Механика

- **Введение. Физические основы механики**
- **Кинематика материальной точки**
- **Динамика материальной точки**
- **Работа. Энергия. Закон сохранения энергии**
- **Динамика вращения абсолютно твердого тела**
- **Неинерциальные системы отсчета. Закон всемирного тяготения**
- **Ограниченность классической механики. Специальная теория относительности**

Введение. Физические основы механики

1. Вводные сведения

Предмет и метод физики

Физика (φνσισ) - природа. Так назвал сочинение Аристотель (IV в. до н.э.) в котором он собрал все имеющиеся сведения по геометрии, астрономии, медицине, земледелию, ботанике и др. Все естественные науки физика первоначально включала в себя.

Материя и формы ее движения

Материя - это все, что реально существует в природе и может быть обнаружено человеком с помощью органов чувств и приборов и существует независимо от сознания человека.

Виды материи: вещество (совокупность элементарных частиц) и поле (переносчик взаимодействия между элементарными частицами). Вещество и поле едины, могут трансформироваться друг в друга.

Движение материи - изменение материи в пространстве с течением времени.

Формы движения материи: механическая, атомно-молекулярная, электромагнитная, гравитационная, внутриатомная, внутриядерная - наиболее общие, физические формы движения.

Все они содержатся в более сложных формах движения материи: химической, биологической, общественной, геофизической, планетарной, звездной, галактической и т.п.

Предметом исследования физики являются наиболее общие формы движения материи.

Задача физики - построение наиболее полной картины мира с помощью моделирования. Соотношения между элементами модели при этом должны соответствовать отношению элементов в мире. При создании моделей учитываются только наиболее существенные связи и свойства явлений, поэтому любая модель всегда ограничена рамками применимости.

Метод физики - материалистическая диалектика: рассмотрение всех явлений в их взаимосвязи и развитии путем перехода количества в качество в результате внутренних противоречий. Мир познаваем, но неисчерпаем, т.к. бесконечно число его свойств. Человек познает мир в результате взаимодействия с ним, т.е. в результате наблюдения и эксперимента. Поэтому физика - наука экспериментальная: все физические теории базируются на опыте и предназначены для воплощения в опыте.

Основными методами физического исследования являются наблюдение и эксперимент, на основе которых выдвигаются гипотезы, строятся модели исследуемых явлений. *Развитие науки*: от наблюдения к гипотезе, к проверке гипотезы на опыте, после которого подтвержденная гипотеза становится теорией. Практика - критерий истинности теории. Многократная проверка физической модели на опыте подтверждает гипотезу. После этого гипотеза становится теорией, объясняющей наблюдаемые закономерности и предсказывающие новые. Без проверки на опыте любая гипотеза остается умозрительной моделью (мысленным экспериментом). Как только результаты экспериментов перестают описываться соответствующей теорией, она должна быть заменена новой, более общей.

Все фундаментальные законы физики являются обобщением опыта человека. Физика изучает наиболее общие (базовые) формы движения материи, поэтому она является фундаментом всех естественнонаучных дисциплин. Языком физики является математика, хотя математика как наука самодостаточна и развивается самостоятельно.

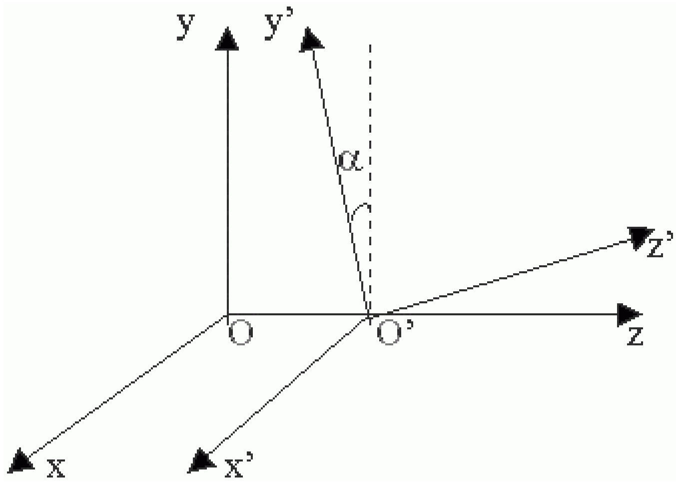
Абсолютная истина: объективное существование материи, *относительная истина*: наши представления о материи и е. свойствах. Всякая физическая теория - относительная истина, верная в определенных пределах.

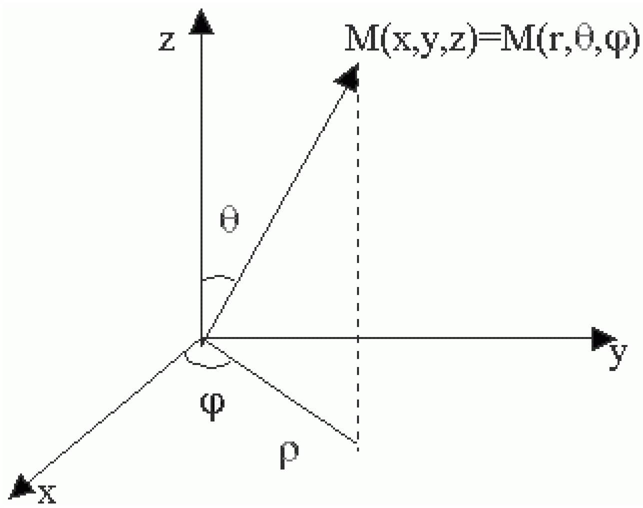
Численный эксперимент, проводимый с помощью анализа параметров математических моделей, описывающих физические процессы, в последнее время во всех естественных науках, особенно в физике, выдвинулся на передовые позиции. Это связано со все возрастающей сложностью и дороговизной физического эксперимента, с требованиями экологической безопасности. Возможность заранее прогнозировать результаты физического эксперимента и оптимальные параметры для его проведения с помощью численного эксперимента явилась революционным прорывом в физике. Управление параметрами экспериментальной установки являются неотъемлемыми функциями современного автоматизированного физического оборудования. Результаты решения дифференциальных и интегральных уравнений численными методами изменили научные представления целого поколения ученых. Возможность графического представления результатов численного счета с помощью современных средств 3D- графики позволяют на новом, ранее не доступном образном уровне анализировать протекание физических процессов.

Физические основы механики

Основные физические абстракции и определения

Система отсчета: система координат, жестко связанная с телом отсчета и способ измерения времени (часы). Систем отсчета существует бесконечное множество. Выбор соответствующей системы отсчета обусловлен удобством и простотой решения физической задачи.





Материальная точка: тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь:

1. размеры тела малы по сравнению с расстояниями при его движении;
2. все точки тела движутся одинаково (по одинаковым линиям с одинаковыми скоростями).

Абсолютно твердое тело: тело, взаимное расположение частиц которого при его движении остается неизменным. *Сплошная среда*: совокупность частиц, расположенных на бесконечно малых расстояниях друг от друга и связанных упругими силами притяжения и отталкивания.

Механическое движение тел - изменение их положения в пространстве с течением времени.

Основная задача механики: определение положения тела в пространстве в каждый момент времени.

Движение тела относительно: для определения движения тела необходимо выбрать другое тело, условно принятое за неподвижное. Движение тела подразделяется на:
- поступательное (все точки тела двигаются одинаково);
- вращательное (точки тела описывают окружности);
- колебательное (возвратно-поступательное либо возвратно-вращательное).

Поступательное движение изучается как движение материальной точки, т.к. все точки тела в этом случае движутся одинаково.

Основные характеристики движения материальной точки

1. *траектория* - линия, вдоль которой движется материальная точка;
2. *пройденный путь* - расстояние, пройденное точкой по е. траектории;
3. *перемещение* - вектор, направленный от положения материальной точки в начальный момент времени наблюдения к е. положению в конце промежутка времени наблюдения;
4. *скорость* - вектор, характеризующий направление и быстроту перемещения точки;
5. *ускорение* - вектор, характеризующий направление и быстроту изменения скорости точки относительно тела отсчета.

Закон независимости движений: если материальная точка участвует в нескольких движениях, то е. перемещение равно векторной сумме перемещений, а скорость - векторной сумме скоростей.

1. Кинематика материальной точки

Предмет кинематики: описание механических движений тела без рассмотрения причин изменения вида движения.

Перемещение, скорость, ускорение при прямолинейном и криволинейном движении

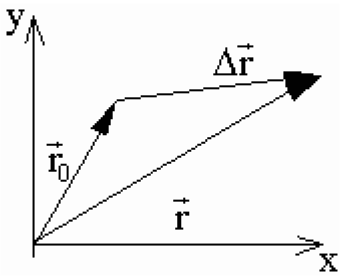
Равномерное прямолинейное движение: движение, при котором материальная точка движется по прямой линии и в любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.

Неравномерное движение: движение, при котором скорость точки изменяется со временем по величине и (или) по направлению.

Средняя скорость движения: скалярная - отношение пути к промежутку времени, в течение которого материальная точка прошла этот путь $v_{ср} = L/\Delta t$, векторная - отношение перемещения точки к промежутку времени, в течение которого точка совершила перемещение

$$\vec{v}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad (1.1)$$

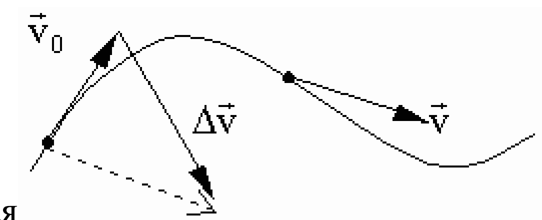
Мгновенная скорость - величина, равная пределу средней векторной скорости при уменьшении промежутка времени $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ [м/с].



Среднее ускорение: величина, равная отношению разности векторов конечной и начальной скоростей к промежутку времени изменения скорости

$$\vec{a}_{ср} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \qquad (1.2)$$

где $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, $\Delta t = t - t_0$

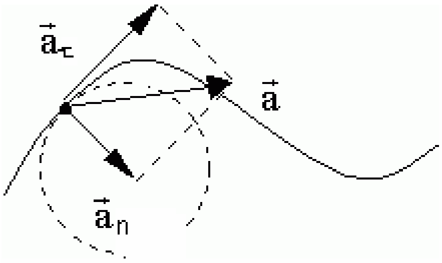


Мгновенное ускорение: величина, равная пределу отношения изменения вектора скорости к промежутку времени, в течение которого изменение скорости произошло

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.3)$$

$$\left[\frac{м}{с}/с\right]=\left[\frac{м}{с^2}\right]$$

Вектор ускорения раскладывают на две компоненты: *тангенциальное* (*касательное* к траектории) $\vec{a}_\tau$ и *нормальное* (*центростремительное*) $\vec{a}_n$



$$\vec{a}=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$
$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2} \qquad (1.4)$$

$\vec{a}_\tau$ изменяет только величину скорости, а $\vec{a}_n$ - только ее направление. *Мгновенный радиус кривизны траектории* определяется радиусом окружности, вписанной в участок траектории в данный момент времени.

