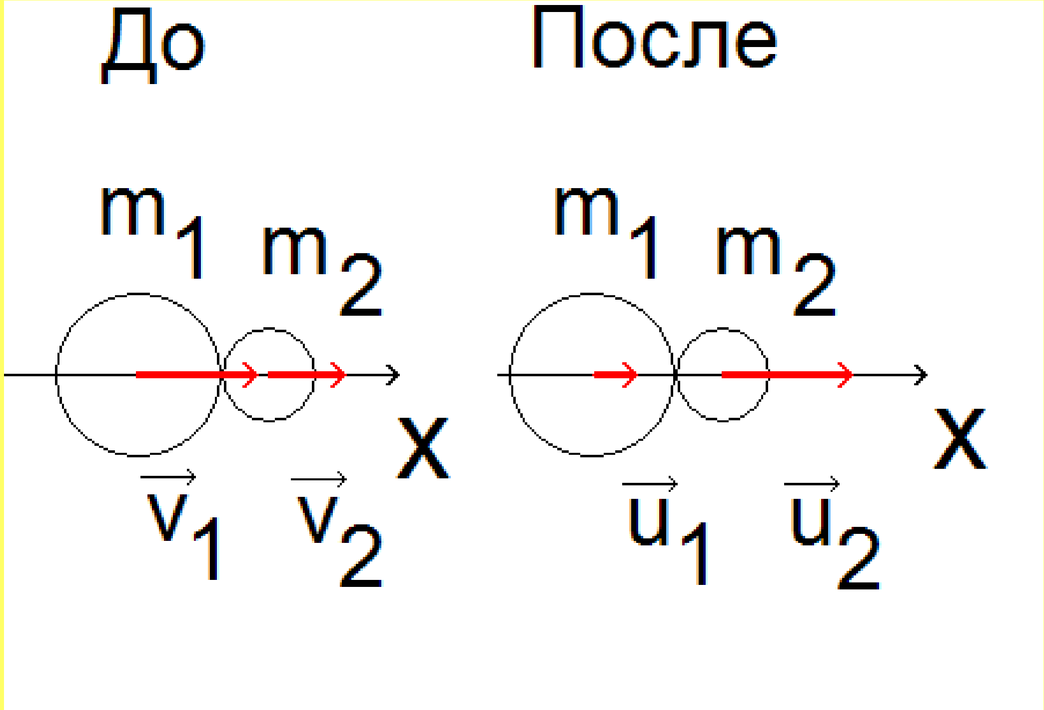
СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Дополнительные материалы

Абсолютно упругий удар

Имеет место в случае, если при этом ударе механическая энергия системы не изменяется, т.е. тела являются абсолютно упругими.

<u>Пример.</u> *Абсолютно упругий прямой центральный удар*:



Для нахождения скоростей u_1 и u_2 воспользуемся законами сохранения импульса и механической энергии:

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 u_1^2}{2} + \dfrac{m_2 u_2^2}{2} \end{cases}$$

Скорости u_1 и u_2 направлены вдоль оси OX, а их проекции на эту ось равны (*вывод самостоятельно*):

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

$$u_{2x} = \frac{2m_1 v_{1x} + (m_2 - m_1)v_{2x}}{m_1 + m_2}$$

В частности,

• *если массы тел одинаковы*, то при ударе тела обмениваются скоростями:

$$u_{1x}=v_{2x} \quad \text{и} \quad u_{2x}= v_{1x};$$

• *если масса второго тела во много раз больше массы первого тела*, то

$$u_{1x}\approx 2v_{2x} - v_{1x} \text{ и } u_{2x}\approx v_{2x}.$$

Пример. *Абсолютно упругий косой центральный удар (самостоятельно)*