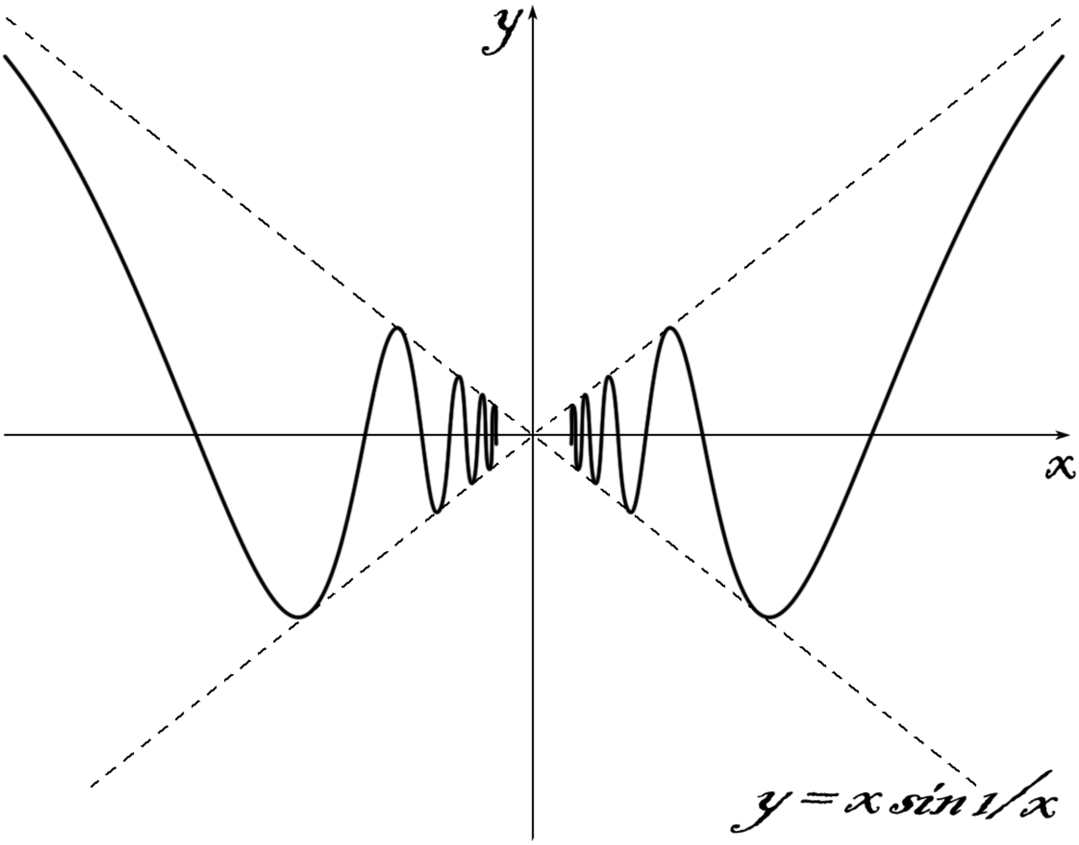
Т. В. Родина, Е. С. Трифанова

# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ – I

**для напр. «Прикладная математика и информатика»**




**Учебное пособие**

под редакцией проф. И. Ю. Попова

**Санкт-Петербург**

**2010**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

**Т.В. Родина, Е.С. Трифанова**

# КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ - I

(для напр. «Прикладная математика и информатика»)

## Учебное пособие

Под редакцией проф. И.Ю. Попова

**Санкт-Петербург**

**2010**

Т.В. Родина, Е.С. Трифанова Курс лекций по математическому анализу - I (для напр. «Прикладная математика и информатика»). Учебное пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2010. –183с.

Предлагаемое пособие предназначено для студентов ЕНФ и ФИТИП специальности «Прикладная математика и информатика». В пособии представлен курс лекций по математическому анализу, читаемых для студентов этой специальности в первом семестре. Данное пособие может быть использовано студентами других специальностей, желающими углубить свои знания в области математического анализа.

Авторы выражают глубокую признательность редактору И.Ю. Попову за внимательное отношение к работе и ряд ценных замечаний.

Рекомендовано к печати Ученым советом естественнонаучного факультета, 02.03.2010, протокол №6

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

## СОДЕРЖАНИЕ

# ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

## §1 Логическая символика

Математика оперирует предложениями, про которые мы обычно можем определенно сказать, истинны они или ложны. Такие предложения называются ***высказываниями***. Высказывания являются объектом изучения раздела математики, который называется ***математической логикой***. Мы не будем вдаваться в детали этого раздела, но будем использовать обозначения, которыми математическая логика пользуется.

Для краткой записи математических высказываний мы будем употреблять следующие логические символы:

**1.** ***Квантор всеобщности*** - $\forall$, который читается как «любой», «всякий», «для любого», «для всякого».

**2.** ***Квантор существования*** - $\exists$, который читается как «существует», «можно найти», «найдется».

Знак $\forall$ является перевернутой буквой А, а знак $\exists$ перевернутой Е, которые являются первыми буквами английских слов *All – все и Exists – существует*.

Например, запись $\forall x\ \exists y\ x+y=5$ читается следующим образом: «для любого $x$ можно найти $y$ так, что $x+y=5$».

**3.** ***Знак следования*** $\Rightarrow$. Если $\alpha$ и $\beta$ два высказывания, то запись $\alpha \Rightarrow \beta$ будет означать: «из $\alpha$ следует $\beta$», «$\alpha$ влечет за собой $\beta$», «если $\alpha$, то $\beta$», «для того чтобы было выполнено $\alpha$ необходимо, что выполнялось $\beta$» или «для того, чтобы выполнялось $\beta$, достаточно, чтобы было выполнено $\alpha$». Например, запись $x \vdots 6 \Rightarrow x \vdots 2$ можно прочитать следующим образом: «если $x$ делится на 6, то $x$ делится на 2» или «для того, чтобы $x$ делился на 6, необходимо, чтобы $x$ делился на 2» или «для того, чтобы $x$ делился на 2, достаточно, чтобы $x$ делился на 6».

**4.** ***Знак равносильности*** $\Leftrightarrow$. Запись $\alpha \Leftrightarrow \beta$ означает: «$\alpha$ равносильно $\beta$», «из $\alpha$ следует $\beta$ и из $\beta$ следует $\alpha$», «$\alpha$ необходимо и достаточно для выполнения $\beta$» или «$\alpha$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено $\beta$». Например, $\forall P_n(x) - \textit{многочлен},\quad P_n(x) \vdots (x-x_0) \Leftrightarrow x_0 - \textit{корень}\ P_n(x)$ можно прочитать таким образом: «для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на $x-x_0$, необходимо и достаточно, чтобы $x_0$ было корнем этого многочлена» или «многочлен $P_n(x)$ делится на $x-x_0$ тогда и только тогда, когда $x_0$ является корнем этого многочлена».

**5.** ***Знак отрицания*** $\neg$. Запись $\neg\alpha$ означает «не $\alpha$», «неверно, что $\alpha$ имеет место».

**Замечание.** *Использование кванторов позволяет легко строить отрицание высказываний. Запись* $\neg\forall$ *(«не для любого») читается таким образом:*

*«<u>существует</u> объект, не обладающий требуемым свойствам», и запись* $\rceil\exists$ *(«не существует») можно прочитать: «<u>любой</u> объект не обладает указанным свойством».*

*Например, высказывание* $\rceil\forall n\in\mathbb{N}$ *число* $4n-1$ *– простое означает: «<u>не для всякого</u> натурального числа* $n$ *число* $4n-1$ *простое», что равносильно высказыванию: «<u>существует</u> натуральное число n, для которого число* $4n-1$ *составное». А высказывание* $\rceil\exists n\in\mathbb{N}$ $(2n+1)\vdots 4$ *означает: «не существует натурального числа n, для которого* $2n+1$ *делится на 4», что равносильно высказыванию «для всякого натурального n число* $2n+1$ *не делится на 4».*

## §2 Бином Ньютона

Приведем здесь одну важную формулу, которая является обобщением двух, хорошо известных школьных формул.

Обозначим через $n!$ (читается *n*-факториал) - произведение всех натуральных чисел от 1 до *n*. Кроме того, положим по определению, $0!=1$.

***Биномом Ньютона*** называется формула

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n,$$

где $a$ и $b$ - любые вещественные числа, $n$ - натуральное число, а коэффициенты $C_n^0, C_n^1, C_n^2,\ldots, C_n^k,\ldots, C_n^n$ называются ***биномиальными коэффициентами*** и вычисляются по формуле $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

В школьном курсе формула бинома Ньютона приводится для $n=2$ и $n=3$.

Прежде чем доказывать формулу бинома Ньютона, сформулируем и докажем свойства биномиальных коэффициентов:

**1.** $C_n^0=C_n^n=1$;

**2.** $C_n^1=C_n^{n-1}=n$;

**3.** $C_n^k=C_n^{n-k}$;

**4.** $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}$.

Первые два свойства очевидно следуют из формулы для вычисления коэффициентов. Докажем третье свойство:

$$\blacktriangleright\ C_n^k+C_n^{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!\big((n+1)-(k+1)\big)!}=C_{n+1}^{k+1}.\blacktriangleleft$$

Теперь докажем формулу бинома Ньютона.

►Доказательство проведем методом математической индукции.

*База индукции*. Очевидно, равенство $(a+b)^1=C_1^0a+C_1^1b$ верно.

*Индукционная теорема*.

Пусть равенство

$$(a+b)^m = C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m$$

верно при некотором натуральном $m$. Докажем, что будет верным равенство

$$(a+b)^{m+1} = C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m+1-k} b^k + \ldots + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{m+1} = \\
&= (a+b)^m (a+b) = \left(C_m^0 a^m + C_m^1 a^{m-1} b + C_m^2 a^{m-2} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k} b^k + \ldots + C_m^m b^m\right)(a+b) = \\
&= C_m^0 a^{m+1} + C_m^1 a^m b + C_m^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^k a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^m a b^m + \\
&\qquad + C_m^0 a^m b + C_m^1 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_m^{k-1} a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_m^{m-1} a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
&= C_m^0 a^{m+1} + \left(C_m^1 + C_m^0\right) a^m b + \left(C_m^2 + C_m^1\right) a^{m-1} b^2 + \ldots + \left(C_m^k + C_m^{m-k+1}\right) a^{m-k+1} b^k + \\
&\qquad + \ldots + \left(C_m^m + C_m^{m-1}\right) a b^m + C_m^m b^{m+1} = \\
&= C_{m+1}^0 a^{m+1} + C_{m+1}^1 a^m b + C_{m+1}^2 a^{m-1} b^2 + \ldots + C_{m+1}^k a^{m-k+1} b^k + \ldots + C_{m+1}^m a b^m + C_{m+1}^{m+1} b^{m+1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, формула будет верна для любого натурального показателя $n$.◄

## §3 Множества

### 3.1. Множество

Понятие множества – одно из основных понятий в математике, поэтому точного определения этого понятия не существует. Как все основные понятия, оно определяется аксиоматически, но здесь мы не будем этого делать и вместо точного определения дадим синонимы этого понятия, позволяющие понять, что это такое.

Синонимами понятия «***множество***» являются: *совокупность, набор*, а также все аналогичные слова, употребляющиеся в более конкретных ситуациях, такие как коллекция, группа, стая и т.п. Например, множество людей, служащих на одном корабле – экипаж или команда, множество томов одного автора – собрание сочинений.

Один объект, входящий в данное множество, будем называть ***элементом этого множества***. Количество элементов в множестве может быть любым. Если в множестве нет ни одного элемента, то такое множество будем называть ***пустым***. Например, множество вещественных решений уравнения $x^2 + 6x + 10 = 0$ пусто. Обозначать пустое множество будем символом $\varnothing$.

Если множества обозначать большими латинскими буквами, а элементы множества малыми, то запись $a \in A$ будет читаться как «*a* есть элемент множества А» или «элемент *a* принадлежит множеству А», а запись $a \notin A$ как «*a* не является элементом множества А» или «элемент *a* не принадлежит множеству А».

Если количество элементов в множестве невелико, то множество можно задать перечислением его элементов в фигурных скобках, например,

$A=\{1,3,6,10\}$. Также можно задать и бесконечные множества, если ясен закон образования их элементов.

Например, $B=\{1,4,9,16,...\}$. Естественно считать, что перед нами множество квадратов натуральных чисел. Поэтому, если не возникает разночтений, в этой ситуации не задают общий член элементов множества.

