ЛЕКЦИЯ 6

7 октября 2011 года

Тема №3:
Динамика вращения твердого тела. Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела

Вектор момента силы относительно неподвижной точки. Момент силы относительно оси (скаляр). Плечо силы. Примеры определения направления вектора момента силы. Пара сил**, момент пары сил. Вектор момента импульса МТ.** Плечо импульса. Примеры определения направления момента импульса. **Момент импульса твердого тела**, его аналогия с импульсом МТ. **Момент инерции тела: определение и примеры для сравнительного анализа момента инерции различных модельных систем (кольцо, диск, шар, стержень)**. **Теорема Штейнера**, примеры ее применения. **Основной закон динамики вращательного движения твердого тела в векторной форме**, его аналогия со вторым законом Ньютона для поступательного движения тела. **Закон сохранения момента импульса.** Кинетическая энергия вращательного движения твердого тела. **Примеры расчета кинетической энергии твердого тела при его одновременном поступательном и вращательном движении.**

6.1. Момент силы

Для характеристики внешнего механического действия на тело, приводящего к изменению вращательного движения тела, вводят понятие **момента силы:**

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right] \qquad (6.1)$$

Модуль момента силы

$$M = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot l$$

МЕХАНИКА

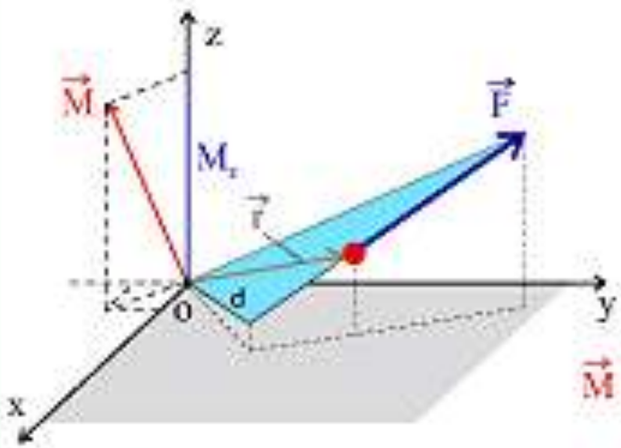
Момент силы

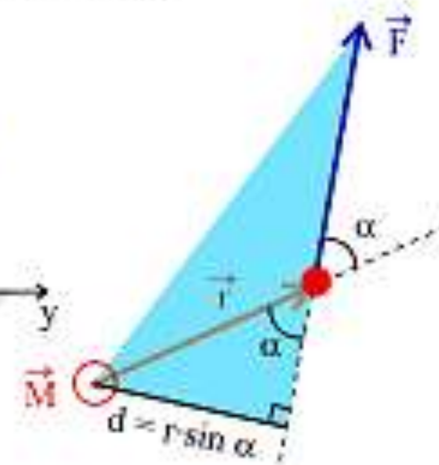
Момент силы $\vec{F}$ относительно точки О есть *псевдовектор*:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

$\vec{r}$ - радиус-вектор точки приложения силы

Момент силы есть величина, характеризующая вращательный эффект силы





Вектор $\vec{M}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{F}$ и $\vec{r}$

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}}) = F \cdot d \qquad d = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{F}})$$ - плечо силы

Проекция вектора $\vec{M}$ на некоторую ось Z называется моментом силы M_z относительно оси