Равноускоренное движение: движение с постоянным по величине ускорением $\vec{a}=\text{const}$.

В этом случае

$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\int_{t_0}^{t}\vec{a}dt=\int_{v_0}^{v}d\vec{v},\quad \vec{a}(t-t_0)=\vec{v}-\vec{v}_0$$

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}(t-t_0) \qquad (1.5)$$

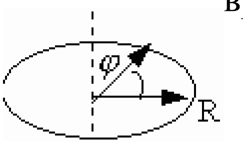
и

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}\Rightarrow\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}_0+\vec{a}t \text{ при } t_0=0$$

$$\int_{r_0}^{r}d\vec{r}=\int_0^t\vec{v}_0dt+\int_0^t\vec{a}tdt,\quad \vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0t+\frac{\vec{a}t^2}{2} \qquad (1.6)$$

Вращательное движение. Связь между векторами линейной и угловой скоростей, линейного и углового ускорений.

Мера вращательного движения: угол φ, на который повернется радиус-вектор точки в плоскости, нормальной к оси вращения.



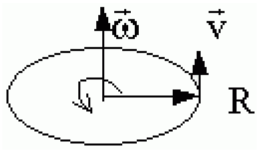
Равномерное вращательное движение: за любые равные промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы.

Средняя угловая скорость тела равна отношению угла поворота к промежутку времени.

Мгновенная угловая скорость равна пределу отношения угла поворота к промежутку времени

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} \qquad (1.7)$$

Направление вектора $\vec{\omega}$ задается правилом правого винта.



Среднее угловое ускорение $\varepsilon_{ср.}$ - величина, равная отношению изменения угловой скорости к промежутку времени

$$\vec{\varepsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} \qquad (1.8)$$

Мгновенное угловое ускорение - предел отношения изменения угловой скорости к промежутку времени

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \qquad (1.9)$$

Направление $\vec{\varepsilon}$ определяется направлением $\Delta\vec{\omega}$. При равноускоренном вращательном движении ε = const - угловое ускорение постоянно. Тогда из

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \omega dt = \int_{\omega_0}^{\omega} d\omega,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon(t - t_0) \qquad (1.10)$$

а из

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \int_0^t \omega_0 dt + \int_0^t \varepsilon t dt,\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \qquad (1.11)$$

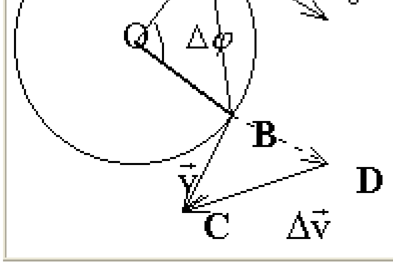
При равномерном вращательном движении точки по окружности е. скорость $\vec{v}$ не меняется по величине ($\vec{a}_\tau$=0), но меняется по направлению $(\vec{a} = \vec{a}_n)$.

Найдем связь линейной v и угловой ω скоростей. Из формулы для ω т.к. Δφ•R = ΔS в пределе получаем

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi R}{\Delta t R} = \frac{1}{R} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v}{R}, \text{ отсюда}$$

$$v = \omega R \qquad (1.12)$$

Определим теперь величину нормального (центростремительного)ускорения:

	ΔOAB подобен ΔDCD т.к. стороны их перпендикулярны. Отсюда $\frac{\Delta v}{v} = \frac{AB}{R} \Rightarrow \Delta v = \frac{v}{R} \cdot AB$ Найдем ускорение

	$a = a_n = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{v \cdot AB}{R \Delta t}$

Но $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{AB}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v$, следовательно

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \qquad (1.13)$$

При R = const изменение угловой скорости обусловлено изменением линейной скорости, т.е.

$$\frac{dv}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_\tau = R\varepsilon \qquad (1.14)$$

Период вращения T - время оборота точки по окружности до совпадения с начальным положением. Период равен:

$$T = \frac{1}{\nu}, \ \left[\frac{1}{c}\right] = [\text{Гц}] \qquad (1.15)$$

.

Частота вращения $\nu = \frac{1}{T}$ - число полных оборотов в единицу времени. При равномерном вращении за период T радиус-вектор точки повернется на угол 2π. Тогда угловая скорость точки равна

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu \qquad (1.16)$$

и называется иначе *угловой (циклической) частотой.*

2. Динамика материальной точки

Законы Ньютона

Предмет динамики: всевозможные взаимодействия тел, приводящие к ускоренным движениям.

Изменение движения тела (*ускорение*) вызывается действием на него других тел. При изучении изменений движения тела удобно изображать действие на него других тел векторами - силами.

- Сила - это мера действия одного тела на другое, вызывающего ускорение последнего (*векторная величина*).

Систему сил можно заменить эквивалентной ей, не изменяющей состояние тела. Если силы действуют вдоль прямых пересекающихся в одной точке, то их действие можно заменить равнодействующей силой равной векторной сумме сил.

- Инерция - явление сохранения телом скорости движения при отсутствии действия на него со стороны других тел (либо взаимной компенсации их действий).
- Инертность - свойство тела, характеризуемое массой, сохранять состояние своего движения (покоя).

I закон Ньютона (закон инерции) 1687 г. (Галилей, 1636 г.)

Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока воздействие со стороны других тел не заставит его изменить это состояние.

- Инерциальными системами отсчета называются системы отсчета, в которых выполняется I закон Ньютона. То есть инерциальная система отсчета - это система отсчета, в которой тела, не подверженные воздействию других тел, движутся прямолинейно и равномерно.
  Любая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной с постоянной скоростью (прямолинейно и равномерно) также является инерциальной.
- Принцип относительности Галилея : все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

II закон Ньютона

Ускорение, приобретаемое материальной точкой под действием силы, направлено также как сила, по величине пропорционально силе и обратно пропорционально массе тела.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \qquad (2.1)$$

Это экспериментальный закон.

Отсюда

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2.2)$$

Получаем для единицы измерения силы:

$$[\text{Н}] = \left[\text{кг}\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right]$$

III закон Ньютона

Силы, с которыми взаимодействуют два тела, равны по модулю и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \qquad (2.3)$$

Из третьего закона Ньютона следует, что для каждой силы можно указать тело, являющееся причиной этой силы. Если же указать такое тело - причину возникшей силы - не удается, то тогда причина "силы" - неинерциальность системы отсчета. Напомним, что законы Ньютона справедливы только в инерциальных системах отсчета.

Принцип независимости действия сил:

каждая действующая сила сообщает телу ускорение, величина которого не зависит ни от состояния движения тела, ни от действия на тело других сил.

Импульс. Закон сохранения импульса

Рассмотрим случай, когда на тело массы *m* действует постоянная сила $\vec{F} = \mathrm{const}$ в течение промежутка времени Δt . Из II закона Ньютона следует, что

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \qquad (2.4)$$

Величина $\vec{F}\Delta t$ - произведение силы на время ее действия называется импульсом силы.

Произведение массы тела на его скорость $\vec{p} = m\vec{v}$ называется импульсом тела.

Изменение импульса тела в единицу времени равно действующей на тело силе

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad (2.5)$$

Импульс постоянной силы, действующей на тело, равен изменению импульса тела

$$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$$

При стремлении промежутка времени действия силы к нулю в пределе **из II закона Ньютона получим**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i \qquad (2.6)$$

- уравнение движения тела.

Из II и III законов Ньютона вытекает закон сохранения импульса. Для двух тел, взаимодействующих друг с другом, и не взаимодействующих с другими телами, т.е. изолированной механической системы.

По III закону Ньютона получаем: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F}_1 \Delta t = -\vec{F}_2 \Delta t$

Поэтому по второму закону Ньютона:

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_{10}) = -m_2(\vec{v}_2 - \vec{v}_{20}) \Rightarrow m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Таким образом, при $\vec{F}_{внеш} = 0 \quad \dfrac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum \vec{p}_i = const$.

Закон сохранения импульса системы тел:

Внутренние силы - силы, с которыми взаимодействуют тела системы между собой.

Внешние силы действуют со стороны тел, не входящих в систему.

Замкнутая система - это система, на которую внешние силы не действуют.

Сумма импульсов тел до взаимодействия равна сумме импульсов тел после взаимодействия в замкнутой (изолированной) механической системе.

Докажем это

По II закону Ньютона, примененному к каждому телу рассматриваемой замкнутой системы, состоящей из N тел, имеем:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \ldots + F_{1N},$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \ldots + F_{2N},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{F}_{N1} + \vec{F}_{N2} + \ldots + F_{N,N-1}$$

Сложим эти уравнения. Поскольку по III закону Ньютона $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ или $\vec{F}_{ik} + \vec{F}_{ki} = 0$, то $\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\vec{F}_{ik} = 0$ и справа получим ноль. Слева - производную по времени от полного импульса системы.

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N) = 0$$

Производная - ноль, значит, сама величина - константа.