Множества очень часто задаются некоторым свойством, по которому можно определить, входит взятый объект в данное множество или нет. Это свойство будем называть характеристическим свойством множества. Для записи такого множества в фигурных скобках сначала пишут, как обозначается элемент множества, затем вертикальную черту, после которой записывается характеристическое свойство. Например,
$C=\{x \mid x-\textit{натуральное число},\ x=4n+1,\ n=0,1,2,3,...\}$ - множество натуральных чисел, которые при делении на 4 дают в остатке 1.

### 3.2. Подмножество. Равенство множеств

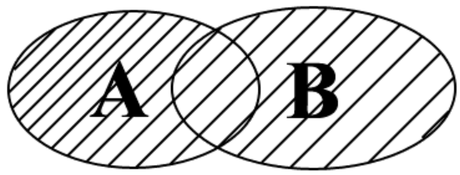
Если даны два множества $A$ и $B$ и известно, что каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$, то будем говорить, что множество $B$ является ***подмножеством*** множества $A$ или, что множество $A$ ***содержит в себе*** множество $B$. Это обозначается следующей записью: $B \subset A$.

Два множества и $B$ называются ***равными***, если $B \subset A$ и $A \subset B$. Очевидно, что множества равны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых элементов.

### 3.3. Операции над множествами

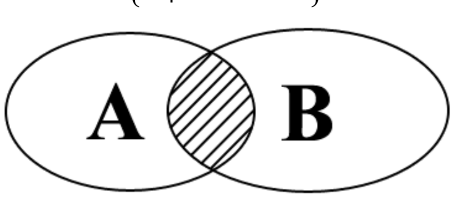
Довольно часто в задачах требуется из двух (или более) данных множеств образовать тем или иным способом одно третье множество. Для этого вводится несколько операций над множествами.

***Объединением*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $C$, состоящее из всех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств.




Обозначается объединение следующим образом: $C=A\cup B$.

**Пример 1.** Пусть $A=\{x \mid 2\le x<5\}$, $B=\{x \mid 4<x\le 7\}$. Тогда $A\cup B=\{x \mid 2\le x\le 7\}$.

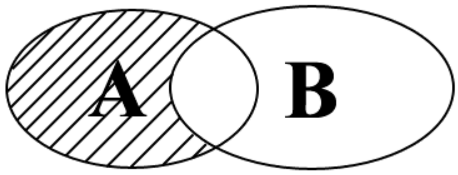



***Пересечением*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $C$, состоящее из всех элементов, которые входят в каждое из данных множеств.

Обозначается пересечение $C=A\cap B$.

**Пример 1.3.2.** Рассмотрим множества $A$ и $B$ из предыдущего примера. Тогда $A\cap B=\{x \mid 4<x<5\}$.

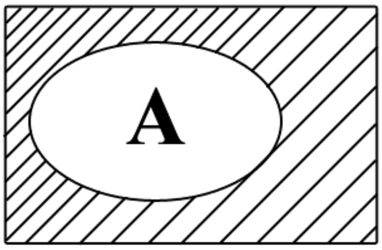
Совершенно очевидно, что понятия объединения и пересечения распространяются на любое количество множеств. Тогда, если имеется некоторое множество множеств $A_\alpha$, где $\alpha$ образуют некоторую совокупность индексов, то через $\bigcup\limits_{\alpha \in U} A_\alpha$ мы будем обозначать объединение множеств $A_\alpha$, а через $\bigcap\limits_{\alpha \in U} A_\alpha$ - их пересечение.




***Разностью*** двух множеств $A$ и $B$ называется множество $C$, состоящее из всех элементов, которые входят в $A$, но не входят в $B$.

Обозначается разность $C = A \setminus B$.

В предыдущем примере $A \setminus B = \{x \mid 2 \le x \le 4\}$.




Пусть дано некоторое множество, которое содержит в себе все прочие множества, о которых может идти речь в данном круге задач. Такое множество будем называть универсальным. Тогда ***дополнением*** множества $A$ (или дополнением множества $A$ до универсального множества) будем называть множество $C$, состоящее из всех элементов которые входят в универсальное множество, но не входят в множество $A$.

Например, когда речь идет о числах, естественно за универсальное множество принять множество всех вещественных (или комплексных) чисел. Тогда дополнением множества рациональных чисел является множество иррациональных чисел и т.п.

Дополнение множества $A$ будем обозначать $A^d$.

Операции над множествами иллюстрируются на так называемых диаграммах Венна, где каждое множество изображается в виде части плоскости.

### 3.4. Свойства операций над множествами

Операции над множествами обладают рядом свойств, которые полезно знать:

**1.** $A \cup B = B \cup A$;

**2.** $A \cap B = B \cap A$;

**3.** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

**4.** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

**5.** $A \cup \varnothing = A$;

**6.** $A \cap \varnothing = \varnothing$;

**7.** $(A \cup B)^d = A^d \cap B^d$;

**8.** $(A \cap B)^d = A^d \cup B^d$.

Для доказательства этих свойств воспользуемся определением равенства множеств. Докажем, например свойства 3 и 7.

Доказательство свойства 3.

► Пусть $a \in A \cup (B \cap C)$, тогда

$$\left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in B\cap C\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\in A\\ \begin{cases}a\in B\\ a\in C\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in B\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in C\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\in A\cup B\\ a\in A\cup C\end{cases}\Rightarrow a\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$ Таким образом, мы доказали, что из соотношения $a\in A\cup(B\cap C)$ следует соотношение $a\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$, что означает, что $A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

Докажем обратное включение. Пусть $a\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Тогда $\begin{cases}a\in A\cup B\\ a\in A\cup C\end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in B\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in C\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\in A\\ \begin{cases}a\in B\\ a\in C\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a\in A\\ a\in B\cap C\end{array}\right.$. Последние соотношения означают, что $a\in A\cup(B\cap C)$ и $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$. Окончательно, $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.◄

Доказательство свойства 7.

► Пусть $a\in(A\cup B)^d$, тогда $a\notin A\cup B$, т.е. $\begin{cases}a\notin A\\ a\notin B\end{cases}$, следовательно, $\begin{cases}a\in A^d\\ a\in B^d\end{cases}\Rightarrow a\in A^d\cap B^d$ и мы доказали, что $(A\cup B)^d\subset A^d\cap B^d$.

Обратно, пусть $a\in A^d\cap B^d$. Тогда $\begin{cases}a\in A^d\\ a\in B^d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\notin A\\ a\notin B\end{cases}\Rightarrow a\notin A\cup B\Rightarrow a\in(A\cup B)^d$. Отсюда $A^d\cap B^d\subset(A\cup B)^d$ и окончательно, $(A\cup B)^d=A^d\cap B^d$.◄

### 3.5. Отображения множеств

**Определение 1.3.1.** *Пусть даны два множества $X$ и $Y$. Правило $f$, по которому для каждого элемента $x\in X$ можно найти единственный элемент $y\in Y$, будем называть* ***отображением*** *множества $X$ в множество $Y$.*

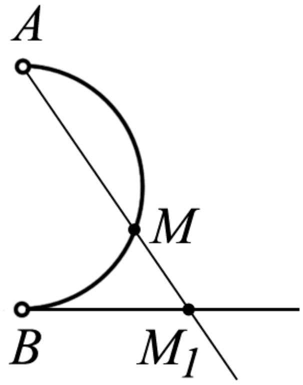
Задать отображение – означает задать тройку $X$, $Y$ и правило $f$.

Тот факт, что задано отображение множества $X$ в множество $Y$ будем обозначать $f:X\to Y$ или $X\xrightarrow{f}Y$. Если мы хотим указать, какой именно элемент $y\in Y$ соответствует элементу $x\in X$, то будем писать $x\to y$ или $y=f(x)$. Множество $X$ будем называть ***областью определения*** отображения. Элемент $y$, соответствующий элементу $x\in X$, называется ***образом*** элемента $x$ и обозначается $f(x)$. Множество образов $\{f(x)\,|\,x\in X\}=Y_0$ входит в множество $Y$, но может не совпадать с ним. Множество $Y_0$ будем называть ***множеством значений*** отображения. Если $Y_0 = Y$, то будем говорить, что $f$ отображает $X$ <u>на</u> $Y$ или, что отображение $f$ является ***сюръекцией***.

**Пример 2.** Пусть $X = Y = \mathbb{R}$ - множество всех вещественных чисел, и каждому $x \in X$ ставится в соответствие его квадрат $x^2$. Это правило является отображением множества $X$ в множество $Y$, но не является сюръекцией, так как есть вещественные числа (отрицательные), которые не являются значениями такого отображения.

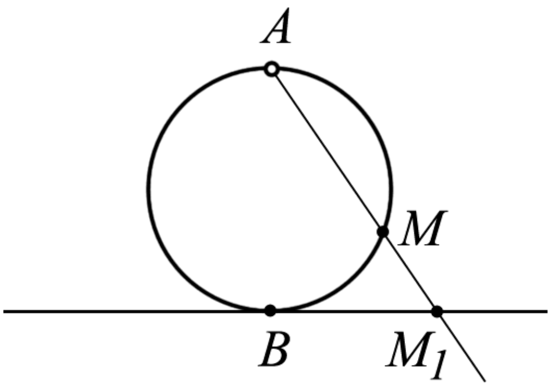
Если положить $X$ - множество всех вещественных чисел и $Y$ - множество неотрицательных вещественных чисел, и $x \to x^2$, то такое правило отображает $X$ на $Y$, т.е. является сюръекцией.

**Пример 3.** Пусть $X$ - множество точек полуокружности AB (конечные точки не принадлежат множеству), $Y$ - множество точек прямой $l$. Каждой точке полуокружности $M$ сопоставим точку прямой $M_1$ так, чтобы точки $A, M, M_1$ лежали на одной прямой.




Это отображение множества $X$ в множество $Y$.

Если взять $X$ - множество точек окружности с выколотой точкой $A$ и $Y$ - множество точек прямой $l$ и каждой точке окружности $M$ сопоставить точку прямой $M_1$ так, чтобы точки $A, M, M_1$ лежали на одной прямой, то такое правило будет сюръекцией.




**Пример 4.** $X = \mathbb{N}$, $Y$ - произвольное множество. Здесь каждому натуральному числу сопоставляется элемент некоторого множества. Такое отображение будем называть ***последовательностью***.

Элемент множества $Y$, соответствующий натуральному числу $n$ называют ***общим членом*** последовательности и обозначают $y_n$. Таким образом, ***последовательность*** – это отображение множества натуральных чисел в произвольное множество $Y$: $n \to y_n$, $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in Y$.

Последовательности будем записывать $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ или, иногда, в виде упорядоченного набора $y_1, y_2, y_3, \ldots$, которые будем называть ***элементами последовательности***.

**Замечание**. *Если отображение задает последовательность, то множество значений этой последовательности также обозначается символом* $\{y_n\}$, *но это множество не надо путать с самой последовательностью. Последовательность всегда бесконечна, тогда как множество ее значений может быть конечным. Например, пусть общий член последовательности задан формулой*

$y_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда последовательностью будет бесконечный набор чисел* $0, 1, 0, 1, 0, \ldots$, *а множеством ее значений – множество, состоящее только из двух элементов:* $\{0, 1\}$.

Возьмем $y \in Y_0$. Тогда множество $\{x \mid f(x) = y\}$ (оно может содержать не единственный элемент) будем называть ***прообразом*** элемента $y$ и обозначать $f^{-1}(y)$. Это определение можно расширить и предполагать, что $y \in Y$. Тогда, если $y \notin Y_0$, то его прообраз - пустое множество.

Если задано отображение $X$ на $Y$, и прообраз каждого элемента из $Y$ единственен, то будем говорить, что между множествами $X$ и $Y$ установлено ***взаимно-однозначное соответствие***. В этой ситуации пишут $X \leftrightarrow Y$ или по элементам $x \leftrightarrow y$ и отображение $f$, устанавливающее это соответствие называют ***биекцией***.

Понятия образа и прообраза можно ввести не только для одного элемента, но и для множеств. Так, ***образом множества*** $A \subset X$ будем называть множество $\{y \mid y \in Y,\ y = f(x),\ x \in A\}$, и ***прообразом множества*** $B \subset Y$ будем называть множество $\{x \mid x \in X,\ f(x) = y,\ y \in B\}$. Образ множества $A$ будем обозначать $f(A)$, а прообраз множества $B$ - $f^{-1}(B)$.

## §4 Аксиомы вещественных чисел

В классическом математическом анализе изучаются вещественнозначные функции вещественного аргумента, поэтому нам понадобится знать свойства вещественных чисел. В абсолютно строгом курсе теория вещественного числа строится аксиоматически, но в учебном курсе такое изложение не предусмотрено. Мы будем считать, что читатель в основном знаком с понятием вещественного числа и дадим только обзорное изложение аксиоматики вещественных чисел, остановившись более подробно, на тех свойствах чисел, о которых не упоминалось в средней школе.