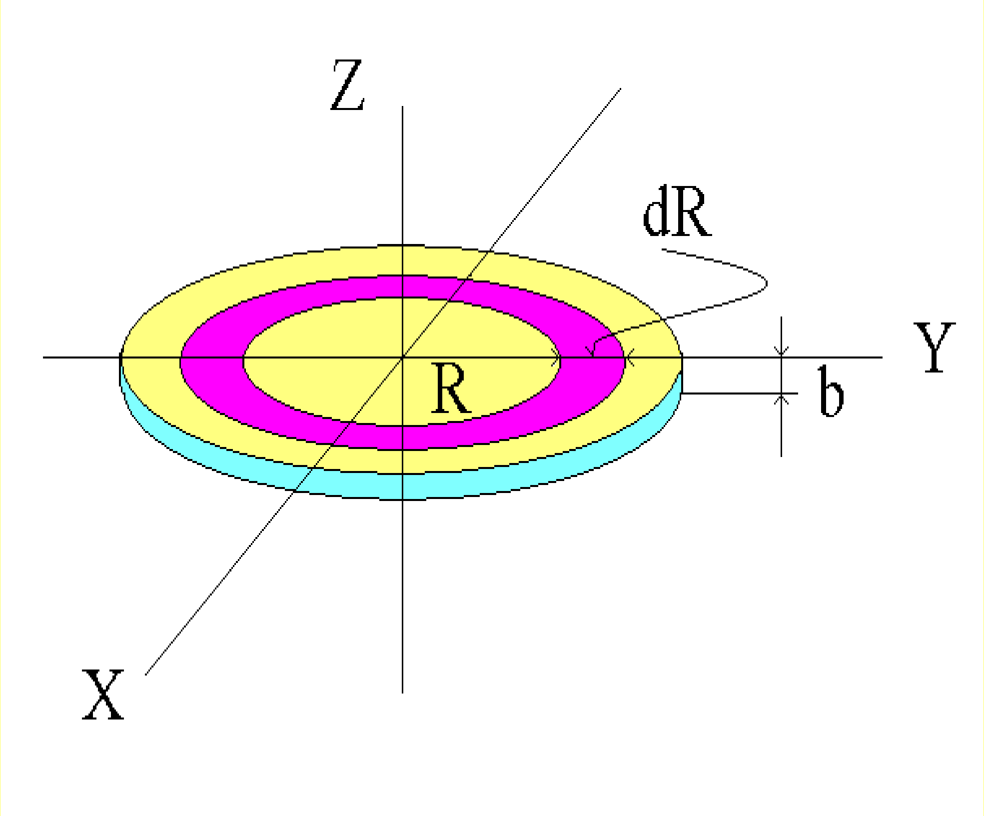
Для системы м.т. полный момент $\vec{M}_{системы}$ относительно точки О:

$$\vec{M}_{системы} = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

6.2. Момент инерции

Пример 1. Найти момент инерции однородного диска массой m, радиуса R_0 и толщиной b.

Момент инерции однородного диска относительно его оси



$$V = b \cdot \pi R^2$$

$$\mathrm{d}V = b \cdot 2\pi R \cdot \mathrm{d}R$$

Момент инерции однородного диска

$$I = \int\limits_{(V)} \rho R^2 \mathrm{d}V = \int\limits_{(V)} \rho R^2 b \cdot 2\pi R \cdot \mathrm{d}R =$$

$$= 2\pi\rho b \cdot \int\limits_0^{R_0} R^3 \cdot \mathrm{d}R = 2\pi b \cdot \rho \cdot \left.\frac{R_0^4}{4}\right|_0^{R_0} = \pi b \cdot \rho \cdot \frac{R_0^4}{2}.$$

Заметим, что $m = \left(b \cdot \pi R_0^2\right) \cdot \rho$;

тогда

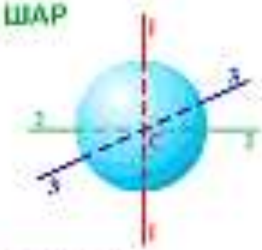
$$I = \frac{mR_0^2}{2} \; .$$

МЕХАНИКА

Главные моменты инерции

Момент инерции тела относительно главной оси инерции называется главным моментом инерции

ШАР

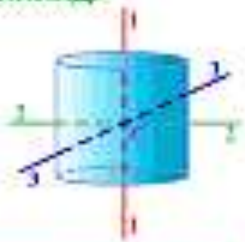


Если тело обладает центральной симметрией - все три главных момента инерции одинаковы

$$I_1=I_2=I_3$$

(любая ось, проходящая через центр инерции C является главной)