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_N = \text{const} \qquad (2.7)$$

В неизолированной системе имеется внешняя сила $\vec{F} = \vec{F}_{внеш}$, действующая на тела системы. В этом случае:

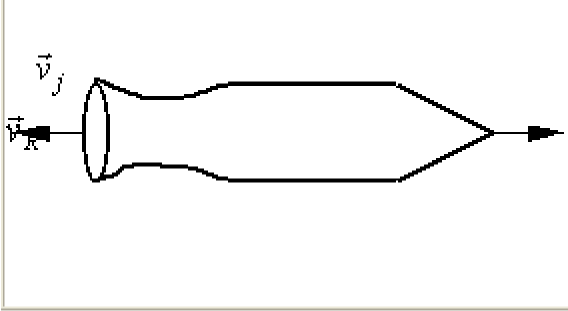
$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

и

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_i = \int_0^t \vec{F}dt \qquad (2.8)$$

Если система не замкнута, но внешние силы не действуют на неё вдоль каких-либо осей, то соответствующие компоненты импульса сохраняются,

Движение тела переменной массы. Реактивное движение

	Для изолированной системы "ракета-струя" выполняется закон сохранения импульса $0 = m_j v_j + M v_R$, R- ракета, j-струя. Отсюда $\vec{v}_R = -\frac{m_j}{M} v_j$

Уравнение Мещерского

Пусть масса ракеты с топливом *M*, т.е. е. импульс $p_R^0 = Mv_R$. За время Δt из сопла ракеты вылетает масса газа $m_{1S}\Delta t$, т.е. импульс газа

$$p_S = m_{1S}\Delta t(v_R + v_S) \qquad (2.9)$$

где $v_R + v_S$ - скорость струи в неподвижной системе отсч.та. К концу промежутка Δt масса ракеты $M - m_{1S}\Delta t$, а е. скорость $v_R + \Delta v_R$. Общий импульс системы "ракета - струя" в конце промежутка Δt равен

$$p_R = (M - m_{1S}\Delta t)(v_R + \Delta v_R) + m_{1S}\Delta t(v_R + v_S) \qquad (2.10)$$

Изменение импульса за время Δt равно *импульсу внешних сил $F_{внеш}$* **(сопротивление среды):**

$$p_R - p_R^0 = F_{внеш}\Delta t$$

т.е.

$$Mv_R - m_{1S}v_R\Delta t + M\Delta v_R - m_{1S}\Delta v_R\Delta t + m_{1S}v_R\Delta t + m_{1S}v_S\Delta t -$$
$$- Mv_R = F_{внеш}\Delta t$$

В пределе при $\Delta t \to 0$ получим дифференциальное уравнение движения ракеты

$$M\frac{dv_R}{dt} = -m_{1S}v_S + F_{внеш} \qquad (2.11)$$

- *уравнение Мещерского*

где $F_{внеш}$ - внешние силы (сопротивление среды и т.п.).

Некоторые виды сил, рассматриваемых в механике

Силы упругости

- При деформациях тела, составляющие его частицы смещаются друг относительно друга. В соответствии с III законом Ньютона внутри деформированного тела возникает противодействующая сила, равная по величине деформирующей силе, и называемая *силой упругости.* Сила упругости обусловлена *электромагнитным* взаимодействием между атомами тела.
- Виды деформации тел:

одностороннее или всестороннее

1. Растяжение
2. Сжатие
3. Изгиб
4. Кручение
5. Сдвиг

(по одной либо по всем осям)

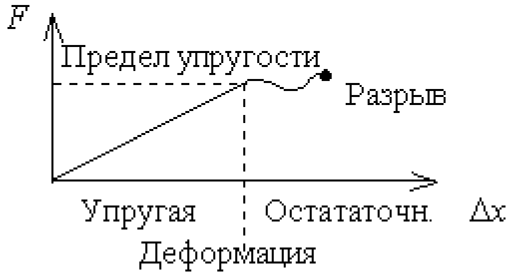
Каждый вид деформации вызывает появление соответствующей силы упругости.

- **Закон Гука**

Упругая сила, возникающая при малых деформациях любого вида, пропорциональна величине смещения

$$F = -kx \qquad (2.12)$$

где k - коэффициент пропорциональности.



Деформация называется *упругой*, если после устранения деформирующей силы тело восстанавливает первоначальную форму. При больших смещениях возникает *остаточная деформация* - тело не восстанавливает форму.

Опыт показывает, что удлинение стержня пропорционально деформирующей силе и первоначальной длине стержня и обратно пропорционально площади его поперечного сечения

$$\Delta x = -\frac{1}{E}\cdot\frac{Fx_0}{S} \Rightarrow F = \frac{ES}{x_0}\cdot\Delta x,$$

где *E* - коэффициент, характеризующий упругие свойства вещества, называемый *модулем упругости (модулем Юнга).* Модуль Юнга численно равен силе, растягивающей стержень, имеющий единичную площадь сечения S = 1 в 2 раза: $E = F'$ при $\Delta x = x_0$. Иная запись закона Гука: $\frac{F}{S} = -\frac{k}{S}\cdot\Delta x$.

Но $k = E\cdot\frac{S}{x_0} \Rightarrow \frac{F}{S} = -E\frac{\Delta x}{x_0} \Rightarrow \sigma = -E\tilde{\varepsilon}$

где σ - напряжение деформации, $\tilde{\varepsilon} = \Delta x / x_0$ - относительное удлинение, E - модуль Юнга.

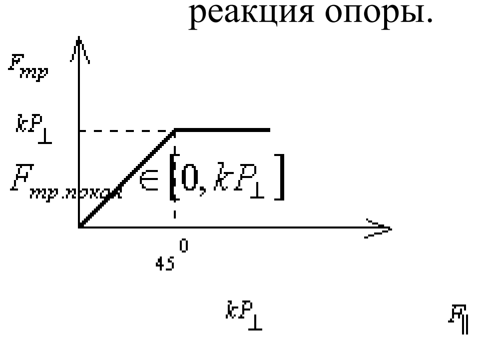
Силы трения

- Трение - один из видов взаимодействия соприкасающихся тел, проявляющий себя в сопротивлении их относительному перемещению.
- Сила трения скольжения - сила, препятствующая вследствие трения относительному перемещению тел и направленная вдоль поверхностей их соприкосновения.

Из опыта определено, что величина силы трения скольжения равна

$$F_{тр.ск.} = kP_{\perp}, \qquad (2.13)$$

где $P_{\perp}$ - сила нормального давления на опору, $P_{\perp} = N$ - нормальная реакция опоры.

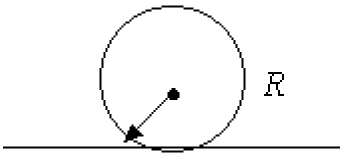


- Сила трения покоя равна внешней силе недостаточной для перемещения тела и равна максимальной силе трения.

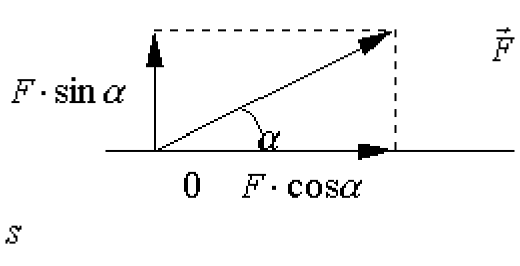
- Сила трения качения прямо пропорциональна силе нормального давления на опору и обратно пропорциональна радиусу катящегося тела

$$F_{тр.кач.} = \mu \frac{P_{\perp}}{R} \qquad (2.14)$$

$F_{тр.кач.} < F_{тр.ск.},\ \mu << k$



3. Работа. Энергия. Закон сохранения энергии

Пусть под действием постоянной силы $\vec{F}$ тело прошло прямолинейный путь S. Перемещение тела обусловлено только касательной к траектории составляющей силы *F*.cos α Нормальная составляющая *не вызывает* перемещения тела.	

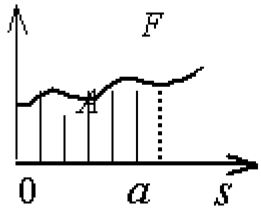
- Механической работой силы *называется величина, равная произведению проекции силы на модуль перемещения*

$$A = Fs \cdot \cos\alpha = \left(\vec{F} \cdot \vec{s}\right), \ [Дж]=[Н·м] \qquad (3.1)$$

При $\alpha < 90^0$ работа положительная, при $\alpha = 90^0$ $A = 0$, при $\alpha > 90^0$ работа отрицательная - сила тормозит тело. Работа нескольких сил равна сумме работ этих сил по перемещению тела.

Если сила *переменная*, то перемещение разбивают на бесконечно малые отрезки $d\vec{s}$, на которых сила постоянна, затем суммируют

$$A = \int_0^a \vec{F} d\vec{s} \qquad (3.2)$$



Эффективность совершения работы характеризуется мощностью.

- Мощность - величина, равная отношению работы к промежутку времени, в течении которого она совершается

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t}, \quad [\text{Вт}]=[\text{Дж/с}] \qquad (3.3)$$

Мгновенная мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{Fds}{dt} = Fv. \qquad (3.4)$$

При движении тела с постоянной скоростью либо под действием постоянной силы его мощность равна :

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{F\Delta s}{\Delta t} = Fv_{ср}. \qquad (3.5)$$

- Коэффициент полезного действия (КПД) равен отношению полезной работы, совершенной машиной, к полной работе $\eta = \frac{A_{полезн}}{A_{полн}}$
- 1 л. с. ≈ 735 Вт . Средняя мощность лошади ≈ 400 Вт , а человека ≈ 100 Вт.
- Энергия - способность системы совершить работу. Виды энергии: механическая, тепловая, электрическая, электромагнитная, химическая, внутренняя (связи) и т.п.
- Механическая энергия: величина, равная максимальной механической работе, которую система может совершить при данных условиях.
- Механическая энергия связанная либо с движением системы, либо с движением е. частей называется кинетической, а энергия, связанная с взаимным расположением частей системы называется потенциальной.

Потенциальная энергия обусловлена существованием полей: гравитационных, электромагнитных, слабых и сильных.

- Изменение энергии системы при переходе из одного состояния в другое равно совершаемой системой работе

$$A = W_0 - W \quad \text{или} \quad \Delta W = -A \qquad (3.6)$$

- Кинетическая энергия тела при его движении под действием силы

$$A = \int \vec{F} d\vec{s} = \int \frac{d(m\vec{v})}{dt} d\vec{s} = m \int_{v_0}^{v} \vec{v} d\vec{v} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \qquad (3.7)$$

измеряется работой:

т.е. $W_k = \dfrac{mv^2}{2}$ при m = const. Половина произведения массы частицы на квадрат ее скорости названа ее ***кинетической энергией.***
Помимо кинетической в механике вводится понятие потенциальной энергии.

Потенциальная энергия может быть введена только для поля консервативных сил. Консервативные (conservativus - охранительный) - такие силы, работа которых не зависит от траектории, а определяются только начальным и конечным положением материальной точки. Силы, не обладающие только что названным свойством, называют **неконсервативными**. Для того чтобы узнать, консервативна сила либо нет, надо вычислить ее работу.

Так как работа консервативных сил не зависит от траектории, а только от начального и конечного положений материальной точки, то эту работу можно записать в виде разности двух чисел: одно – $W_{п1}$ - будет зависеть от начального положения тела, второе – $W_{п2}$ - от конечного положения тела.

$$A = W_{п1} - W_{п2} \qquad (3.8)$$

$W_{п1}$ - потенциальная энергия тела в положении 1;
$W_{п2}$ - в положении 2.