### 4.1. Аксиомы сложения

*На множестве вещественных чисел определена бинарная операция (то есть каждой паре вещественных чисел единственным образом сопоставляется некоторое вещественное число), которая называется* ***сложением*** *и обладает следующими свойствами:*

***1.*** *Для любых двух чисел a и b выполняется*

$$a + b = b + a.$$

Это свойство называется ***коммутативным законом сложения***.

***2.*** *Для любых чисел a, b и c выполняется*

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Это – ***ассоциативный закон сложения***.

3. *Существует число, которое называется* ***нейтральным элементом сложения*** *(или* ***нулем****) и которое обозначается* $0$ *такое, что для всякого числа a выполняется*
$$a+0=a.$$
4. *Для любого числа a существует число, которое называется* ***противоположным*** *данному и обозначается* $-a$ *такое, что*
$$a+(-a)=0.$$

Сформулируем и докажем несколько следствий из этих аксиом.

**Следствие 1.** *Нейтральный элемент сложения единственный.*

►Предположим, что существует два нейтральных элемента $0$ и $0'$. Тогда $0'=$(в силу аксиомы 3)$=0'+0=$(в силу аксиомы 1)$=0+0'=$(в силу аксиомы 3)$=0$.◄

**Следствие 2**. *Число, противоположное данному, единственно.*

►Предположим, что число $a$ имеет два противоположных элемента $b$ и $b'$. Тогда, применяя последовательно аксиомы 3, 4, 2, 1, 4, 3, получим $b'=b'+0=b'+(a+b)=(b'+a)+b=0+b=b$.◄

**Следствие 3.** *Для любого числа* $a$ *верно* $-(-a)=a$.

►Требуется доказать, что число $a$ является противоположным числу $-a$. Действительно, $(-a)+a=a+(-a)=0$, а это и означает, что $a=-(-a)$.◄

Теперь можно ввести действие, обратное сложению и для любых вещественных чисел $a$ и $b$ определить разность $c=a-b$.

**Определение 1.4.1.** ***Разностью*** *чисел a и b называется такое вещественное число* $c$*, для которого выполнено равенство* $c+b=a$.

**Теорема 1.4.1.** *Для любых вещественных чисел a и b существует разность* $c=a-b$*, причем это число c единственно.*

►Возьмем число $c=a+(-b)$ и проверим по определению, что оно является разностью чисел $a$ и $b$. Действительно, используя свойства сложения, получим $c+b=\big(a+(-b)\big)+b=a+\big((-b)+b\big)=a+0=a$.

Таким образом, число $a+(-b)$ является разностью, следовательно, разность всегда существует.

Докажем ее единственность. Пусть $c$ - разность чисел $a$ и $b$. Тогда $c+b=a$. Прибавим к каждой части этого равенства по $(-b)$. Получим $c+b+(-b)=a+(-b) \Leftrightarrow c+\big(b+(-b)\big)=a+(-b) \Leftrightarrow c+0=a+(-b) \Leftrightarrow c=a+(-b)$.

Таким образом, только число $a+(-b)$ будет требуемой разностью.◄

Для разности выполняются свойства:

**Свойство 1.** *Для любого числа a выполняется равенство* $a-a=0$*;*

**Свойство 2.** *Для любых чисел a и b выполняется равенство* $-a-b=-(a+b)$.

Эти свойства докажите самостоятельно.

### 4.2. Аксиомы умножения

*На множестве вещественных чисел определена бинарная операция, которая называется* ***умножением*** *и обладает следующими свойствами:*

1. *Для любых двух чисел a и b выполняется*
$$a\cdot b=b\cdot a.$$
Это свойство называется ***коммутативным законом умножения***.
2. *Для любых чисел a, b и c выполняется*
$$\left(a\cdot b\right)\cdot c=a\cdot\left(b\cdot c\right).$$
Это – ***ассоциативный закон умножения***.
3. *Существует число, которое называется* ***нейтральным элементом умножения*** *(или* ***единицей****) и которое обозначается* $1$ *такое, что для всякого числа* $a$ *выполняется*
$$a\cdot 1=a.$$
4. *Для любого числа* $a\neq 0$ *существует число, которое называется* ***обратным*** *данному и обозначается* $\frac{1}{a}$ *такое, что*
$$a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

Из аксиом умножения следуют свойства:

**Свойство 1.** *Нейтральный элемент умножения единственен.*

**Свойство 2.** *Для любого числа* $a\neq 0$ *число* $\frac{1}{a}$ *единственно.*

**Свойство 3.** *Для любого числа* $a\neq 0$ *выполняется равенство* $\dfrac{1}{1/a}=a$.

Эти свойства аналогичны свойствам 1-3 сложения и доказываются аналогично.

**Свойство 4.** *Произведение обратных к числам, отличным от нуля, равно обратному числу к произведению этих чисел, то есть* $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a\cdot b}$.

Докажем последнее свойство.

► Пользуясь аксиомами умножения, получим

$$\left(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\right)\cdot\left(a\cdot b\right)=\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{1}{b}\cdot b\right)=1.$$

Отсюда следует, что число $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}$ - обратное к произведению $ab$, что и требовалось доказать.◄

Теперь определим действие деления двух вещественных чисел.

**Определение 1.4.2.** ***Частным*** *двух вещественных чисел будем называть такое вещественное число* $c=\frac{a}{b}$, *для которого* $c\cdot b=a$.

**Теорема 1.4.2**. *Для любых двух вещественных чисел a и b,* $b \neq 0$ *существует и единственно частное* $\frac{a}{b}$.

►Возьмем в качестве $c$ число $a \cdot \frac{1}{b}$ и докажем, что оно будет частным чисел $a$ и $b$. Имеем $c \cdot b = a \cdot \frac{1}{b} \cdot b = a \cdot \left( \frac{1}{b} \cdot b \right) = a \cdot 1 = a$.

Теперь докажем единственность этого частного. Допустим, что $c$ - какое-нибудь частное чисел $a$ и $b$. Тогда $c \cdot b = a$. Умножим это равенство на число $\frac{1}{b}$.

Тогда $c \cdot b \cdot \frac{1}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \Leftrightarrow c \cdot \left( b \cdot \frac{1}{b} \right) = a \cdot \frac{1}{b} \Leftrightarrow c \cdot 1 = a \cdot \frac{1}{b} \Leftrightarrow c = a \cdot \frac{1}{b}$.

То есть другого частного быть не может.◄

Теперь можно доказать, что частное $\frac{a}{a} = 1$.

Далее можно из множества вещественных чисел выделить натуральные числа, целые и рациональные дроби. Также можно ввести операции возведения в степень и извлечения корня. Мы не будем здесь заниматься подробным изучением различных классов чисел, напомним только, что числа, которые можно представить в виде частного $\frac{a}{b}$, где $a$ - целое, а $b$ - натуральное число, называют ***рациональными числами***. Каждое рациональное число можно записать, как конечную или бесконечную периодическую десятичную дробь. Если вещественное число нельзя представить в виде такого частного, то это число будем называть ***иррациональным***.

Напомним также, что каждое рациональное число вида $a_0,a_1a_2...a_n(9)$, т.е. число, в десятичной записи которого, начиная с некоторой позиции, находится 9 в периоде, можно записать в виде конечной десятичной дроби вида $a_0,a_1a_2...(a_n+1)$, т.е. такого, где цифра, стоящая в $n$ - ой позиции увеличивается на 1 и становится последней. Например, $1,3999... = 1,4$ или $12,999... = 13$.

Сформулируем два наиболее интересных свойства дробных чисел:

**Свойство 1.** *Равенство* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ *равносильно равенству* $ad = bc$;

**Свойство 2.** *Для любых чисел a,* $b \neq 0$ *и* $c \neq 0$ *выполняется равенство* $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$.

### 4.3. Аксиома, связывающая сложение и умножение

*Для любых чисел a, b и c выполняется*

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c.$$

Это свойство называется ***дистрибутивным законом***.

Аксиомы первых трех групп позволяют доказать еще некоторое количество свойств вещественных чисел, например,

$$a\cdot 0 = 0;$$

$$(-a)\cdot b = -(a\cdot b) \text{ и } a\cdot(-b) = -(a\cdot b).$$

### 4.4. Аксиома порядка

*Множество вещественных чисел разделено на три непустых и непересекающихся класса так, что один класс состоит из одного нулевого элемента, числа, входящие в другой класс называются* ***положительными****, а числа входящие в третий класс –* ***отрицательными****. При этом*

*1) Если a- положительно, то $-a$ - отрицательно и наоборот;*

*2) Если числа a и b - положительные, то их сумма $a+b$ - положительная;*

*3) Если числа a и b - положительные, то $a\cdot b$ - положительное.*

Сформулируем следствия из этой аксиомы.

**Следствие 1.** *Число 1 – положительное.*

►Докажем, что $1 \neq 0$. Действительно, в силу аксиомы порядка, существует хотя бы одно положительное число $a$. Тогда, если допустить, что $1 = 0$, то получим $a = a\cdot 1 = a\cdot 0 = 0$, что противоречит выбору числа $a$.

Теперь допустим, что 1 – число отрицательное. Тогда, $(-1)$ - положительно, и в силу пункта 3 аксиомы порядка, получим, что, если $a$ - число положительное, то произведение $(-1)\cdot a$ - тоже положительно. Так как $(-1)\cdot a = -(1\cdot a) = -a$, то $-a$ - положительно, следовательно, $a$ - отрицательно, что противоречит выбору $a$.

Таким образом, число 1 может быть отнесено только к классу положительных чисел.◄

**Следствие 2.** *Аксиома порядка позволяет ввести понятие сравнения вещественных чисел.*

**Определение 1.4.3.** *Будем говорить, что a* ***больше*** *b и писать: $a > b$, если разность $a-b$ - положительна. Если эта разность отрицательна, то будем говорить, что a* ***меньше*** *b и писать $a < b$.*

Таким образом, для любых двух вещественных чисел $a$ и $b$ выполняется одно из трех соотношений:

$$a = b,\quad a > b,\quad a < b.$$

Будем также писать $a \geq b$ $(a \leq b)$, если выполнено одно из двух соотношений: $a > b$ $(a < b)$ или $a = b$.

Наличие соотношений «больше» и «меньше» для любой пары неравных вещественных чисел называют ***свойством упорядоченности*** множества вещественных чисел.

Отсюда следуют свойства неравенств:

1. *Если* $a > b$, *то* $b < a$.
2. *Если* $a > b$ *и* $b > c$, *то* $a > c$. *Это свойство называется свойством транзитивности неравенств.*
3. *Если* $a > b$ *и* $c$ *- любое вещественное число, то* $a + c > b + c$.
4. *Если* $a > b$ *и* $c$ *- положительно, то* $a \cdot c > b \cdot c$ *и* *если* $a > b$ *и* $c$ *- отрицательно, то* $a \cdot c < b \cdot c$.
5. *Если* $a > b$ *и* $c > d$, *то* $a + c > b + d$.
6. *Если* $a > b$ *и* $c < d$, *то* $a - c > b - d$.
7. *Если числа a, b, c и d- положительны и* $a > b$, $c > d$, *то* $a \cdot c > b \cdot d$.
8. *Если числа* $a$ *и* $b$ *- одного знака и* $a > b$, *то* $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Докажите их самостоятельно.

Введение понятия сравнения вещественных чисел позволяет доказать еще несколько интересных следствий.

**Следствие 3.** *На множестве вещественных чисел нет наибольшего числа и наименьшего числа, то есть какое бы число a мы ни взяли, всегда найдется число b такое, что* $b > a$ *и число c такое, что* $c < a$.

►Для доказательства достаточно взять $b = a + 1$ и $c = a - 1$.◄

**Следствие 4.** *Каковы бы ни были два различных вещественных числа, всегда найдется число, лежащее между ними.*

►Для доказательства предположим, что $a < b$. Возьмем $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда из свойств неравенств следует: $a + a < a + b < b + b$, откуда получим $a < c < b$.◄

**Упражнение.** Докажите, что если $a > 0$, то $a$ - положительно и наоборот.

Аксиомы порядка позволяют ввести такое важное понятие, как модуль числа.

**Определение 1.4.4.** ***Модулем*** *вещественного числа a будем называть число, равное a, если оно положительно, равное числу противоположному a, если a отрицательно и равное нулю, если a равно нулю.*

Таким образом, $|a| = \begin{cases} a, & a > 0 \\ -a, & a < 0 \\ 0, & a = 0 \end{cases}$ или $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a \leq 0 \end{cases}$.

Перечислим основные свойства модуля вещественного числа.