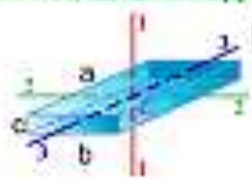
ЦИЛИНДР



Для тел с осевой симметрией два главных момента инерции имеют одинаковую величину

$$I_1\neq I_2=I_3$$

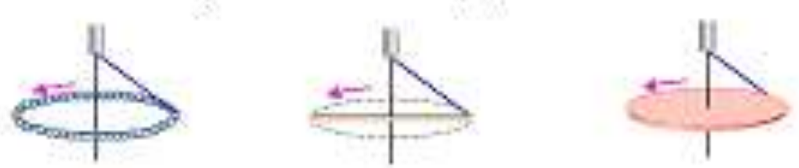
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД



В общем случае главные моменты инерции различны (a > b > c)

$$I_1>I_2>I_3$$

Устойчивое вращение тел возможно только вокруг главных осей инерции, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции



РНПО Росучприбор Южно-Уральский государственный университет

Моменты инерции некоторых модельных тел

Тело	Положение оси a	Момент инерции I_a
Однородный диск	Ось диска	$I_a = mR_0^2/2$
Кольцо	Ось кольца	$I_a = mR_0^2$
Полый тонкостенный цилиндр	Ось цилиндра	$I_a = mR_0^2$
Шар	Проходит через центр	$I_a = 2mR_0^2/5$

Теорема Штейнера

- **<u>Момент инерции</u>** данного тела относительно какой-либо оси зависит не только от массы, формы и размеров тела, но также от положения тела по отношению к этой оси.
- <u>Теорема Штейнера:</u> момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния d между осями.

6.3. Момент импульса

Моментом импульса (моментом количества движения) МТ относительно неподвижной точки *O* (полюса) называется вектор $\boldsymbol{L}$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, проведенного из полюса *O* в место нахождения МТ, на вектор $\boldsymbol{p}$ ее импульса:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = [\vec{r}, m\vec{v}] \qquad (6.6)$$

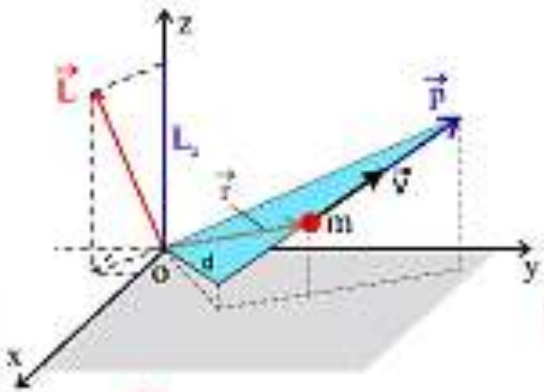
МЕХАНИКА

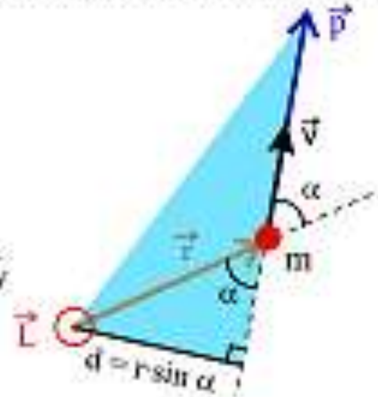
Момент импульса

Момент импульса $\vec{L}$ материальной точки m относительно точки О есть *псевдовектор:* $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$

$\vec{r}$ - радиус-вектор материальной точки m

Момент импульса есть есть мера механического движения



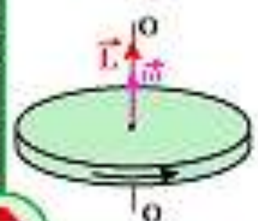


Вектор $\vec{L}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{p}$ и $\vec{r}$

$L = r \cdot p \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{p}}) = p \cdot d \qquad d = r \cdot \sin(\widehat{\vec{r}\,\vec{p}})$ - плечо импульса

Проекция вектора $\vec{L}$ на некоторую ось Z называется моментом импульса L_z относительно оси

Для системы материальных точек полный момент $\vec{L}$ относительно точки О: $\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$



Момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$ относительно главной оси OO

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

I - момент инерции тела относительно оси OO

РНПО Росучприбор   Южно-Уральский государственный университет

6.4. Основной закон динамики вращательного движения

Скорость изменения момента импульса $\boldsymbol{L}$ механической системы относительно любой неподвижной точки O равна главному моменту $\boldsymbol{M}_{внешн}$ относительно той же точки O всех внешних сил, приложенных к системе.