Например, потенциальная энергия в поле силы тяжести определяется работой:

$$A = \int\left(\vec{F}d\vec{s}\right) = mg\int_{h_0}^{h} d\vec{s} = mgh - mgh_0 \qquad (3.9)$$

- Механическая энергия системы равна сумме кинетической и потенциальной энергии

$$W_м = W_k + W_п = const \qquad (3.10)$$

Собственная механическая энергия замкнутой системы частиц, в которой действуют только консервативные силы, сохраняется в процессе движения.

- Полная энергия системы складывается из всех присущих системе видов энергии.

Опыт показывает, что в *изолированной системе выполняется* **закон сохранения полной энергии:**

- *Величина полной энергии изолированной системы остается постоянной, является неуничтожаемой, но может превращаться из одних видов в другие.*
- Изменение энергии неизолированной системы равно *работе*, совершаемой системой / над системой.

$$\Delta W = -A \qquad (3.11)$$

Некоторые конкретные выражения для потенциальной энергии W_n .

Для нахождения конкретного вида зависимости $W_n(r)$ необходимо вычислить работу.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}(\vec{r})d\vec{s}$$

В частности, для однородного поля тяжести, где $\vec{F} = m\vec{g}$, мы уже получили ранее выражение: $W_п = mgh$.

Если $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ - гравитационная сила, то

$$W_п(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \qquad (3.12)$$

Если $F = k\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ - кулоновская сила, то

$$W_п(r) = k\frac{q_1 q_2}{r}. \qquad (3.13)$$

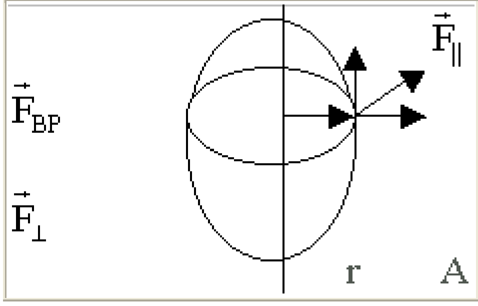
Если $F = -kx$ - сила упругости, то

$$W_п(r) = \frac{kx^2}{2}. \qquad (3.14)$$

4. Динамика вращения абсолютно твердого тела

Основной закон динамики вращения. Момент инерции

Рассмотрим вращение абсолютно твердого тела произвольной формы вокруг оси, проходящей через тело. Разложим действующую силу $\vec{F}$ на три компоненты $\vec{F}_{II}$, $\vec{F}_{\perp}$, $\vec{F}_{вр}$- вдоль оси, перпендикулярную к оси и вращающую. Вращение тела вызывает компонента $\vec{F}_{вр}$, касательная к окружности, описываемой точкой А.



Все точки тела описывают окружность и имеют одинаковую угловую скорость и одинаковое угловое ускорение. Вращающее действие силы $\vec{F}_{вр}$, зависит от ее величины и от расстояния от точки приложения до оси вращения r.

Моментом вращающей силы называется векторное произведение радиуса-вектора, лежащего в плоскости окружности, описываемой точкой приложения вращающей силы на силу:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (4.1)$$

Хотя сила $\vec{F}$ приложена к точке А, ее вращающее действие передается всем частицам тела, т.е. к каждой элементарной массе будет приложена элементарная вращающая сила. По II закону Ньютона

$$\Delta F_i = \Delta m_i a_{ki}$$

Умножая обе части этого равенства на r_i и учитывая, что $a_{ki} = r_i \varepsilon$, получаем:

$$\Delta F_i r_i = \Delta m_i r_i^2 \varepsilon$$

Или $\Delta M_i = \Delta J_i \varepsilon$, где $\Delta J_i = \Delta m_i r_i^2$ - *момент инерции* элементарной массы (материальной точки), его размерность [кг . м^2].

Моментом инерции *материальной точки относительно оси вращения называется произведение массы материальной точки на квадрат ее расстояния до этой оси.*

Моментом инерции тела *называется сумма моментов инерции всех материальных точек тела* $\sum \Delta I_i = I$

$$\sum_i \Delta M_i = \varepsilon \sum_i \Delta I_i, \; M = I\varepsilon \qquad (4.2)$$

Основной закон динамики вращения (аналог *II-го закона Ньютона):*

Момент вращающей силы, приложенной к телу, равен произведению момента инерции тела на угловое ускорение.

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon} \qquad (4.3)$$

Момент инерции тела характеризует инерционные свойства тела при вращательном движении подобно массе, характеризующей инерционные свойства тела при поступательном движении. Момент инерции тела имеет множество значений, в зависимости от оси вращения.

Если вращающий момент M = const постоянен и момент инерции I = const, то основной закон вращения можно представить в виде

$$\vec{M} = I\frac{\vec{\omega} - \vec{\omega}_0}{\Delta t};$$

$$\vec{M}\Delta t = I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0, \qquad (4.4)$$

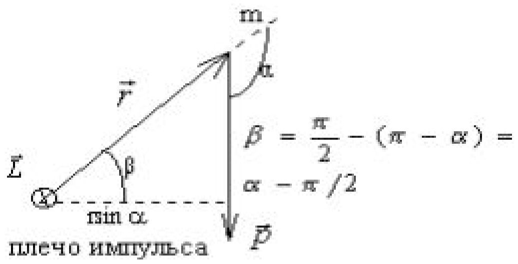
M Δt - импульс момента силы, Iω-момент импульса тела .

Закон изменения момента импульса:

Изменение момента импульса тела за промежуток времени равно импульсу момента силы.

Момент импульса тела $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m[\vec{r} \times \vec{v}] \qquad (4.5)$$



Изменение импульса во времени равно

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}\right) + \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}\right) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

т.к. $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ - момент силы.

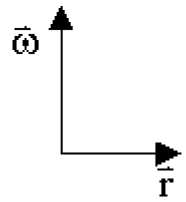
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (4.6)$$

Учтем, что $\vec{v}_\tau = \vec{\omega} \times \vec{r}$, т.е. для материальной точки

$$\vec{L}_i = m_i(\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)) = m_i\left\lfloor \vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right\rfloor = m_i r_i^2 \vec{\omega} = I_i \vec{\omega}.$$

Для тела $I = \sum m_i r_i^2$, т.е.

$$\vec{L} = I\vec{\omega} \qquad (4.7)$$



- момент импульса тела.

$$\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M} \qquad (4.8)$$

- основное уравнение динамики вращательного движения.

Закон сохранения момента импульса. Кинетическая энергия вращающегося тела

Сравним попарно между собой законы механики поступательного и вращательного движения:

II Закон Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

Закон изменения импульса:

$$\vec{F}t = m\vec{v} - m\vec{v}_0 \Leftrightarrow \vec{M}t = I\vec{\omega} - I\vec{\omega}_0$$

видим, что имеется аналогия:

$$s \leftrightarrow \varphi, v \leftrightarrow \omega, a \leftrightarrow \varepsilon, F \leftrightarrow M, m \leftrightarrow I, Ft \leftrightarrow Mt, mv \leftrightarrow I\omega$$

Аналогично закону сохранения импульса имеется закон *сохранения момента импульса.* В изолированной системе сумма моментов импульса всех тел есть величина постоянная:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \ldots + I_n\omega_n = const \qquad (4.9)$$

где I_i и ω_i моменты инерции и угловые скорости тел, составляющих изолированную систему. Из основного уравнения динамики вращательного движения при М=0 получаем

$$\frac{d}{dt}(I\vec{\omega}) = 0 \Rightarrow I\vec{\omega} = const$$

В изолированной системе сумма моментов импульса всех тел есть величина постоянная. Можно привести следующие примеры, когда проявляется действие закона сохранения момента импульса:

- Скамья Жуковского, пируэт, сальто: момент инерции человека уменьшается, а угловая скорость увеличивается, и наоборот, т.к. $I\omega$ = const .
- Гироскоп: сохраняется вектор момента импульса $I\vec{\omega}$, и, таким образом, сохраняется ось вращения. Например, это ось вращения Земли, снаряда, колес велосипеда и т.п.

Кинетическая энергия одной частицы вращающего тела равна

$$\Delta W_{ik} = \frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (r_i \omega)^2}{2} = \frac{\Delta I_i \omega^2}{2}$$

Суммируя энергию частиц, получаем выражение для *кинетической энергии вращающегося тела*

$$W_{к.вр.} = \frac{I\omega^2}{2} \qquad (4.10)$$

Если тело одновременно участвует в поступательном и вращательном движении, то его кинетическая энергия равна сумме $W_{к.пост.}$ и $W_{к.вр.}$

$$W_к = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \qquad (4.11)$$

Момент инерции тела равен:

$$I = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV, \qquad (4.12)$$

где ρ - плотность тела.

1. Тонкий однородный стержень длиной L (ось вращения на конце стержня): $m_l = m / L$ – масса на единицу длины, $$I = \int_0^L r^2 m_l dr = \frac{1}{3} m_l L^3 = \frac{1}{3} mL^2 \qquad (4.13)$$
2. Тонкий однородный стержень длиной L (ось в центре): $$I = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 m_l dr = \frac{1}{12} mL^2 \qquad (4.14)$$
3. Обруч (ось в центре):

$$m_l = m / L = m / 2\pi R, I = \int_0^{2\pi} R^2 m_l R d\varphi = mR^2. \qquad (4.15)$$

4. Пластина (ось в центре): $m_2 = m / ab$, a, b – стороны.

$$I = \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy m_2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \qquad (4.16)$$

5. Кольцо (ось в центре): $m_2 = m / \pi(R^2 - R_0^2)$ – масса на единицу площади, R –внешний радиус, R_0- внутренний радиус:

$$I = \int_{R_0}^{R} r^2 m_2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} m(R^2 - R_0^2). \qquad (4.17)$$

6. Диск (ось в центре): $m_2 = m / \pi R^2$

$$I = \int_0^R r^2 m_2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{mR^4 2\pi}{4\pi R^2} = \frac{1}{2} mR^2 \qquad (4.18)$$

7. Шар (ось в центре): $m_3 = \dfrac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3}$,

$$I = m_3 \int\limits_V dxdydz(x^2 + y^2) = m_3 \int\limits_V dxdydz(x^2 + z^2) =$$
$$= m_3 \int\limits_V dxdydz(y^2 + z^2)$$

сложив эти интегралы, получаем: $3I = 2m_3 \int\limits_V dxdydz(x^2 + y^2 + z^2)$, в сферической системе координат

$$I = \frac{2}{3}\int\limits_0^R r^2 m_3 r^2 dr \int\limits_\pi^0 \sin\vartheta d\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (4.19)$$

Центр масс системы материальных точек.