1. $|a| \geq 0$, причем $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$;
2. $|a| = |-a|$;
3. $-|a| \leq a \leq |a|$;
4. $|a| = |b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b, \\ a = -b; \end{array}\right.$

**5.** $|x| = C \overset{C>0}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x = C, \\ x = -C; \end{array}\right.$

**6.** $|x| < C \Leftrightarrow \begin{cases} x < C, \\ x > -C; \end{cases}$

Последнюю систему при положительном $C$ можно записать в виде двойного неравенства $-C < x < C$.

**7.** $|x| > C \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > C, \\ x < -C; \end{array}\right.$

**8.** $|ab| = |a||b|$;

**9.** $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;

**10.** $|a+b| \le |a| + |b|$;

**11.** $|a-b| \ge \big||a| - |b|\big|$.

### 4.5. Аксиома непрерывности

*Каковы бы ни были два непустых множества вещественных чисел $A$ и $B$, у которых для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$, существует такое число $\lambda$, что для всех $a \in A$, $b \in B$ имеет место неравенство $a \le \lambda \le b$.*

Свойство непрерывности вещественных чисел означает, что на вещественной прямой нет «пустот», то есть точки, изображающие числа заполняют всю вещественную ось.

Дадим другую формулировку аксиоме непрерывности. Для этого введем

**Определение 1.4.5.** *Два множества $A$ и $B$ будем называть* ***сечением*** *множества вещественных чисел, если*

1) *множества $A$ и $B$ не пусты;*
2) *объединение множеств $A$ и $B$ составляет множество всех вещественных чисел;*
3) *каждое число множества $A$ меньше числа множества $B$.*

То есть каждое множество, образующее сечение, содержит хотя бы один элемент, эти множества не содержат общих элементов и, если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$.

Множество $A$ будем называть ***нижним классом***, а множество $B$ - ***верхним классом*** сечения. Обозначать сечение будем через $A\,|\,B$.

Самыми простыми примерами сечений являются сечения полученные следующим образом. Возьмем какое- либо число $\alpha$ и положим $A = \{x \mid x < \alpha\}$, $B = \{x \mid x \ge \alpha\}$. Легко видеть, что эти множества не пусты, не пересекаются и если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$, поэтому множества $A$ и $B$ образуют сечение. Аналогично, можно образовать сечение, множествами $A = \{x \mid x \le \alpha\}$, $B = \{x \mid x > \alpha\}$.

Такие сечения будем называть ***сечениями, порожденными числом*** $\alpha$ или будем говорить, что число $\alpha$ производит это сечение. Это можно записать как $\alpha = A\,\big|B$.

Сечения, порожденные каким-либо числом, обладают двумя интересными свойствами:

**Свойство 1.** *Либо верхний класс содержит наименьше число, и в нижнем классе нет наибольшего числа, либо нижний класс содержит наибольшее число, и верхнем классе нет наименьшего.*

**Свойство 2.** *Число, производящее данное сечение, единственно*.

Оказывается, что аксиома непрерывности, сформулированная выше, эквивалентна утверждению, которое называют ***принципом Дедекинда***:

**Принцип Дедекинда**. *Для каждого сечения существует число, порождающее это сечение.*

Докажем эквивалентность этих утверждений.

► Пусть справедлива аксиома непрерывности, и задано какое-нибудь сечение $A\,\big|B$. Тогда, так как классы $A$ и $B$ удовлетворяют условиям, сформулированным в аксиоме, существует число $\lambda$ такое, что $a \le \lambda \le b$ для любых чисел $a \in A$ и $b \in B$. Но число $\lambda$ должно принадлежать одному и только одному из классов $A$ или $B$, поэтому будет выполнено одно из неравенств $a \le \lambda < b$ или $a < \lambda \le b$. Таким образом, число $\lambda$ либо является наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем классе и порождает данное сечение.

Обратно, пусть выполнен принцип Дедекинда и заданы два непустых множества $A$ и $B$ таких, что для всех $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \le b$. Обозначим через $\tilde{B}$ множество чисел $\left\{\tilde{b}\right\}$ таких, что $a \le \tilde{b}$ для любого $\tilde{b} \in \tilde{B}$ и всех $a \in A$. Тогда $B \subset \tilde{B}$. За множество $\tilde{A}$ примем множество всех чисел, не входящих в $\tilde{B}$.

Докажем, что множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ образуют сечение.

Действительно, очевидно, что множество $\tilde{B}$ не пусто, так как содержит непустое множество $B$. Множество $\tilde{A}$ тоже не пусто, так как если число $a \in A$, то число $a-1 \notin \tilde{B}$, так как любое число, входящее в $\tilde{B}$ должно быть не меньше числа $a$, следовательно, $a-1 \in \tilde{A}$.

Далее, множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ не пересекаются, и их объединение составляет множество всех вещественных чисел, в силу выбора множеств.

И, наконец, если $\tilde{a} \in \tilde{A}$ и $\tilde{b} \in \tilde{B}$, то $\tilde{a} \le \tilde{b}$. Действительно, если какое- либо число $c$ будет удовлетворять неравенству $c > \tilde{b}$, где $\tilde{b} \in \tilde{B}$, то будет верным неравенство $c > a$ ($a$ - произвольный элемент множества $A$) и $c \in \tilde{B}$.

Итак, $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ образуют сечение, и в силу принципа Дедекинда, существует число $\lambda$, порождающее это сечение, то есть являющееся либо наибольшим в классе $\tilde{A}$, либо наименьшим в классе $\tilde{B}$.

Докажем, что это число не может принадлежать классу $\tilde{A}$. Действительно, если $\lambda \in \tilde{A}$, то существует число $a^* \in A$ такое, что $\lambda < a^*$. Тогда существует число $a'$, лежащее между числами $\lambda$ и $a^*$. Из неравенства $a' < a^*$ следует, что $a' \in \tilde{A}$, тогда из неравенства $\lambda < a'$ следует, что $\lambda$ не является наибольшим в классе $\tilde{A}$, что противоречит принципу Дедекинда. Следовательно, число $\lambda$ будет наименьшим в классе $\tilde{B}$ и для всех $a \in A$ и будет выполняться неравенство $a \le \lambda \le b$, что и требовалось доказать.◄

Таким образом, свойство, сформулированное в аксиоме и свойство, сформулированное в принципе Дедекинда эквивалентны. В дальнейшем эти свойства множества вещественных чисел мы будем называть ***непрерывностью по Дедекинду***.

Из непрерывности множества вещественных чисел по Дедекинду следуют две важные теоремы.

**Теорема 1.4.3. (Принцип Архимеда)** *Каково бы ни было вещественное число a, существует натуральное число n такое, что* $a < n$.

► Допустим, что утверждение теоремы неверно, то есть существует такое число $b_0$, что выполняется неравенство $n \le b_0$ для всех натуральных чисел $n$. Разобьем множество вещественных чисел на два класса: в класс $B$ отнесем все числа $b$, удовлетворяющие неравенству $n \le b$ для любых натуральных $n$. Этот класс не пуст, так как ему принадлежит число $b_0$. В класс $A$ отнесем все оставшиеся числа. Этот класс тоже не пуст, так как любое натуральное число входит в $A$. Классы $A$ и $B$ не пересекаются и их объединение составляет множество всех вещественных чисел.

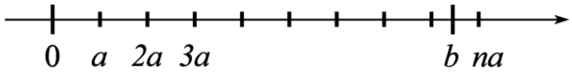
Если взять произвольные числа $a \in A$ и $b \in B$, то найдется натуральное число $n_0$ такое, что $a < n_0 \le b$, откуда следует, что $a < b$. Следовательно, классы $A$ и $B$ удовлетворяют принципу Дедекинда и существует число $\alpha$, которое порождает сечение $A|B$, то есть $\alpha$ является либо наибольшим в классе $A$, либо наименьшим в классе $B$. Если предположить, что $\alpha$ входит в класс $A$, то можно найти натуральное $n_1$, для которого выполняется неравенство $\alpha < n_1$. Так как $n_1$ тоже входит в $A$, то число $\alpha$ не будет наибольшим в этом классе, следовательно, наше предположение неверно и $\alpha$ является наименьшим в классе $B$.

С другой стороны, возьмем число $\alpha - 1$, которое входит в класс $A$. Следовательно, найдется натуральное число $n_2$ такое, что $\alpha - 1 < n_2$, откуда получим $\alpha < n_2 + 1$. Так как $n_2 + 1$ - натуральное число, то из последнего неравенства следует, что $\alpha \in A$. Полученное противоречие доказывает теорему.◄

**Следствие.** *Каковы бы ни были числа a и b такие, что* $0 < a < b$, *существует натуральное число n, для которого выполняется неравенство* $na > b$.

►Для доказательства достаточно применить принцип Архимеда к числу $\frac{b}{a}$ и воспользоваться свойством неравенств.◄

Следствие имеет простой геометрический смысл: Каковы бы ни были два отрезка, если на большем из них, от одного из его концов последовательно откладывать меньший, то за конечное число шагов можно выйти за пределы большего отрезка.




**Пример 1**. Доказать, что для всякого неотрицательного числа $a$ существует единственное неотрицательное вещественное число $t$ такое, что $t^n = a,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Эта ***теорема о существовании арифметического корня n-ой степени из неотрицательного числа*** в школьном курсе алгебры принимается без доказательства.

☺Если $a = 0$, то $x = 0$, поэтому доказательство существования арифметического корня из числа $a$ требуется только для $a > 0$.

Предположим, что $a > 0$ и разобьем множество всех вещественных чисел на два класса. В класс $B$ отнесем все положительные числа $x$, которые удовлетворяют неравенству $x^n > a$, в класс $A$, все остальные.

По аксиоме Архимеда существуют натуральные числа $k$ и $m$ такие, что $\frac{1}{m} < a < k$. Тогда $k^2 \geq k > a$ и $\frac{1}{m^2} \leq \frac{1}{m} < a$, т.е. оба класса непусты, причем класс $A$ содержит положительные числа.

Очевидно, что $A \cup B = \mathbb{R}$ и если $x_1 \in A$ и $x_2 \in B$, то $x_1 < x_2$.

Таким образом, классы $A$ и $B$ образуют сечение. Число, образующее это сечение, обозначим через $t$. Тогда $t$ либо является наибольшим числом в классе $A$, либо наименьшим в классе $B$.

Допустим, что $t \in A$ и $t^n < a$. Возьмем число $h$, удовлетворяющее неравенству $0 < h < 1$. Тогда

$$(t+h)^n = t^n + C_n^1 t^{n-1} h + C_n^2 t^{n-2} h^2 + \ldots + C_n^n h^n < t^n + C_n^1 t^{n-1} h + C_n^2 t^{n-2} h + \ldots + C_n^n h =$$

$$= t^n + h\left(C_n^1 t^{n-1} + C_n^2 t^{n-2} + \ldots + C_n^n + C_n^0 t^n\right) - h C_n^0 t^n = t^n + h(t+1)^n - h t^n =$$

$$= t^n + h\left((t+1)^n - t^n\right)$$

Отсюда, если взять $h < \dfrac{a - t^n}{(t+1)^n - t^n}$, то получим $(t+h)^n < a$. Это означает, что $t + h \in A$, что противоречит тому, что $t$ наибольший элемент в классе $A$.

Аналогично, если предположить, что $t$ - наименьший элемент класса $B$, то, взяв число $h$, удовлетворяющее неравенствам $0 < h < 1$ и $h < \dfrac{t^n - a}{(t+1)^n - t^n}$,

получим $(t-h)^n = t^n - C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h^2 - ... + (-1)^n C_n^n h^n >$

$$> t^n - \left(C_n^1 t^{n-1}h + C_n^2 t^{n-2}h + ... + C_n^n h\right) = t^n - h\left((t+1)^n - t^n\right) > a.$$

Это означает, что $t - h \in B$ и $t$ не может быть наименьшим элементом класса $B$. Следовательно, $t^n = a$.

Единственность следует из того что, если $t_1 < t_2$, то $t_1^n < t_2^n$. ☻

**Пример 2**. Доказать, что, если $a < b$, то всегда найдется рациональное число $r$ такое, что $a < r < b$.

☺Если числа $a$ и $b$ - рациональные, то число $\dfrac{a+b}{2}$ рационально и удовлетворяет требуемым условиям. Допустим, что хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ иррационально, например, допустим, что иррационально число $b$. Предположим также, что $a \geq 0$, тогда $b > 0$. Запишем представления чисел $a$ и $b$ в виде десятичных дробей: $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2\alpha_3....$ и $b = \beta_0, \beta_1\beta_2\beta_3...$, где вторая дробь бесконечная и непериодическая. Что касается представления числа $a$, то будем считать, что, если число $a$ - рационально, то его запись либо конечна, либо это периодическая дробь, период которой не равен 9.