6.5. Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы относительно любой неподвижной точки не изменяется с течением времени, т.е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \equiv 0 \quad \text{или} \quad \vec{L} = \text{const}\ . \qquad (6.9)$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ	$\Leftrightarrow$	ОДНОРОДНОСТЬ ВРЕМЕНИ
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА	$\Leftrightarrow$	ОДНОРОДНОСТЬ ПРОСТРАНСТВА
ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА	$\Leftrightarrow$	ИЗОТРОПИЯ ПРОСТРАНСТВА

Пример 2. На скамье Жуковского стоит человек и держит на вытянутых руках гири по m=10 кг каждая. Расстояние от каждой гири до оси вращения скамьи l_1=50 см. Скамья вращается с частотой ν_1=1 Гц.

Как изменится частота вращения скамьи и какую работу произведет человек, если он сожмет руки так, что расстояние от каждой гири до оси вращения уменьшится до l_2=20 см?

Суммарный момент инерции человека и скамьи относительно оси вращения I_0=2,5 кг·м^2. Ось вращения проходит через центр масс человека и скамьи.

6.6. Аналогия между поступательным и вращательным движением

Таблица 6.1. Аналогия между поступательным и вращательным движением

Поступательное движение	Вращательное движение	Связь между величинами
Линейное перемещение $\Delta\vec{r}$	Угловое перемещение $\Delta\varphi$	$\Delta r = \Delta\varphi \cdot R$
Мгновенная линейная скорость	Мгновенная угловая скорость $\vec{\omega}$	$\vec{v} = \left[\vec{r},\ \vec{\omega}\right]$
… (***кинематика***)	…	
Масса m	Момент инерции I	$I = m \cdot r^2$ (для МТ)
Сила	Момент силы	

Аналогия между поступательным и вращательным движением

Поступательное движение	**Вращательное движение**	**Связь между величинами**
II закон Ньютона	II закон Ньютона для вращательного движения	
Импульс тела	Момент импульса тела	
Основное уравнение динамики (II закон Ньютона)	Основное уравнение динамики (II закон Ньютона)	
Кинетическая энергия поступательного движения	Кинетическая энергия вращательного движения	

6.7. Кинетическая энергия вращающегося тела

Кинетическая энергия твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с угловой скоростью ω

$$W_{\mathrm{K}} = \frac{I\omega^2}{2}\,, \qquad (6.10)$$

где I - момент инерции тела относительно мгновенной оси вращения.

Элементарная работа, совершаемая за малый промежуток времени dt силой $\boldsymbol{F}$**, действующей на тело,** равна

$$\mathrm{d}A = \vec{M}\vec{\omega}\mathrm{d}t = \vec{M}\mathrm{d}\vec{\varphi} = M_{\omega}\mathrm{d}\varphi. \qquad (6.11)$$

Приращение кинетической энергии твердого тела за время dt равно работе внешних сил:

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{K}} = M_{\omega}^{\text{внешн}}\mathrm{d}\varphi. \qquad (6.12)$$

Кинетическая энергия свободного твердого тела может быть найдена на основе теоремы Кенига:

$$W_{\text{К}} = \frac{mv_{\text{C}}^2}{2} + \frac{I_{\text{C}}\omega^2}{2}. \qquad (6.13)$$

Пример. Кинетическая энергия катящегося цилиндра:

$$W_{\text{К}} = \frac{mv_{\text{C}}^2}{2} + \frac{I_{\text{C}}\omega^2}{2} = \ldots = \frac{3}{4}mv_{\text{C}}^2 .$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

Лекция №7

Неинерциальные системы отсчета. Закон всемирного тяготения