Центр масс (центр инерции) - точка пересечения прямых, вдоль которых должны быть направлены силы, вызывающие только поступательное движение тела.
В однородном гравитационном поле центр масс совпадает с центром тяжести.
Радиус-вектор центра масс системы материальных точек определяется как отношение к массе всей системы суммы произведений масс всех материальных точек системы на их радиус-векторы.

$$\vec{R} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}, \qquad (4.20)$$

По определению координаты центра масс имеют значения:

$$x = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i},\ y = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i},\ z = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Если радиус-векторы точек системы проведены из центра масс системы, то в этом случае $\vec{R} = 0$ и поэтому $\sum m_i \vec{r}_i = 0$. Таким образом центр масс- это геометрическая точка, для которой сумма произведений масс всех материальных точек, образующих систему, на их радиус-векторы, проведенные из этой точки, равна нулю.
Если масса в системе распределена непрерывно, то радиус-вектор центра масс системы определяется как

$$\vec{R} = \frac{\int\limits_m \vec{r} dm}{m}, \qquad (4.21)$$

где $\vec{r}$ -радиус вектор малого элемента системы, масса которого равна dm, m- масса всей системы, а интегрирование производится по всем элементам системы, т.е. по всей ее массе.
Скорость центра масс системы равна отношению импульса этой системы к ее массе:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i} = \frac{p}{m},$$

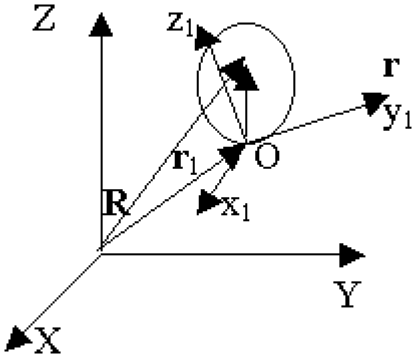
где $m = \sum m_i$, $\vec{p} = m\vec{V}$.

Так как для системы материальных точек $d\vec{p} = \vec{F}^{внеш}dt$, то уравнение движения для центра масс принимает вид:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{F}^{внеш} \qquad (4.22)$$

Центр масс системы материальных точек под действием внешних сил движется так же, как материальная точка суммарной массы. Для замкнутой системы скорость центра масс не изменяется со временем.

Рассмотрим движение твердого тела относительно неподвижной системы координат XYZ, а с телом свяжем подвижную систему $x_1y_1z_1$.



Бесконечно малое смещение точки тела складывается из перемещения dR совместно с центром масс тела O и перемещения $r \cdot d\varphi$ при повороте на бесконечно малый угол $d\varphi$: $d\vec{r}_1 = d\vec{R} + d\vec{\varphi} \times \vec{r}$. Разделим это равенство на время dt, получаем

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

где $\vec{v} = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$, $\vec{V} = \frac{d\vec{R}}{dt}$, $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$. Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий точек тела:

$$W_к = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2}(\vec{V} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 =$$

$$= \sum \frac{m_i V^2}{2} + \sum m_i \vec{V}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) + \sum \frac{m_i}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2$$

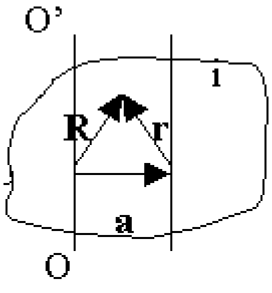
Но $\sum m_i \vec{V}(\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \times \vec{V}) = (\vec{\omega} \times \vec{V}) \sum m_i \vec{r}_i = 0$, т.к. для центра масс $\sum m_i \vec{r}_i = 0$, а $(\vec{\omega} \times \vec{r})^2 = \omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2$. Тогда кинетическая энергия твердого тела равна:

$$W_к = \frac{MV^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m_i [\omega^2 r^2 - (\vec{\omega}\vec{r})^2], \qquad (4.23)$$

Что представляет из себя сумму кинетической энергии поступательного движения материальной точки с координатами центра масс и кинетической энергии вращательного движения тела.

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Момент инерции тела относительно произвольной оси равен сумме моментов инерции относительно параллельной оси OO', проходящей через центр масс тела, и относительно данной оси.



$$I = I_0 + ma^2$$

Пусть $\vec{a}$ - вектор, нормальный к обеим осям, $\vec{R}_i, \vec{r}_i$ - векторы, проведенные из начала и конца $\vec{a}$ к произвольной точке массой m_i, т.е $\vec{r}_i = -\vec{a} + \vec{R}_i$. По определению моментов инерции $I_0 = \sum m_i R_i^2, I = \sum m_i r_i^2$. Учитывая, что $r_i^2 = R_i^2 + a^2 - 2\vec{a}\vec{R}_i$, получаем $I = \sum m_i R_i^2 + a^2 \sum m_i - 2\vec{a} \sum m_i \vec{R}_i$. По определению для оси, проходящей через центр масс, выполняется условие $\sum m_i \vec{R}_i = 0$, а $m = \sum m_i$. Тогда получаем, что

$$I = I_0 + ma^2. \qquad (4.24)$$

Условия равновесия тела:

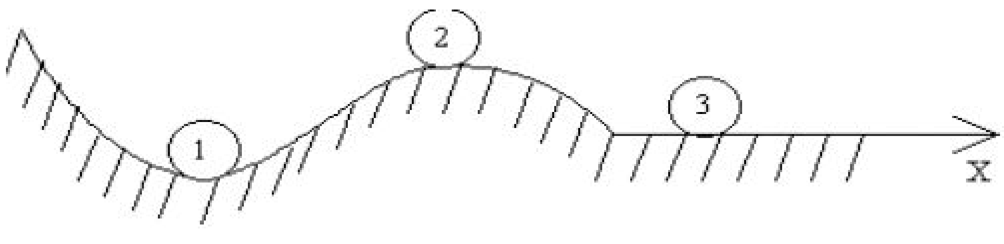
если к телу приложены силы, линии действия которых не пересекаются в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы их равнодействующая была равна нулю и суммы моментов сил были равны нулю.

$$\vec{R} = 0, \ \vec{M} = 0. \qquad (4.25)$$

Виды равновесия:

1. Устойчивое - тело, выведенное из состояния равновесия в соседнее ближайшее положение и затем представленное самому себе, вернется в исходное положение.
2. Неустойчивое - тело, выведенное из состояния равновесия, продолжает отклоняться от этого положения.
3. Безразличное - тело, выведенное из состояния равновесия, остается в новом положении.

$$\frac{dW_п}{dx} = 0 \qquad (4.26)$$



$$(1) \to \frac{d^2W_п}{dx^2} > 0; \ (2) \to \frac{d^2W_п}{dx^2} < 0; \ (3) \to \frac{d^2W_п}{dx^2} = 0;$$

Потенциальная энергия тела в поле силы тяжести определяется положением его центра тяжести.

5. Закон всемирного тяготения. Неинерциальные системы отсчета

Сила тяготения. Вес тела

Изучая движение планет и падение тел в земных условиях на основании опытных данных Кеплера и Галилея, Ньютон установил **закон всемирного тяготения:**

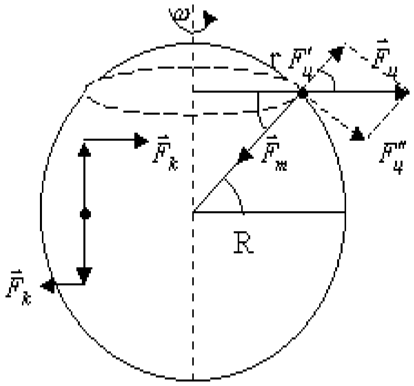
- *Две материальные точки притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними*

$$F = G\frac{m_1m_2}{r^2} \qquad (5.1)$$

где $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{Н \cdot м^2}{кг^2}\right]$- *гравитационная постоянная*, впервые измеренная Кавендишем в 1798 г. на крутильных весах. Тяготение (*гравитационное взаимодействие*) между телами осуществляется через гравитационное поле, порождаемое телами. Если на тело действует только гравитационное поле, оно *совершает свободное падение*: движение тела в вакууме под действием силы тяжести. Земля и тело притягивают друг друга, двигаясь навстречу. При этом перемещение Земли бесконечно малое, т.к. ее масса много больше массы тела.

- *Сила притяжения между некоторым телом и Землей равна:*

$F = G\dfrac{Mm}{(R+h)^2}$ - *сила тяготения*



где M - масса Земли, m - масса тела, R - радиус Земли, h - высота тела над поверхностью Земли.

По II закону Ньютона под действием силы тело движется с ускорением, т.е. $F = mg$ Приравниваем выражения для силы тяжести и силы притяжения

$$mg = G\frac{Mm}{(R+h)^2}$$

получаем выражение для ускорения свободного падения

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} \qquad (5.2)$$

Вблизи поверхности Земли $h \ll R$, $g = G\frac{M}{R^2} = const$.

$g = 9{,}83$ *м/с*^{2} на полюсе, $g = 9{,}80$ *м/с*^{2} на широте 45^0, $g = 9{,}78$ *м/с*^{2} на экваторе, т.к.

1. радиус Земли изменяется
2. изменяется центробежная сила.

Весом тела называется сила, с которой тело действует на горизонтальную опору либо вертикальную подвеску в вакууме вследствие притяжения к Земле.

Во всех инерциальных системах отсчета вес тела одинаков и равен силе тяжести.

Земля вращается, т.е. не является инерциальной системой отсчета. На тело массой m, лежащее на поверхности Земли, действует сила тяготения $F_т$, направленная к центру Земли, и сила центробежная $F_ц$, направленная по линии r - радиуса сегмента.

Составляющая $F_ц''$ уравновешивается силой трения о земную поверхность, а составляющая $F_ц'$ противодействует силе тяготения $F_т$. Вес тела равен разности $F_т$ и $F_ц'$.

$$P = F_т - F'_ц = F_т - F_ц \cos\varphi \qquad (5.3)$$

где φ - географическая широта места.

Но $a_ц = \omega^2 r,$ где $\omega = 7{,}3 \cdot 10^{-5} c^{-1}$ - угловая скорость суточного вращения Земли.