Так как $b > a$, то $\beta_0 \geq \alpha_0$; если $\beta_0 = \alpha_0$, то $\beta_1 \geq \alpha_1$; если $\beta_1 = \alpha_1$, то $\beta_2 \geq \alpha_2$ и т. д., причем найдется такое значение $i$, при котором в первый раз будет выполняться строгое неравенство $\beta_i > \alpha_i$. Тогда число $\beta_0, \beta_1\beta_2...\beta_i$ будет рациональным и будет лежать между числами $a$ и $b$.

Если $a < 0$, то приведенное рассуждение надо применить к числам $a + n$ и $b + n$, где $n$ - натуральное число, такое что $n \geq |a|$. Существование такого числа следует из аксиомы Архимеда. ☻

**Определение 1.4.6.** *Пусть дана последовательность отрезков числовой оси* $\{[a_n; b_n]\}$, $a_n < b_n$. *Эту последовательность будем называть* ***системой вложенных отрезков****, если для любого* $n$ *выполняются неравенства* $a_n \leq a_{n+1}$ *и* $b_{n+1} \leq b_n$.

Для такой системы выполняются включения

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset [a_3; b_3] \supset ... \supset [a_n; b_n] \supset ...,$$

то есть каждый следующий отрезок содержится в предыдущем.

**Теорема 1.4.4.** *Для всякой системы вложенных отрезков существует по крайней мере одна точка, которая входит в каждый из этих отрезков.*

►Возьмем два множества $A = \{a_n\}$ и $B = \{b_n\}$. Они не пусты и при любых $n$ и $m$ выполняется неравенство $a_n < b_m$. Докажем это.

Если $n \geq m$, то $a_n < b_n \leq b_m$. Если $n < m$, то $a_n \leq a_m < b_m$.

Таким образом, классы $A$ и $B$ удовлетворяют аксиоме непрерывности и, следовательно, существует число $\lambda$ такое, что $a_n \leq \lambda \leq b_n$ для любого *n*, т.е. это число принадлежит любому отрезку $\left[a_n; b_n\right]$.◄

В дальнейшем (теорема 2.1.8) мы уточним эту теорему.

Утверждение, сформулированное в теореме 1.4.4, называется ***принципом Кантора***, а множество, удовлетворяющее этому условию, будем называть ***непрерывным по Кантору***.

Мы доказали, что, если упорядоченное множество непрерывно по Дедекинду, то в нем выполнен принцип Архимеда и оно непрерывно по Кантору. Можно доказать, что упорядоченное множество, в котором выполнены принципы Архимеда и Кантора, будет непрерывным по Дедекинду. Доказательство этого факта содержится, например, в [4, том 1].

Принцип Архимеда позволяет каждому отрезку прямой сопоставить некоторое единственное положительное число, удовлетворяющее условиям:

1. *равным отрезкам соответствуют равные числа;*
2. *Если B точка отрезка AC и отрезкам AB и BC соответствуют числа a и b, то отрезку AC соответствует число* $a + b$;
3. *некоторому отрезку соответствует число 1.*

Число, соответствующее каждому отрезку и удовлетворяющее условиям 1-3 называется ***длиной*** этого отрезка.

Принцип Кантора позволяет доказать, что для каждого положительного числа можно найти отрезок, длина которого равна этому числу. Таким образом, между множеством положительных вещественных чисел и множеством отрезков, которые откладываются от некоторой точки прямой по заданную сторону от этой точки, можно установить взаимно однозначное соответствие.

Это позволяет дать определение числовой оси и ввести соответствие между вещественными числами и точками на прямой. Для этого возьмем некоторую прямую и выберем на ней точку *O*, которая разделит эту прямую на два луча. Один из этих лучей назовем ***положительным***, а второй ***отрицательным***. Тогда будем говорить, что мы выбрали ***направление*** на этой прямой.

**Определение 1.4.7.** ***Числовой осью*** *будем называть прямую, на которой заданы*

*а) точка O, называемая* ***началом отсчета*** *или* ***началом координат****;*

*б) направление;*

*в) отрезок единичной длины.*

Теперь каждому вещественному числу $a$ сопоставим точку $M$ на числовой прямой таким образом, чтобы

*а) числу 0 соответствовало начало координат;*

*б)* $|OM| = |a|$ *- длина отрезка от начала координат до точки M равнялась модулю числа;*

*в) если $a$ - положительно, то точка берется на положительном луче и, если оно отрицательно, то – на отрицательном.*

Это правило устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством вещественных чисел и множеством точек на прямой.

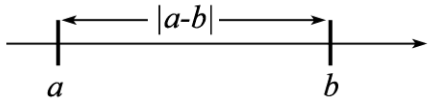
Числовую прямую (ось) будем также называть ***вещественной прямой*** (***осью***).

Отсюда также следует геометрический смысл модуля вещественного числа: *модуль числа равен расстоянию от начала координат до точки, изображающей это число на числовой оси*.

Теперь мы можем дать геометрическую интерпретацию свойствам 6 и 7 модуля вещественного числа. При положительном $C$ числа $x$, удовлетворяющие свойству 6, заполняют промежуток $(-C, C)$, а числа $x$, удовлетворяющие свойству 7, лежат на лучах $(-\infty, C)$ или $(C, +\infty)$.

Отметим еще одно замечательное геометрическое свойство модуля вещественного числа.

*Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками, соответствующими этим числам на вещественной оси.*




Далее приведем обозначения, которые применяются для записи некоторых стандартных числовых множеств.

$\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ - множество целых чисел;

$\mathbb{Q}$ - множество рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ - множество вещественных чисел;

$\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{R}_+$ - множества, соответственно, целых, рациональных и вещественных неотрицательных чисел;

$\mathbb{C}$ - множество комплексных чисел.

Кроме того, множество вещественных чисел обозначается как $(-\infty, +\infty)$. Подмножества этого множества:

$(a,b) = \{x \mid x \in R, a < x < b\}$ - ***интервал***;

$[a,b] = \{x \mid x \in R, a \le x \le b\}$ - ***отрезок***;

$(a,b] = \{x \mid x \in R, a < x \le b\}$ или $[a,b) = \{x \mid x \in R, a \le x < b\}$ - ***полуинтервалы*** или ***полуотрезки***;

$(a,+\infty) = \{x \mid x \in R, a < x\}$ или $(-\infty,b) = \{x \mid x \in R, x < b\}$ - ***открытые лучи***;

$[a,+\infty) = \{x \mid x \in R, a \le x\}$ или $(-\infty,b] = \{x \mid x \in R, x \le b\}$ - ***замкнутые лучи***.

Наконец, иногда нам будут нужны промежутки, у которых нам не будет важно, принадлежат его концы этому промежутку или нет. Такой промежуток будем обозначать $\langle a,b \rangle$.

## § 5 Ограниченность числовых множеств

**Определение 1.5.1.** *Числовое множество $X$ называется **ограниченным сверху**, если существует число $M$ такое, что $x \le M$ для всякого элемента $x$ из множества $X$.*

**Определение 1.5.2.** *Числовое множество $X$ называется **ограниченным снизу**, если существует число $m$ такое, что $x \ge m$ для всякого элемента $x$ из множества $X$.*

**Определение 1.5.3.** *Числовое множество $X$ называется **ограниченным**, если оно ограничено сверху и снизу.*

В символической записи эти определения будут выглядеть следующим образом:

множество $X$ ограничено сверху, если $\exists M \quad \forall x \in X: \quad x \le M$,

ограничено снизу, если $\exists m \ \forall x \in X \quad : x \ge m$ и

ограничено, если $\exists m, \ M \quad \forall x \in X \quad : m \le x \le M$.

*Пустое множество будем считать ограниченным по определению.*

**Теорема 1.5.1.** *Числовое множество $X$ ограничено тогда и только тогда, когда существует число $C$ такое, что для всех элементов $x$ из этого множества выполняется неравенство $|x| \le C$.*

► Пусть множество $X$ ограничено. Положим $C = \max(|m|,|M|)$ - наибольшее из чисел $|m|$ и $|M|$. Тогда, используя свойства модуля вещественных чисел, получим неравенства $x \le M \le |M| \le C$ и $x \ge m \ge -|m| \ge -C$, откуда следует, что $|x| \le C$.

Обратно, если выполняется неравенство $|x| \le C$, то $-C \le x \le C$. Это и есть требуемое, если положить $M = C$ и $m = -C$.◄

Число $M$, ограничивающее множество $X$ сверху, называется ***верхней границей множества***. Если $M$ - верхняя граница множества $X$, то любое число $M'$, которое больше $M$, тоже будет верхней границей этого множества. Таким образом, мы можем говорить о множестве верхних границ множества $X$. Обозначим множество верхних границ через $\mathfrak{M}$. Тогда, $\forall x \in X$ и $\forall M \in \mathfrak{M}$ будет выполнено неравенство $x \le M$, следовательно, по аксиоме непрерывности существует число $M_0$ такое, что $x \le M_0 \le M$. Это число называется ***точной верхней границей*** числового множества $X$ или ***верхней гранью*** этого множества или ***супремумом*** множества $X$ и обозначается $M_0 = \sup X$.

Таким образом, мы доказали, что каждое непустое числовое множество, ограниченное сверху, всегда имеет точную верхнюю границу.

Очевидно, что равенство $M_0 = \sup X$ равносильно двум условиям:

1) $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \le M_0$, т.е. $M_0$ - верхняя граница множества $X$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in X$ так, что выполняется неравенство $x_\varepsilon > M_0 - \varepsilon$, т.е. эту границу нельзя улучшить (уменьшить).

**Пример 1.** Рассмотрим множество $X = \left\{1 - \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Докажем, что $\sup X = 1$.

☺Действительно, во-первых, неравенство $1 - \dfrac{1}{n} < 1$ выполняется для любого $n \in \mathbb{N}$; во-вторых, если взять произвольное положительное число $\varepsilon$, то по принципу Архимеда можно найти натуральное число $n_\varepsilon$, такое что $n_\varepsilon > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда будет выполнено неравенство $1 - \dfrac{1}{n_\varepsilon} > 1 - \varepsilon$, т.е. нашелся элемент $x_{n_\varepsilon}$ множества $X$, больший чем $1 - \varepsilon$, что означает, что 1 – наименьшая верхняя граница. ☻

Аналогично, можно доказать, что если множество ограничено снизу, то оно имеет ***точную нижнюю границу***, которая называется также ***нижней гранью*** или ***инфимумом*** множества $X$ и обозначается $\inf X$.

Равенство $m_0 = \inf X$ равносильно условиям:

1) $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geq m_0$;

2) $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_\varepsilon \in X$ так, что выполняется неравенство $x_\varepsilon < m_0 + \varepsilon$.

Если в множестве $X$ есть наибольший элемент $x_0$, то будем называть его ***максимальным элементом*** множества $X$ и обозначать $x_0 = \max X$. Тогда $\sup X = x_0$. Аналогично, если в множестве существует наименьший элемент, то его будем называть ***минимальным***, обозначать $\min X$ и он будет являться инфимумом множества $X$.

Например, множество натуральных чисел имеет наименьший элемент – единицу, который одновременно является и инфимумом множества $\mathbb{N}$. Супремума это множество не имеет, так как оно не является ограниченным сверху.

Определения точных верхней и нижней границ можно распространить на множества, неограниченные сверху или снизу, полагая, $\sup X = +\infty$ или, соответственно, $\inf X = -\infty$.

В заключение сформулируем несколько свойств верхних и нижних граней.

**Свойство 1.** *Пусть $X$ - некоторое числовое множество. Обозначим через $-X$ множество $\{-x \mid x \in X\}$. Тогда $\sup(-X) = -\inf X$ и $\inf(-X) = -\sup X$.*

**Свойство 2.** *Пусть $X$ - некоторое числовое множество $\lambda$ - вещественное число. Обозначим через $\lambda X$ множество $\{\lambda x \mid x \in X\}$. Тогда если $\lambda \geq 0$, то $\sup(\lambda X) = \lambda \sup X$, $\inf(\lambda X) = \lambda \inf X$ и, если $\lambda < 0$, то $\sup(\lambda X) = \lambda \inf X$, $\inf(\lambda X) = \lambda \sup X$.*

**Свойство 3.** *Пусть $X_1$ и $X_2$ - числовые множества. Обозначим через $X_1 + X_2$ множество $\{x_1 + x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$ и через $X_1 - X_2$ множество*

$\{x_1 - x_2 \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$. *Тогда* $\sup(X_1 + X_2) = \sup X_1 + \sup X_2$, $\inf(X_1 + X_2) = \inf X_1 + \inf X_2$, $\sup(X_1 - X_2) = \sup X_1 - \inf X_2$ *и* $\inf(X_1 - X_2) = \inf X_1 - \sup X_2$.

**Свойство 4.** *Пусть $X_1$ и $X_2$ - числовые множества, все элементы которых неотрицательны. Тогда*

$$\sup(X_1 X_2) = \sup X_1 \cdot \sup X_2, \quad \inf(X_1 X_2) = \inf X_1 \cdot \inf X_2.$$

Докажем, например, первое равенство в свойстве 3.

►Пусть $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2$ и $x = x_1 + x_2$. Тогда $x_1 \le \sup X_1$, $x_2 \le \sup X_2$ и $x \le \sup X_1 + \sup X_2$, откуда $\sup(X_1 + X_2) \le \sup X_1 + \sup X_2$.

Чтобы доказать противоположное неравенство, возьмем число $y < \sup X_1 + \sup X_2$. Тогда можно найти элементы $x_1^* \in X_1$ и $x_2^* \in X_2$ такие, что $x_1^* < \sup X_1$ и $x_2^* < \sup X_2$, и выполняется неравенство $y < x_1^* + x_2^* < \sup X_1 + \sup X_2$. Это означает, что существует элемент $x^* = x_1^* + x_2^* \in X_1 + X_2$, который больше числа $y$ и $\sup X_1 + \sup X_2 = \sup(X_1 + X_2)$.◄

Доказательства остальных свойств проводятся аналогично и предоставляются читателю.

## § 6 Счетные и несчетные множества

**Определение 1.6.1.** *Рассмотрим множество первых $n$ натуральных чисел $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ и некоторое множество $A$. Если можно установить взаимно-однозначное соответствие между $A$ и $\mathbb{N}_n$, то множество $A$ будем называть* ***конечным***.

**Определение 1.6.2.** *Пусть дано некоторое множество $A$. Если можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством $A$ и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, то множество $A$ будем называть* ***счетным***.

**Определение 1.6.3.** *Если множество $A$ конечно или счетно, то будем говорить, что оно* ***не более чем счетно***.

Таким образом, множество будет счетно, если его элементы можно расположить в виде последовательности.

**Пример 1.** Множество четных чисел – счетное, так как отображение $n \leftrightarrow 2n$ является взаимно однозначным соответствием между множеством натуральных чисел и множеством четных чисел.

Очевидно, такое соответствие можно установить не единственным образом. Например, можно установить соответствие между множеством $\mathbb{N}$ и множеством $\mathbb{Z}$ (целых чисел), установив соответствие таким способом

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots.. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\ldots.., \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2\ldots.. \end{array}$$

или таким способом

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\ldots.. \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\ldots.. , \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -2\ldots.. \end{array}$$

или можно придумать еще множество способов.

Можно сказать, что множество будет счетным, если все его элементы можно расположить в виде последовательности, все элементы которой различны.

**Свойства счетных множеств**

**Свойство 1.** *Подмножество счетного множества не более чем счетно.*

►Пусть множество $A$ - счетно и $B \subset A$. Если $B$ - конечное множество, то свойство доказано. Рассмотрим случай, когда $B$ - бесконечно. Расположим элементы множества $A$ в виде последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$. Пусть $n_1$ - наименьший номер того члена этой последовательности, который принадлежит $B$. Обозначим $b_1 = a_{n_1}$. Далее, пусть $n_2$ - наименьший номер этой же последовательности, удовлетворяющий неравенству $n > n_1$ и такой что $a_{n_2} \in B$ и обозначим $b_2 = a_{n_2}$. Так как каждый элемент множества $B$ содержится в последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$, то через некоторое число шагов он получит номер и так как число элементов множества $B$ бесконечно, то каждому натуральному числу будет сопоставлен некоторый элемент множества $B$. Таким образом, будет установлено взаимно однозначное соответствие между множеством $B$ и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$.◄

**Свойство 2.** *Объединение не более чем счетного множества не более чем счетных множеств не более чем счетно.*

►Пусть дана последовательность множеств $\{A_n\}$, элементы каждого из которых можно расположить в виде последовательности. Расположим элементы этих множеств в виде таблицы, в *n*-ой строчке которой выпишем элементы множества $A_n$:

$$\begin{array}{llll} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14}\cdots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24}\cdots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34}\cdots \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44}\cdots \\ \ldots\ldots & & & \end{array}$$

Теорема будет доказана, если будет указан способ, с помощью которого все элементы этой таблицы могут быть расположены в виде единой последовательности. Это можно сделать, выписывая элементы таблицы, например, по диагоналям: $x_{11}\ x_{21}\ x_{12}\ x_{31}\ x_{22}\ x_{13}\ldots$. Очевидно, что перечисляя элементы таблицы таким образом, мы сопоставим каждый ее элемент некоторому натуральному числу, то есть запишем элементы этой таблицы в виде последовательности. (Если число строк этой таблицы или какие либо ее строки конечны, дополним эту таблицу до бесконечной какими-либо символами, например, нулевыми элементами.)

Отсюда следует, что множество этих элементов счетно. Чтобы получить объединение данных множеств, удалим те элементы данной последовательности, которые встречаются ранее и добавленные нулевые элементы. На основании первого свойства получим не более чем счетное множество.◄

**Свойство 3.** *Пусть $A$ - счетное множество. Для любого натурального числа $n$ введем множество $B_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_k \in A, k = 1, 2, ..., n\}$. Тогда $B_n$ - счетное множество.*

►Данное свойство докажем методом математической индукции по $n$.
База индукции. Множество $B_1 = \{a \mid a \in A\} = A$, поэтому множество $B_1$ счетно.
Индукционная теорема. Пусть при некотором натуральном $m$ множество $B_m$ счетно. Докажем, что множество $B_{m+1}$ также будет счетным.

Запишем элементы множества $B_{m+1}$ в виде $(b, a_{m+1})$, где $b \in B_m$ и $a_{m+1} \in A$. Если зафиксировать элемент $b \in B_m$, то очевидно, что множество $B_{m+1}^b = \{(b, a_{m+1}) \mid a_{m+1} \in A\}$ эквивалентно множеству $A$ и, следовательно, оно счетно. Множество $B_{m+1}$ можно представить как объединение $\bigcup\limits_{b \in B_m} B_{m+1}^b$. По второму свойству счетных множеств оно счетно.◄

**Свойство 4.** *Множество рациональных чисел счетно.*

►Каждое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество дробей такого вида и докажем, что это множество счетно. Действительно, это множество является подмножеством множества $\{(m, n) \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$, которое счетно по предыдущему свойству при $n = 2$. Следовательно, множество рациональных чисел также счетно.◄

Однако существуют бесконечные множества, которые не являются счетными.

**Определение 1.6.4.** *Если $A$ - бесконечное множество такое, что невозможно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел, то $A$ называют* ***несчетным множеством****.*

**Теорема 1.6.1**. *Множество точек отрезка $[a, b]$ несчетно.*

►Предположим, что множество точек этого отрезка счетно. Тогда их можно расположить в виде последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Разобьем промежуток на три равных промежутка и выберем из них тот, который после присоединения к нему концов не содержит точку $x_1$. Обозначим его

$[a_1, b_1]$ и разобьем его на три равные части и выберем ту часть (замкнутый промежуток), которая не содержит $x_2$. (Если эту точку не содержат два или все три промежутка, то выбираем любой из них). Таким образом, получим последовательность замкнутых вложенных промежутков, которая по принципу Кантора должна иметь непустое пересечение. Но, очевидно, что точки этого пересечения не могут совпадать с точками последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, следовательно, существует хотя бы одна точка данного промежутка, не входящая в эту последовательность. Значит, множество этих точек несчетно.◄

**Теорема 1.6.2**. *Множество точек интервала* $(a, b)$ *несчетно.*

►Если множество точек этого интервала будет счетным, то множество точек промежутка $[a, b]$ можно представить в виде объединения двух множеств: множества точек интервала $(a, b)$, которое счетно по нашему предположению, и множества $\{a, b\}$, которое содержит два элемента. Тогда множество точек промежутка $[a, b]$ также будет счетным, что противоречит теореме 1.◄

**Теорема 1.6.3.** *Множество всех вещественных чисел несчетно.*

►Воспользуемся результатом теоремы 2. Множество точек интервала $(-1, 1)$ несчетно. Между точками этого интервала и точками числовой прямой можно установить взаимно однозначное соответствие, например, по формуле $x = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, $t \in (-1, 1)$. (Докажите это.) Следовательно, множество точек числовой прямой также несчетно.◄

**Упражнения**

1. Докажите, что каждое бесконечное множество имеет счетное подмножество.
2. Докажите, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.
3. Докажите, что множество многочленов степени не выше $n$ с рациональными коэффициентами счетно.
4. Докажите, что множество всех многочленов с целыми коэффициентами счетно.
5. Докажите, что множество всех последовательностей, элементами которых являются числа 0 и 1, несчетно.
6. Докажите, что на каждом интервале существует иррациональное число.

## §7 Понятие о метрическом пространстве

### 7.1. Два замечательных неравенства

**Неравенство Коши-Буняковского**

*Для любых наборов вещественных чисел* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *и* $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ *выполняется неравенство*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

►Рассмотрим выражение $\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2$. Очевидно, что при любом значении переменной $t$ значение этого выражения будет неотрицательно. С другой стороны это выражение представляет собой квадратный трехчлен относительно переменной $t$: $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ с положительным коэффициентом при $t^2$. Следовательно, дискриминант этого квадратного трехчлена должен быть неположительным, то есть $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \le 0$, откуда получим нужное неравенство.◄

Равенство в данном неравенстве означает, что дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, а это, в свою очередь, означает, что квадратный трехчлен имеет единственный корень. Из определения функции $\varphi(t)$ следует, что этот корень существует тогда и только тогда, когда все слагаемые в выражении $\varphi(t)$ могут одновременно обращаться в нуль, то есть когда существует значение $\tilde{t}$, для которого при любом $i$ верны равенства $\frac{b_i}{a_i} = \tilde{t}$. Найденные соотношения означают, что неравенство превращается в равенство, если числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ и $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ пропорциональны: $b_i = \tilde{t} a_i$ для любого значения $i$.

**Замечание.** *Так как* $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|$, *то будет выполняться и неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

**Неравенство Минковского**

*Для любых наборов вещественных чисел* $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ *и* $b_1, b_2, b_3, ..., b_n$ *выполняется неравенство*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} .$$

►Используя замечание к неравенству Коши-Буняковского, получим

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \le \sum_{i=1}^{n}a_i^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2} =$$

$$= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2$$

Нужное неравенство получится, если из каждой части доказанного неравенства извлечь квадратный корень. Очевидно, что равенство достигается, если $b_i = \tilde{t}a_i$ для любого значения $i$ .◄

## 7.2. Определение метрического пространства

**Определение 1.7.1.** *Множество* $X$ *будем называть* ***метрическим пространством****, если для любых двух его элементов* $x$ *и* $y$ *определено неотрицательное число* $\rho(x,y)$*, обладающее свойствами:*

1. $\rho(x,y)=0$ *тогда и только тогда, когда* $x=y$ *;* ***(аксиома тождества)***
2. *для любых элементов* $x,y \in X$ *выполнено равенство* $\rho(x,y)=\rho(y,x)$*;* ***(аксиома симметрии)***
3. *для любых элементов* $x,y,z \in X$ *выполнено неравенство* $\rho(x,y) \le \rho(x,z)+\rho(z,y)$ ***(аксиома треугольника)****.*

Если на некотором множестве $X$ задано отображение $\rho:(x,y) \to \rho(x,y) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее аксиомам 1 – 3, то говорят, что на множестве $X$ введена ***метрика*** и число $\rho(x,y)$ называют ***расстоянием*** между элементами $x$ и $y$.

**Примеры метрических пространств**

**Пример 1.** $X=(-\infty,+\infty)$. Введем расстояние по формуле $\rho(x,y)=|x-y|$. Докажем, что $X$ – метрическое пространство.

☺ Аксиомы 1 – 3 метрического пространства выполнены, причем доказательство требуется только для аксиомы треугольника. Возьмем три числа $x$, $y$ и $z$, и обозначим $x-z=a$ и $z-y=b$. Тогда $x-y=a+b$.

Запишем неравенство треугольника для модуля вещественного числа: $|a+b| \le |a| + |b|$ и подставим значения $a$ и $b$. Получим требуемое неравенство $|x-y| \le |x-z| + |z-y|$. ☻

Это пространство будем называть ***одномерным евклидовым пространством*** и обозначать $\mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^1$.

Взяв одно и то же множество $X$ и задавая различные метрики, можно получать различные метрические пространства.

**Пример 2.** $X = (-\infty, +\infty)$, $\rho(x,y) = \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$.

☺ Первые две аксиомы метрического пространства очевидно выполнены. Докажем, что $\rho(x,y)$ удовлетворяет неравенству треугольника.