Учтем, что r = R cos φ , тогда *вес тела* выражается формулой:

$$P = G\frac{mM}{R^2} - m\omega^2 R\cos\varphi \qquad (5.4)$$

и зависит от широты места.

Ускорение силы тяжести

$$g = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R\cos\varphi \qquad (5.5)$$

на полюсе $\varphi = 90^0$ максимально: $g = G\frac{M}{R^2}$, на экваторе $\varphi = 0^0$ минимально $g = G\frac{M}{R^2} - \omega^2 R$.

Работа сил гравитационного поля.

$$A = \int_{-\infty}^{R} F_т dr = GMm\int_{-\infty}^{R}\frac{dr}{r^2} = GMm\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty}\right) = -G\frac{Mm}{r} \qquad (5.6)$$

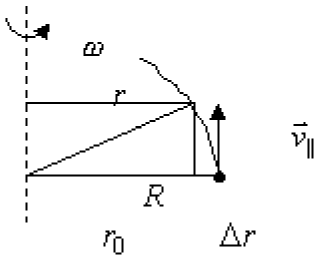
$$A = -\Delta W_п = m(\varphi_1 - \varphi_2)$$

где $\varphi = \frac{A}{m}$ -потенциал гравитационного поля.

Сила Кориолиса

На тело, *перемещающаяся* по поверхности Земли, действует сила *инерции*, направленная перпендикулярно меридиану. Тело, перемещаясь с широты φ_1 на широту φ_2 ($\varphi_2 > \varphi_1$) сохраняет по инерции скорость своего линейного перемещения (v_1) т.е. на широте φ_2 только будет иметь большую угловую скорость, чем Земля. $(\omega_1 = {}^{v_1}\!/_{r_1} > \omega_2 = {}^{v_2}\!/_{r_2}, r_2 < r_1)$.

Тело приобретает большую скорость под действием *силы Кориолиса*



$\vec{F}_k$, направленной вправо перпендикулярно меридиану: $\vec{F}_k = m\vec{a}_k$.
Изменение линейной скорости тела, связанное с кориолисовым ускорением, обусловлено изменением радиуса сегмента : если $v_т$ = const , то скорость тела относительно неподвижной системы отсчета $\vec{v} = \vec{v}_т + (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Ускорение тела в результате вращения Земли:

$$a_ц = \frac{v^2}{r} = \frac{1}{r}(\vec{v}_т + (\vec{\omega} \times \vec{r}))^2 = \frac{v_т^2}{r} + \frac{2}{r}\vec{v}_т(\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{1}{r}(\vec{\omega} \times \vec{r})^2$$

Здесь $\frac{v_т^2}{r} = a'_ц$ - центростремительное ускорение относительно вращающейся системы отсчета, $2[\vec{\omega} \times v_т]$- кориолисово ускорение, $[\vec{\omega} \times \vec{n}]^2 r$ - центробежное ускорение, $\vec{n} = {}^{\vec{r}}\!/_{r}$.

Сила Кориолиса: $\vec{F}_k = -2(\vec{\omega} \times \vec{v}_т) \cdot m = 2m(\vec{v}_т \times \vec{\omega})$. (5.7)

Неинерциальные системы отсчета.

Рассмотрим подробнее движение в произвольной неинерциальной системе отсчета.

Рассмотрим систему, движущуюся произвольно относительно неподвижной системы. Движение такой системы можно разложить на поступательное со скоростью $\vec{v}_0$, равной скорости движения начала координат и вращательное с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг мгновенной оси, проходящей через начало координат. Орты прямоугольной подвижной системы координат $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ вращаются с угловой скоростью $\vec{\omega}$, т.е.

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i},\quad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j},\quad \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}.$$

Если радиус-вектор тела в подвижной системе координат $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, то скорость тела равна

$$\dot{\vec{r}} = (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}) + \left(x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} \right) =$$

$$= v_{отн} + x(\vec{\omega}\times\vec{i}) + y(\vec{\omega}\times\vec{j}) + z(\vec{\omega}\times\vec{k}) = v_{отн} + (\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Абсолютная скорость движения тела равна сумме относительной и переносной скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}$$

где $v_{пер} = v_0 + (\vec{\omega}\times\vec{r})$. Найдем абсолютное ускорение тела, продифференцировав абсолютную скорость по времени

$$\dot{\vec{v}} = \dot{\vec{v}}_{отн} + \dot{\vec{v}}_0 + (\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}) + (\vec{\omega}\times\dot{\vec{r}})$$

Где $\dot{\vec{v}}_{отн} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + (\vec{\omega}\times\vec{v}_{отн}) = \vec{a}_{отн} + (\vec{\omega}\times\vec{v}_{отн})$. Окончательно получаем выражение для абсолютного ускорения тела, подставляя $\dot{\vec{r}}$:

$$\dot{\vec{v}} = \vec{a}_{отн} + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}_{отн}) + \dot{\vec{v}}_0 + (\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) \qquad (5.8)$$

- абсолютное ускорение тела является суммой *относительного, кориолисова и переносного ускорений* (три последних слагаемых)

- Величина силы Кориолиса пропорциональна скорости движения тела и его массе и угловой скорости вращения Земли. Если движение тела ограничено боковой связью, то тело давит на эту связь с силой, равной $-\vec{F}_k$. Реки северного полушария подмывают правые берега, а воздушные течения приобретают правое вращение (по часовой стрелке).

6. Ограниченность классической механики. Специальная теория относительности

Ограниченность классической механики

Классическая механика (механика Галилея - Ньютона) описывает движения макроскопических тел со скоростями $v \ll c$ (где c = 2,99793.10^8 м/с - скорость света) с очень высокой степенью точности. Однако для микроскопических объектов (элементарных частиц) проявляются волновые свойства при механическом движении: дифракция, интерференция и т.п. В классической механике всегда можно одновременно и точно определить координату и скорость (импульс) или энергию и время, следовательно, найти траекторию.

В квантовой механике одновременное определение координаты и импульса частицы возможно лишь с ограниченной точностью не превышающей величины $\hbar = \dfrac{h}{2\pi} = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ [Дж·с]- *постоянной Планка*, деленной на 2π:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \hbar$$

Это - *соотношение неопределенностей* (принцип Гейзенберга, 1927 г.) из которого следует, что чем точнее измеряется импульс частицы, тем меньше точность одновременного определения координаты (и наоборот) - траектория частицы "размазывается". Принципиальная невозможность одновременно точно определить координаты и импульс частицы отражает корпускулярно-волновую природу элементарных частиц.

Как было сказано выше, классическая механика хорошо описывает медленное движение макроскопических тел. Если же скорости тел сравнимы со скоростью света в вакууме необходимо пользоваться релятивистской механикой или теорией относительности.

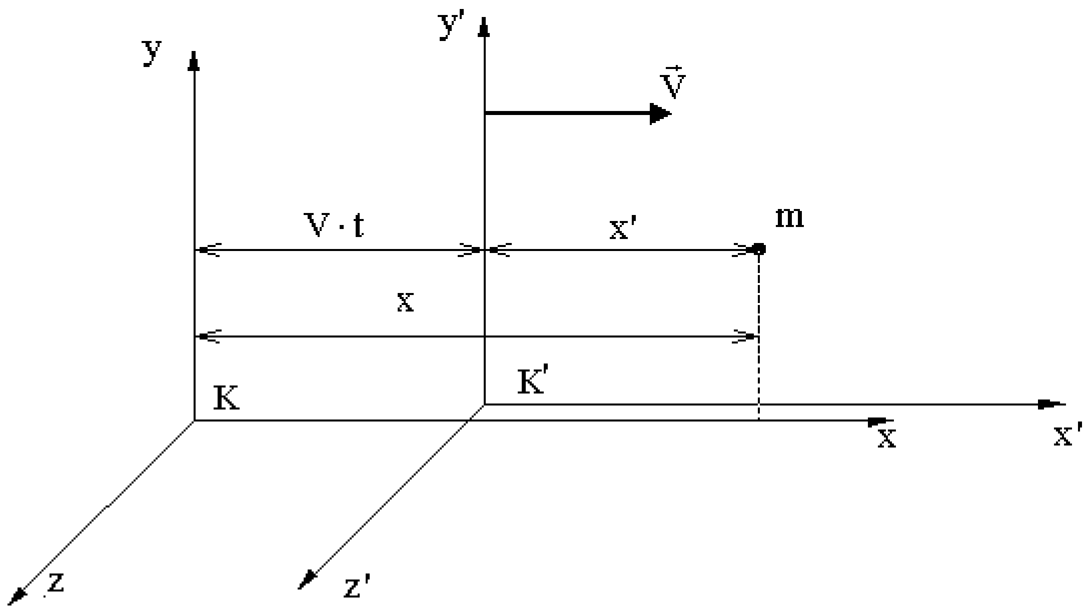
Элементы специальной теории относительности

Преобразования Галилея - это уравнения, связывающие координаты и время некоторого события в двух инерциальных системах отсчета. Событие определяется местом, где оно произошло (координаты x, y, z), и моментом времени t, когда произошло событие. Событие полностью определено, если заданы четыре числа: x,y,z,t - координаты события.

Пусть материальная точка **m** в системе отсчета ***K*** в момент времени ***t*** имела координаты ***x, y, z,*** т.е. в системе ***K*** заданы координаты события - ***t, x, y, z***.

Найдем координаты ***t', x', y', z'*** этого события в системе отсчета ***K'***, которая движется относительно системы ***K*** равномерно и прямолинейно вдоль оси x со скоростью $\vec{V}$.

Выберем начало отсчета времени так, чтобы в момент времени t = 0 начала координат совпадали. Оси x и x' направлены вдоль одной прямой, а оси y и y', z и z' - параллельны.



Тогда из рисунка очевидно:

$$x = x' + Vt\,.$$

Кроме того, ясно, что для наших систем координат

$$y = y',$$
$$z = z'.$$

В механике Ньютона предполагается, что

$$t = t',$$

т.е. время течет одинаково во всех системах отсчета. Полученные четыре формулы и есть преобразования Галилея:

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \qquad (6.1)$$

Принцип относительности Галилея:

Никакими механическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета или движется равномерно и прямолинейно. Это утверждение согласуется с преобразованиями Галилея. Продифференцируем их 2 раза по времени. После первого дифференцирования получим закон сложения скоростей:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{x}' + V, \\ \dot{y} &= \dot{y}', \\ \dot{z} &= \dot{z}', \end{aligned} \qquad \text{т.е.:} \qquad \begin{aligned} v_x &= v'_x + V, \\ v_y &= v'_y, \\ v_z &= v'_z, \end{aligned}$$

Второе дифференцирование дает

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}', \\ \ddot{y} &= \ddot{y}', \\ \ddot{z} &= \ddot{z}', \end{aligned} \qquad \text{т.е.:} \qquad \begin{aligned} a_x &= a'_x, \\ a_y &= a'_y, \\ a_z &= a'_z. \end{aligned}$$

Ускорение материальной точки одинаково в обеих системах отсчета. Кроме того, силы, действующие на частицу, одинаковы, не изменяется и величина **m** (по определению, это масса покоя).