Для этого заметим, что функция $g(t) = \dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ возрастает, если $t \ge 0$. Отсюда следует, что для любых чисел $a$ и $b$ выполнено неравенство $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \dfrac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}$. Дальнейшее рассуждение очевидно:

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \le \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \le \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

Если в полученном неравенстве подставить $a = x - z$ и $b = z - y$, то придем к неравенству треугольника. ☻

**Пример 3.** $X = \left\{ \overline{a} = (a_1, a_2, ..., a_m) \mid a_i \in \mathbb{R}^1, i = 1, 2, ..., m \right\}$, т.е. элементом множества $X$ является упорядоченный набор вещественных чисел, который мы будем обозначать $\overline{a}$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_m)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_m)$ - элементы множества $X$. Определим $\rho(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$.

☺Чтобы доказать неравенство треугольника, нужно в неравенстве Минковского положить $a_i = x_i - z_i$, $b_i = z_i - y_i$, где $(z_1, z_2, ..., z_m) = \overline{z}$. ☻

Метрика, введенная таким образом, называется ***евклидовой метрикой***, пространство с такой метрикой называется ***m-мерным евклидовым пространством*** и является обобщением хорошо известных из геометрии 2-х или 3-х мерного пространств. Такое пространство будем обозначать $\mathbb{R}^m$. Очевидно, что пространство $\mathbb{R}^1$ является частным случаем пространства $\mathbb{R}^m$. (Докажите это.)

**Замечание.** *В определении евклидова пространства имеются некоторые разночтения. В курсе линейной алгебры это понятие будет определено несколько иначе.*

## §8 Точки и множества в метрическом пространстве

Пусть $X$ - метрическое пространство. Введем ряд определений, часто используемых в математическом анализе.

**Определение 1.8.1**. ***Открытым шаром*** *в метрическом пространстве* $X$ *будем называть множество точек* $x \in X$*, удовлетворяющих условию* $\rho(x,a) < r$*, где a - фиксированная точка данного пространства, называемая* ***центром шара****, и r - положительное число, называемое* ***радиусом шара***.

Шар радиуса $r$ с центром в точке $a$ будем обозначать $B_r(a)$ или, если радиус не важен, - $B(a)$, или $B$.

**Определение 1.8.2.** ***Замкнутым шаром*** *будем называть множество точек x метрического пространства* $X$*, удовлетворяющих неравенству* $\rho(x,a) \le r$*, где a и* $r$ *имеют тот же смысл, что и в определении 1.*

Обозначать замкнутый шар будем $\overline{B}_r(a)$.

Очевидно, что в пространстве $\mathbb{R}^1$ открытый шар – это интервал с центром в точке $a$: $(a-r, a+r)$, а замкнутый – это отрезок $[a-r, a+r]$. В пространстве $\mathbb{R}^2$ - это, соответственно, открытый или замкнутый круг на плоскости и т.п.

**Определение 1.8.3.** ***Окрестностью*** *точки a в метрическом пространстве будем называть любой открытый шар с центром в точке a. Радиус этого шара будем называть* ***радиусом окрестности***.

Окрестность будем обозначать $U_r(a)$, или $U(a)$, или $U$.

В этой части курса мы будем часто встречаться с окрестностью точки $a$ радиуса $\varepsilon$ в пространстве $\mathbb{R}$. Это открытый промежуток $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, который мы будем называть ***ε-окрестностью*** *точки a*.

**Определение 1.8.4.** *Множество* $U_r(a) \setminus \{a\}$ *будем называть* ***проколотой окрестностью*** *точки a и обозначать* $\overset{o}{U}_r(a)$.

**Определение 1.8.5.** *Пусть a - точка метрического пространства* $X$ *и* $E$ *- некоторое множество точек пространства* $X$*. Точку a будем называть* ***предельной точкой*** *множества* $E$*, если для любой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}_r(a)$ *точки a можно найти элемент* $x \in E$ *такой, что* $x \in \overset{o}{U}_r(a)$.

**Пример 1.** Докажите, что каждое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел.

☺Пусть $\alpha$ - заданное вещественное число. Возьмем $U_r(\alpha)$ - какую-нибудь окрестность этой точки. Тогда по доказанному в 4.5 пример 2 на промежутке $(\alpha - r, \alpha)$ найдется хотя бы одно рациональное число. ☻

**Определение 1.8.6.** *Точка $a \in E$ называется* ***изолированной точкой*** *множества $E$, если существует проколотая окрестность этой точки $\overset{o}{U}_r(a)$, не содержащая ни одной точки из $E$.*

**Определение 1.8.7.** *Точка $a \in E$ называется* ***внутренней точкой*** *множества $E$, если существует окрестность этой точки, целиком входящая в множество $E$.*

Ясно, что каждая внутренняя точка является предельной и принадлежит данному множеству, но могут существовать предельные точки, не принадлежащие этому множеству. Например, если $X = \mathbb{R}^1$ и $E = (a,b)$, то каждая точка интервала $E$ является внутренней и предельной, и принадлежит множеству $E$. Точки $a$ и $b$ являются предельными, но не принадлежат интервалу.

**Определение 1.8.8.** *Множество $E$ называется* ***открытым****, если все его точки внутренние.*

Пустое множество открыто по определению. Множество $X$ всех элементов пространства открыто.

**Определение 1.8.9.** *Множество $E$ называется* ***замкнутым****, если оно содержит все свои предельные точки.*

**Определение 1.8.10.** *Множество всех внутренних точек множества $E$ называется* ***внутренностью*** *множества $E$ и обозначается $\operatorname{int} E$.*

**Определение 1.8.11.** *Объединение множества $E$ и множества всех его предельных точек называется* ***замыканием*** *множества $E$.*

Замыкание множества $E$ будем обозначать $\overline{E}$. Очевидно, что замыкание каждого множества является замкнутым множеством.

**Определение 1.8.12.** *Точка a, в каждой окрестности которой имеются точки, принадлежащие $E$, и точки, не принадлежащие $E$,* ***называется граничной точкой*** *множества $E$.*

Множество граничных точек будем называть ***границей множества*** $E$ и обозначать $\partial E$.

Граничная точка может принадлежать множеству и может ему не принадлежать.

**Определение 1.8.13.** *Множество $E$ называется* ***ограниченным****, если существует шар $B_r(a)$, который содержит множество $E$.*

**Упражнение.** Доказать, что, если множество $E \subset R^m$ ограничено, то существует шар $B_r(O)$ с центром в точке $O(0,0,...,0)$ такой, что $E \subset B_r(O)$.

**Теорема 1.8.1.** *Открытый шар есть открытое множество.*

►Рассмотрим шар $B_r(\overline{a}) = \{\overline{x} \mid \rho(\overline{x},\overline{a}) < r\}$. Возьмем произвольную точку этого шара $\overline{x}_0$ и докажем, что она является внутренней для этого шара, т.е. что существует шар (окрестность точки $\overline{x}_0$), целиком входящий в данный шар.

Обозначим через $d = \rho(\overline{x}_0,\overline{a})$ - расстояние от точки $\overline{x}_0$ до центра данного шара $\overline{a}$ и рассмотрим $B_{r_1}(\overline{x}_0)$ - шар с центром в точке $\overline{x}_0$ радиуса $r_1 = r - d$. Для произвольной точки этого шара $\overline{x}_1$ выполнено неравенство

$\rho(\overline{x}_1,\overline{a}) \le \rho(\overline{x}_1,\overline{x}_0)+\rho(\overline{x}_0,\overline{a}) < r_1+d=r-d+d=r$, которое означает, что взятая точка $\overline{x}_1$ входит в данный шар $B_r(\overline{a})$, что и требовалось доказать.◄

**Теорема 1.8.2.** *Множество $E$ открыто тогда и только тогда, когда его дополнение $E^d$ до всего пространства замкнуто.*

►Пусть множество $E$ открыто, и точка $a$ является предельной точкой множества $E^d$. Если предположить, что эта точка не принадлежит множеству $E^d$, то эта точка должна принадлежать множеству $E$, следовательно, она должна являться внутренней точкой множества $E$. Но тогда существует окрестность точки $a$, не имеющая ни одной общей точки с множеством $E^d$, что противоречит тому, что $a$ - предельная точка этого множества.

Обратно, если множество $E^d$ - замкнуто, то никакая точка множества $E$ не может быть предельной для $E^d$. Значит, если взять произвольную точку множества $E$, то можно найти окрестность этой точки, непересекающуюся с множеством $E^d$, т.е. целиком лежащую в $E$, следовательно, эта точка будет внутренней точкой множества $E$ и это множество открыто.◄

**Следствие 1**. *Множество $E$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $E^d$ открыто.*
**Следствие 2.** *Множество $X$ всех элементов пространства замкнуто.*
**Следствие 3.** *Пустое множество замкнуто.*
**Замечание**. Пустое множество и множество $X$ всех элементов пространства являются одновременно и открытыми и замкнутыми.

**Теорема 1.8.3.** *Объединение произвольного числа открытых множеств открыто. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.*

►Пусть $\Lambda$ - некоторое произвольное множество и каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ соответствует множество $G_\lambda$, которое является открытым. Докажем, что $G=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ тоже открыто.

Пусть $a \in G$. Тогда точка $a$ принадлежит хотя бы одному из множеств $G_\lambda$, а так как это множество открыто, то существует окрестность точки $a$, целиком входящая в $G_\lambda$, и, следовательно, входящая в объединение $G$. Это означает, что $a$ является внутренней точкой множества $G$ и оно открыто.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Пусть дан конечный набор открытых множеств $\{G_k\}_{k=1}^{k=n}$. Докажем, что их пересечение $G=\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ открыто.

Пусть $a \in G$. Тогда $a \in G_k$ для каждого $k=1,...,n$. Так как каждое множество $G_k$ открыто, то для каждого значения $k$ найдется окрестность $U_{r_k}(a)$, входящая в множество $G_k$. Из радиусов этих окрестностей $r_1,r_2,...,r_n$ выберем наименьший. Обозначим его через $r$. Тогда, очевидно, что $U_r(a) \subset U_{r_k}(a) \subset G_k$

для любого $k=1,...,n$, следовательно, окрестность $U_r(a)$ целиком входит в пересечение $G$ и точка $a$ - внутренняя.◄

**Следствие.** *Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто. Пересечение произвольного числа замкнутых множеств замкнуто.*

Это следует из теоремы 1.8.2 и свойств дополнений: $\left(\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right)^d = \bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^d$ и $\left(\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda\right)^d = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda^d$.

**Замечание.** Нетрудно показать, что пересечение бесконечного числа открытых множеств может быть замкнутым, а объединение бесконечного числа замкнутых множеств – открытым. Например, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)=[1,2]$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1)$.

**Теорема 1.8.4.** *Точка a является предельной точкой множества $E$ тогда и только тогда, когда в любой ее окрестности, содержится бесконечное множество точек множества $E$.*

► В одну сторону утверждение очевидно. Докажем только, что, если точка $a$ является предельной, то в любой ее окрестности находится бесконечно много точек множества.

Возьмем некоторую окрестность точки $a$: $U_r(a)$ и найдем точку, отличную от точки $a$, лежащую в этой окрестности и принадлежащую множеству $E$. Назовем ее $x_1$. Положим $r_1=\rho(x_1,a)$ и рассмотрим окрестность $U_{r_1}(a)$. Очевидно, что $r_1<r$, поэтому $U_{r_1}(a)\subset U_r(a)$. Но в окрестности $U_{r_1}(a)$ тоже найдется точка $x_2$, отличная от точки $a$ и принадлежащая множеству $E$. Очевидно, она принадлежит первоначальной окрестности $U_r(a)$.

Продолжая этот процесс до бесконечности получим бесконечный набор точек $x_1,x_2,x_3,\ldots\in E$.◄

**Следствие.** *Конечное множество точек не содержит ни одной предельной точки.*

**Теорема 1.8.5.** *Пусть $E$ - ограниченное сверху, замкнутое множество вещественных чисел и* $\sup E=b$. *Тогда* $b\in E$.