Значит, в системе К второй закон Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

такой же, как и в системе К'

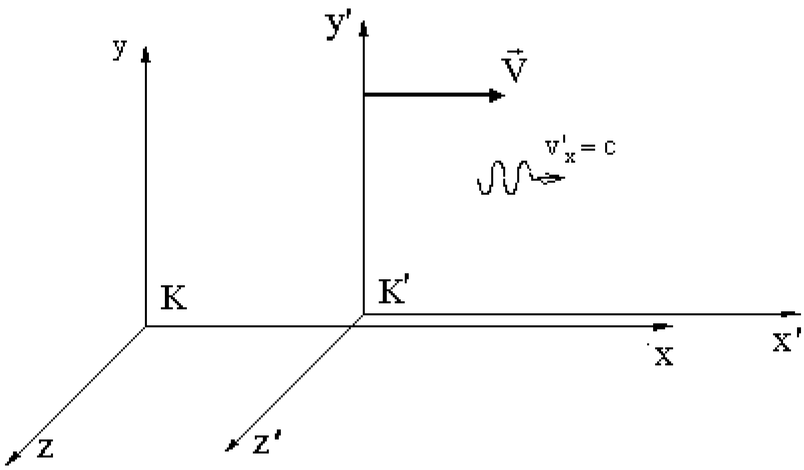
$$\vec{F} = m\vec{a},$$

т.к. a = a' - следствие преобразований Галилея.
Иными словами, на теоретическом уровне, принцип относительности Галилея можно сформулировать так:

Законы механики одинаково выглядят во всех инерциальных системах отсчета.

Неудовлетворительность механики Ньютона при больших скоростях

Рассмотрим с точки зрения преобразований Галилея движение света.



В системе К' его скорость v'_x= с. Тогда, используя полученный закон сложения скоростей для скорости света в системе К мы найдем:

$$v_x = v'_x + V = c + V$$

Опубликованные в 1881 г. результаты опытов, выполненных американским физиком А. Майкельсоном, находятся в противоречии с только что полученной нами формулой: галилеевский закон сложения скоростей не годится для света. Скорость света оказалась одинаковой в разных системах отсчета!

В 1895 г. французский математик, физик и философ А. Пуанкаре впервые выступил с новаторским предложением о невозможности никакими физическими опытами (не только механическими, как в принципе относительности Галилея) зарегистрировать абсолютное движение. В 1902 г. он же публикует в книге "Наука и гипотеза" утверждение об отсутствии абсолютного времени, т.е. $t \neq t'$.

Законченная теория, позволяющая описывать движение частиц со скоростями $v \to c$, была опубликована в 1905 г. в работах А. Пуанкаре и А. Эйнштейна.

Постулаты специальной теории относительности (СТО). Механика больших скоростей, специальная теория относительности, базируется на двух исходных утверждениях, постулатах:

I. **Принцип относительности**, согласно которому

   никакими физическими опытами нельзя установить, покоится ли данная система отсчета, либо движется равномерно и прямолинейно.

   Другая формулировка:

   Все законы природы одинаково формулируются для всех инерциальных систем отсчета .

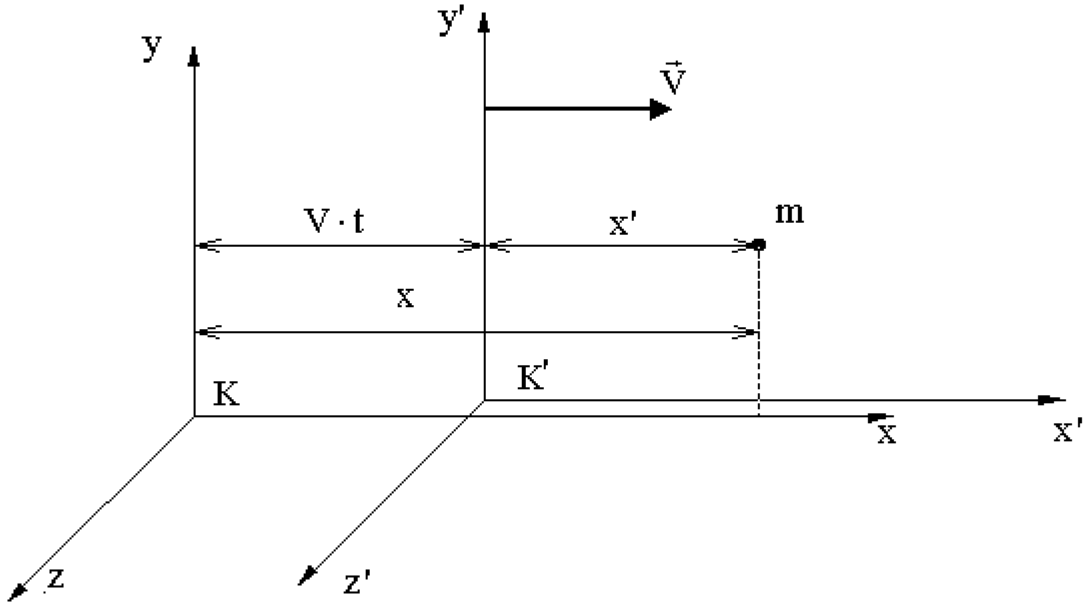
II. **Принцип постоянства скорости света:**

   скорость света в вакууме во всех инерциальных системах отсчета одинакова и не зависит ни от движения источника, ни от движения приемника света .

Преобразования Лоренца - это уравнения, связывающие координаты и время некоторого ***события*** в двух инерциальных системах отсчета. В отличие от преобразований Галилея преобразования Лоренца не должны противоречить постулатам С.Т.О.: необнаружимости абсолютного движения и постоянству скорости света. При скорости движения системы отсчета $V \ll c$ преобразования Лоренца должны переходить в преобразования Галилея.

Вывод преобразований Лоренца

Для вывода преобразований Лоренца рассмотрим в двух системах отсчета мысленный опыт. Одна система K - неподвижна, другая K' движется вдоль оси x со скоростью V. Пусть в момент времени $t = t' = 0$, когда начала систем координат совпадали, в этом начале произошла вспышка света и стала распространяться сферическая световая волна. В соответствии с постулатом I фронт этой волны будет сферой в обеих системах отсчета, сфера эта будет, в соответствии с постулатом II, увеличивать свой радиус со скоростью света и в той, и в другой системе отсчета.



Опираясь на эти требования, найдем вид правильных преобразований координат и времени. В качестве пробного возьмем преобразование Галилея, а затем его подправим.
Фронт световой волны в системе К - это сфера радиуса ct:

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2:$$

В системе К' уравнение фронта этой волны, в соответствии с постулатами I и II

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=c^2\ (t')^2,$$

прриминим преобразования Галилея, переходим в К:

$(x')^2 = (x - Vt)^2,$

$(y')^2 = y^2,$

$(z')^2 = z^2,$

$(t')^2 = t^2,$

отсюда следует:

$$x^2 - \underline{2Vxt} + \underline{V^2t}^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2,$$

сравните с

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2 = c^2(t')^2.$$

Появились лишние члены, надо так изменить преобразования, чтобы они исчезли.
Пробуем преобразования:

$$x' = x - Vt,\ y'=y,\ z'=z,\ t'=t-\alpha x$$

$$\Downarrow$$

$$x^2 - \underline{2Vxt} + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 - \underline{2c^2}\,\underline{\alpha xt} + c^2\alpha^2x^2$$

приравниваем подчеркнутые члены,
получаем:

$$\alpha = \frac{V}{c^2}$$

При таком α остается:

$$x^2 + V^2t^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 + \frac{V^2}{c^2}x^2$$

Перегруппируем члены:

$$x^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2t^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$$

Подправим преобразование так, чтобы исчезли выражения в скобках, для этого возьмем

$$\begin{aligned} x' &= \frac{(x - Vt)}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= (t - \frac{V}{c^2}x)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Такие преобразования сохраняют вид уравнения фронта световой волны, сфера преобразуется в сферу, в соответствии с постулатами С.Т.О.
Обозначим, для удобства записи,

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \tag{6.3}$$

тогда ***преобразования Лоренца*** запишутся так:

а) прямые

$$x = \gamma(x' + Vt');$$
$$y = y';$$
$$z = z';$$
$$t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right);$$

б) обратные

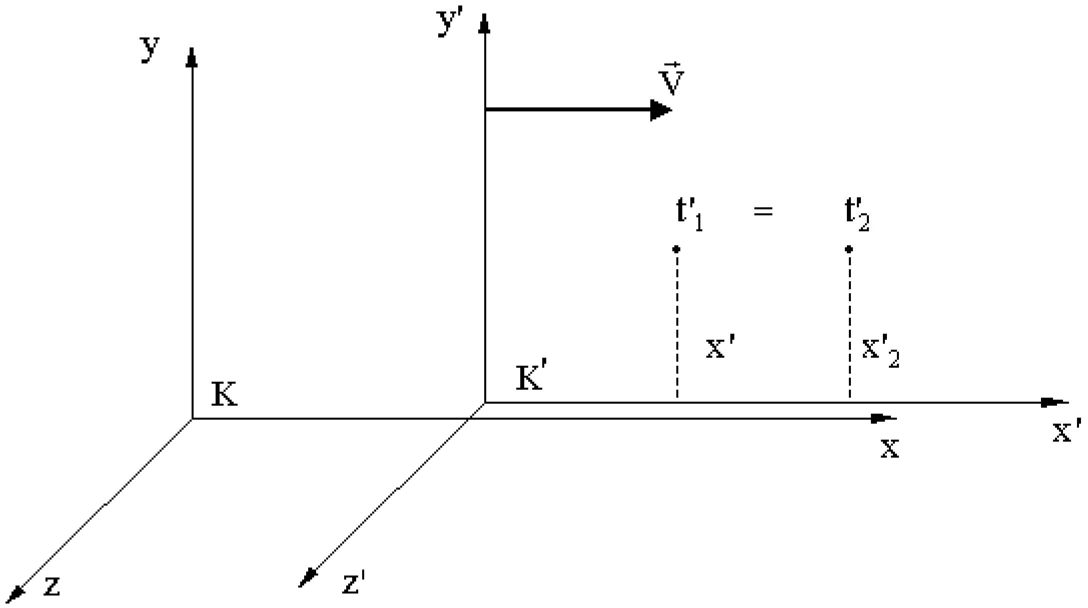
$$x' = \gamma(x - Vt);$$
$$y' = y;$$
$$z' = z;$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right).$$

Релятивистская механика должна быть построена таким образом, чтобы уравнения движения не менялись при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую, т.е. были инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Следствия из преобразований Лоренца

1. Одновременность событий в разных системах отсчета

В системе K' ***одновременно*** (в момент времени t'), ***но в разных местах*** (x'_1 и, x'_2) произошли два события.



Время первого события в системе К:

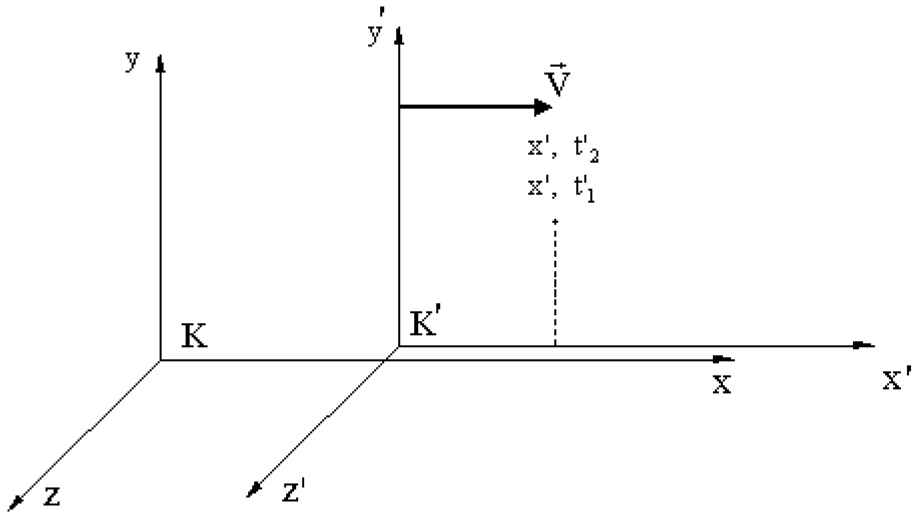
$$t_1 = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2} x_1' \right),$$

второго

$$t_2 = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2} x_2' \right).$$

Видно, что $t_2 > t_1$, т. к. $x'_2 > x'_1$. ***В системе К события не одновременны.***

2. Промежуток времени между двумя событиями



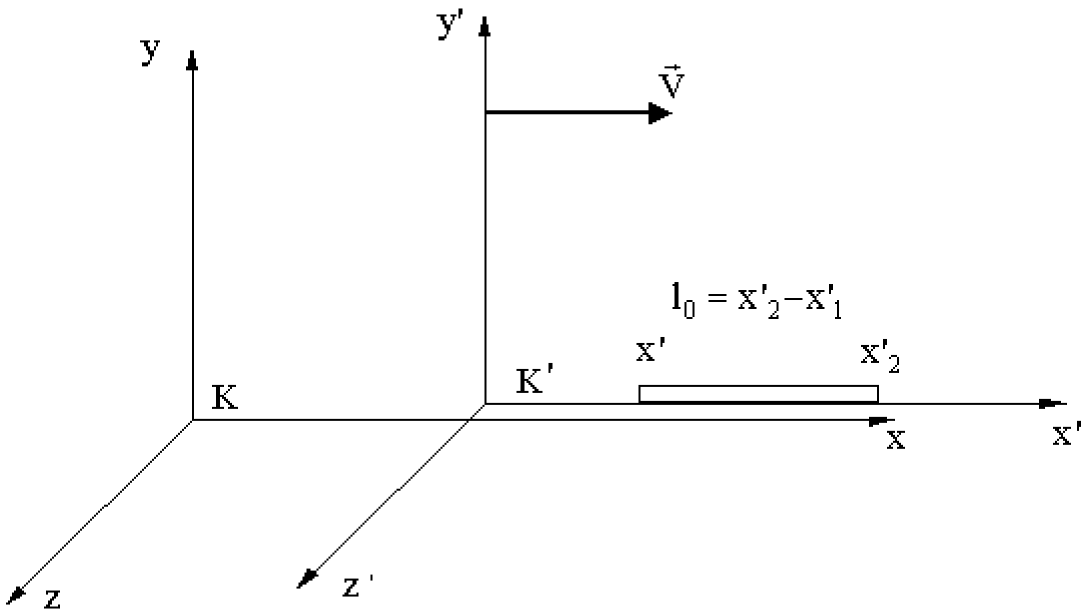
Пусть в системе К' в одной и той же точке с координатой x' происходят в моменты времени t'_1 и t'_2 два события (например, две вспышки света). В этой системе промежуток времени между событиями: $\Delta t' = t_2' - t_1'$.
В системе К:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\left(t_2' + \frac{V}{c^2} x' \right) - \gamma\left(t_1' + \frac{V}{c^2} x' \right) = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma \Delta t'$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'. \qquad (6.4)$$

Т.к. γ ***всегда больше единицы, то*** $\Delta t > \Delta t'$.

3. Длина тела в разных системах отсчета



Пусть стержень длины l_0 лежит вдоль оси x' в системе К'. Как измерить его длину в системе К, относительно которой он движется?

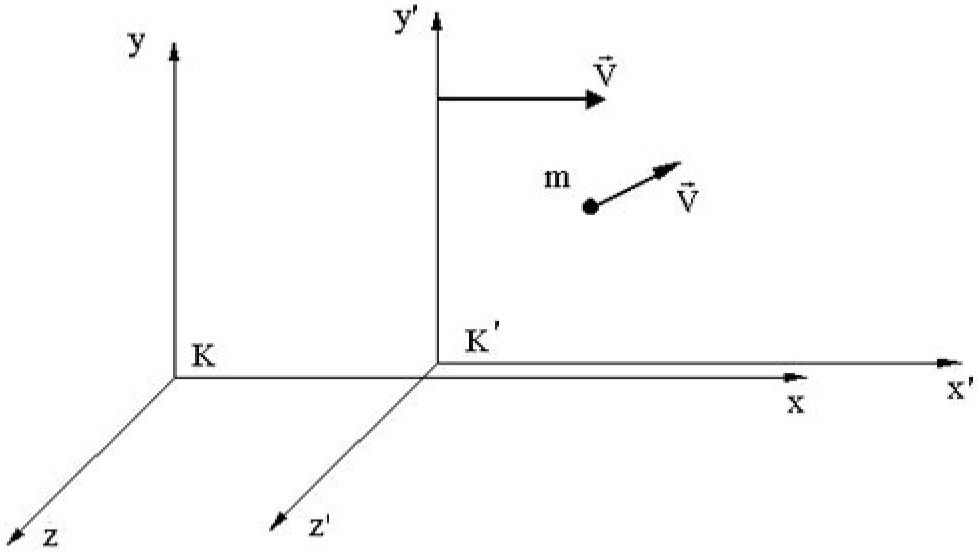
Мы, в системе К, должны в один и тот же момент времени t (по часам системы К) измерить координаты начала и конца стержня. Их разница и будет длиной движущегося стержня. Тогда:

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - Vt) - \gamma(x_1 - Vt) = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l, \qquad (6.5)$$

$$l = \frac{l_0}{\gamma} < l_0.$$

4. Преобразование скоростей

Пусть материальная точка движется в системе К со скоростью $\vec{v}$.
Система К' движется со скоростью $\vec{V}$ относительно К.



Компоненты скорости материальной точки:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma(dx' + Vdt')}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)},$$

$$v_x = \frac{dy}{dt} = \frac{\gamma dy'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)},$$

$$v_x = \frac{dz}{dt} = \frac{\gamma dz'}{\gamma\left(dt' + \frac{V}{c^2}dx'\right)}.$$

Т.к.

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad v'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'};$$

;

То

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}. \qquad (6.6)$$

Это формулы релятивистского преобразования скоростей, они дают связь между компонентами скорости частицы в различных системах отсчета: в системе K и в движущейся со скоростью V системе K'. Легко убедиться в том, что если скорости V и v малы по сравнению со скоростью света, то эти формулы переходят в закон сложения скоростей в классической механике.

Релятивистский закон сложения скоростей согласуется с постулатом о постоянстве скорости света. Покажем это:

Пусть свет распространяется вдоль оси X. Тогда $v'_x = c$ и для v_x получаем

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{V}{c^2} c} = c.$$

Этого и следовало ожидать, так как постулат постоянства скорости света использовался при получении преобразований Лоренца.

Релятивистская динамика

Релятивистский импульс

В классической механике $\vec{p} = m\vec{v}$, при v << c.

В релятивистской механике, где v → c,

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}. \qquad (6.7)$$

Выражение для релятивистского импульса отличается от классического множителем γ. В релятивистской механике выполняется закон сохранения релятивистского импульса: **релятивистский импульс замкнутой системы сохраняется**.

Уравнение движения в релятивистской механике такое же, как и в классической $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$**, но импульс определяется по формуле**

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m\vec{v}$$

Поэтому формула $\vec{F} = m\vec{a}$, в релятивистской механике перестает быть справедливой.

Релятивистское выражение для энергии

$$W = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6.8)$$

Энергия покоя

При скорости материальной точки v=0

$$W = W_0 = mc^2$$

Классическая механика энергию покоя W_0 не учитывает, считая что при нулевой скорости в отсутствии потенциальных полей энергия тела равна нулю.

Кинетическая энергия (энергия движения)

$$W_k = W - W_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \qquad (6.9)$$

При $v \ll c$ это выражение стремится к классическому $\frac{mv^2}{2}$.

Релятивистские инварианты

Можно показать, что величина

$$W^2 - c^2p^2 = m^2c^4 \qquad (6.10)$$

является инвариантом преобразований Лоренца, т.е. не зависит от выбора системы отсчета.

Также релятивистским инвариантом является интервал между событиями:

$$S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - l^2, \qquad (6.11)$$

Где $l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.