►Если $b=\sup E$, то, взяв произвольное число $\varepsilon>0$, можно найти точку $x_\varepsilon\in E$, которая будет удовлетворять неравенству $b-\varepsilon<x_\varepsilon\le b$. Тогда, если выполнено равенство $x_\varepsilon=b$ и других точек из $E$, лежащих на промежутке $(b-\varepsilon,b]$, нет, то $b\in E$ и является изолированной точкой этого множества. Если же для любого $\varepsilon>0$ найдется соответствующая точка $x_\varepsilon$, отличная от $b$, то неравенство означает, что $b$ является предельной точкой множества $E$ и $b\in E$ в силу замкнутости $E$.◄

# *ГЛАВА II. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ*

## §1 Последовательность точек метрического пространства. Предел последовательности

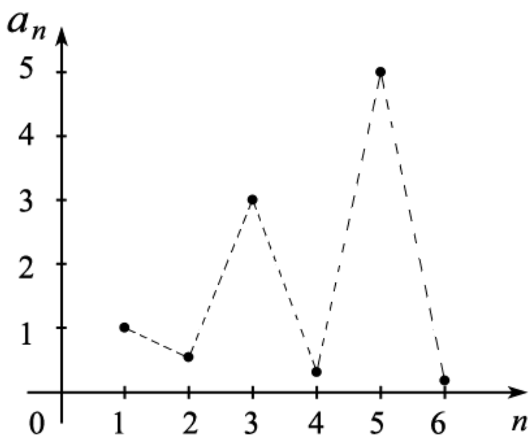
### 1.1. Основные определения. Способы задания

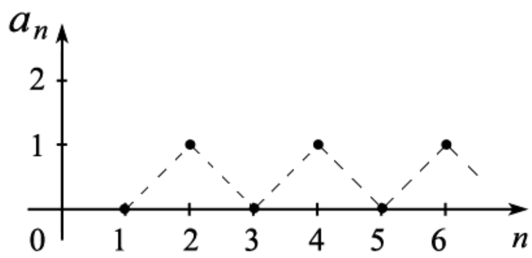
Как уже говорилось в п. 3.5 гл.1, ***последовательностью*** называется отображение множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в произвольное множество $Y$. Если $Y=\mathbb{R}$, то это отображение будем называть ***числовой последовательностью***. Член последовательности, соответствующий произвольному натуральному числу *n*, будем называть ***общим членом последовательности*** и обозначать $a_n$. Числовую последовательность можно изображать точками на числовой оси или точками координатной плоскости с координатами $\left(n,a_n\right)$.

Существует два основных способа задания числовой последовательности.

**1.** Можно задать правило нахождения общего члена $a_n$.

**Пример 1.** $a_n=n^{\left(-1\right)^{n-1}}$. Здесь указана формула, по которой можно найти каждый член последовательности. Если выписать несколько первых членов последовательности, получим $1,\frac{1}{2},3,\frac{1}{4},5,\ldots$. Первые члены последовательности изображены на рисунке.




**Пример 2.** Каждый нечетный член последовательности равен нулю, а каждый четный равен 1. Это последовательность вида $0,1,0,1,\ldots$. Общий член данной последовательности можно задать и формулой: $a_n=\dfrac{1+\left(-1\right)^n}{2}$. Первые члены последовательности изображены на рисунке.

**2.** Можно задать первые члены последовательности и соотношение между несколькими последовательными членами последовательности. Такое задание называется ***рекуррентным***, а соотношение между последовательными членами последовательности называется ***рекуррентным соотношением***.

**Пример 3.** ***Арифметическая прогрессия***. Задается первый член последовательности и некоторое число $d$, которое называется ***разностью*** прогрессии. Рекуррентное соотношение $a_{n+1}=a_n+d$. Эта последовательность хорошо изучена в курсе школьной математики, и мы не будем заниматься ею подробно. Напомним только формулу общего члена $a_n = a_1 + d(n-1)$.

**Пример 4.** ***Геометрическая прогрессия***. Также задается первый член и некоторое число $q$, отличное от нуля, которое называется ***знаменателем*** прогрессии. Рекуррентное соотношение $a_{n+1} = a_n \cdot q$. Формула общего члена $a_n = a_1 q^{n-1}$.

**Пример 5.** ***Последовательность Фибоначчи***. Заданы два первых члена последовательности и рекуррентное соотношение: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

☺Выведем формулу общего члена последовательности Фибоначчи. Сначала найдем последовательность $b_n$, общий член которой имеет вид $b_n = \lambda^n$, $\lambda \neq 0$, и который удовлетворяет данному рекуррентному соотношению. Подставив $b_n$ в это соотношение, получим $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$. Так как $\lambda \neq 0$, то отсюда получим уравнение $\lambda^2 = \lambda + 1$, из которого $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Таким образом, данному рекуррентному соотношению удовлетворяют две последовательности

$$b_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \text{ и } b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Очевидно, что их линейная комбинация

$$C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

тоже будет удовлетворять рекуррентному соотношению при любых значениях коэффициентов $C_1$ и $C_2$. Последовательность $a_n$ будем искать в виде

$$a_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

где коэффициенты $C_1$ и $C_2$ выберем так, чтобы $a_1$ и $a_2$ были равны заданным числам. Для этого $C_1$ и $C_2$ должны удовлетворять системе уравнений

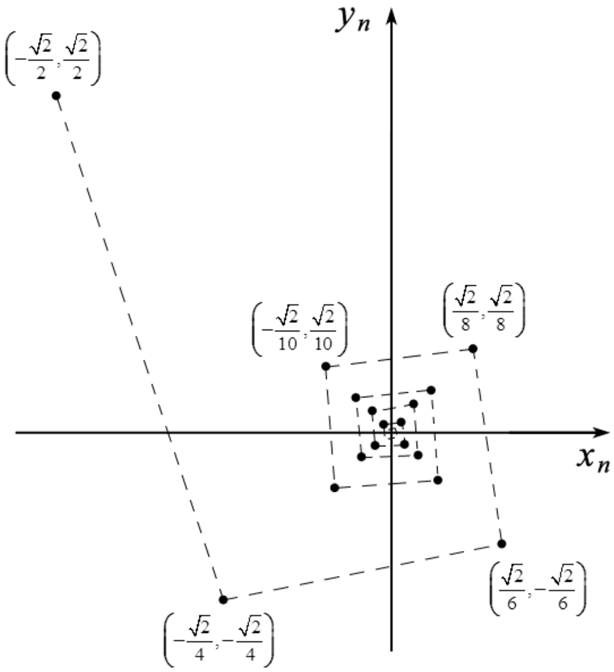
$$\begin{cases} a_1 = C_1\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \\ a_2 = C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2, \end{cases}$$

решая которую, получим

$$C_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}a_1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}a_2 \text{ и } C_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}a_2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}a_1. ☻$$

Можно рассматривать последовательности, которые являются отображениями множества $\mathbb{N}$ в произвольное метрическое пространство. Тогда мы будем говорить, что у нас имеется последовательность точек метрического пространства.

**Пример 6.** Пусть $Y = \mathbb{R}^2$ и каждому натуральному числу $n$ соответствует точка плоскости с координатами $x_n = \frac{1}{n}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$, $y_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}\right)$. Тогда на плоскости получим последовательность точек, изображенных на рисунке:




## 1.2. Предел последовательности в метрическом пространстве

**Определение 2.1.1.** *Пусть дана последовательность точек в метрическом пространстве* $\{x_n\}_{n=1}^{n=\infty}$. *Точку $A$ этого же метрического пространства будем называть* ***пределом*** *данной последовательности, если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое натуральное число* $n_0$, *что для всех членов последовательности с номерами* $n \ge n_0$ *будет выполняться неравенство* $\rho(x_n, A) < \varepsilon$.

Так как неравенство $\rho(x_n, A) < \varepsilon$ определяет окрестность точки $A$ радиуса $\varepsilon$, то данное определение можно переложить на геометрический язык:

**Определение 2.1.1(a)**. *Точку $A$ метрического пространства будем называть* ***пределом*** *последовательности точек* $\{x_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно найти такое натуральное число* $n_0$, *что все члены последовательности с номерами* $n \ge n_0$ *будут лежать в* $U_\varepsilon(A)$- *ε-окрестности точки A.*

Если метрическое пространство - $\mathbb{R}$, т.е. рассматривается числовая последовательность, то пределом ее будет число и, вспомнив, как вводится метрика в $\mathbb{R}$, определение можно сформулировать несколько проще:

**Определение 2.1.1(б)**. *Число $A$ будем называть* ***пределом*** *числовой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{n=\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого все члены последовательности будут удовлетворять неравенству $|x_n - A| < \varepsilon$.*

Тот факт, что $A$ является пределом последовательности $\{x_n\}$, обычно обозначается так:

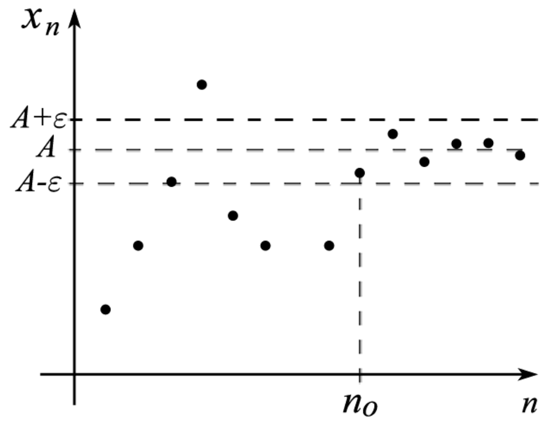
$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{или} \quad x_n \underset{n\to\infty}{\to} A.$$

Последовательность, имеющая предел, называется ***сходящейся***, а не имеющая предела - ***расходящейся***.

Приведенное выше определение предела последовательности может быть записано с помощью логических символов следующим образом:

$$A = \lim_{n\to\infty} x_n \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \rho(x_n, A) < \varepsilon.$$

Для числовой последовательности неравенство $\rho(x_n, A) < \varepsilon$ означает, что числа $x_n$, которые удовлетворяют этому неравенству, лежат в промежутке $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$. Поэтому число $A$ будет пределом числовой последовательности, если все ее члены, начиная с некоторого номера, будут лежать на промежутке $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$.




**Замечание 1.** *Для любого $\varepsilon$ внутри интервала $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ содержится бесконечное множество точек с координатами $x_n$, а вне его - конечное множество таких точек.*

**Замечание 2.** *Используя определение предела последовательности нетрудно показать, что добавление или отбрасывание конечного числа членов последовательности не влияют на ее сходимость.*

**Пример 7.** $x_n = C$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

☺Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Очевидно, неравенство $|C - C| < \varepsilon$ выполнено, а это означает, что неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$ верно при $n \geq 1$ и условие, сформулированное в определении предела выполнено с $n_0 = 1$.☻

**Замечание 3.** *Последовательность, все члены которой совпадают, называется* ***стационарной****. Мы доказали, что предел стационарной последовательности равен общему члену этой последовательности.*

**Пример 8.** Пусть $x_n = \dfrac{1}{n}$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

☺Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Докажем, что существует номер $n_0$, начиная с которого члены последовательности будут удовлетворять неравенству $|x_n - A| < \varepsilon$, т.е. неравенству $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Для этого достаточно решить последнее неравенство относительно $n$: $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Отсюда следует, что, если положить $n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (здесь за $[x]$ обозначена целая часть числа $x$), то для всех номеров $n$, для которых выполнено неравенство $n \geq n_0$, члены последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ будут удовлетворять неравенству $|x_n - 0| < \varepsilon$, что означает, что 0 есть предел данной последовательности. ☻

**Пример 9.** Пусть $x_n = \frac{2n+3}{3n-5}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}$.

☺Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Найдем номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|\frac{2n+3}{3n-5} - \frac{2}{3}\right| < \varepsilon$ или, упрощая его, $\frac{19}{3(3n-5)} < \varepsilon$. (Если считать, что $n \geq 2$, то дробь $\frac{19}{3(3n-5)}$ - положительна, и знак модуля можно убрать.) Тогда, решая последнее неравенство, получим $n > \frac{19}{9\varepsilon} + \frac{5}{3}$ и в качестве $n_0$ можно взять $\left[\frac{19}{9\varepsilon} + \frac{5}{3}\right] + 1$. ☻

**Пример 10.** Пусть $x_n = a^n$, $|a| < 1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

☺Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Найдем номер $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $|a^n| < \varepsilon$. Решая это неравенство, получим $|a|^n < \varepsilon$ или $n \lg|a| < \lg\varepsilon$, откуда $n > \frac{\lg\varepsilon}{\lg|a|}$ ($\lg|a| < 0$). Полагая $n_0 = \left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg|a|}\right] + 1$, получим требуемое. ☻

**Пример 11.** Пусть $x_n = \frac{2+(-1)^n 3}{n}$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

☺Пусть $\varepsilon$ - произвольное положительное число. Найдем номер $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $\left|\frac{2+(-1)^n 3}{n}\right| < \varepsilon$. Решить такое неравенство точно довольно трудно и в этом нет необходимости. Нам нужно только найти такое значение $n_0$, чтобы неравенство $\left|\frac{2+(-1)^n 3}{n}\right| < \varepsilon$ было следствием из неравенства $n \geq n_0$. Для этого сначала напишем очевидную оценку $\left|\dfrac{2+(-1)^n 3}{n}\right| \leq \dfrac{5}{n}$, а затем найдем $n_0$ так, чтобы при $n \geq n_0$ выполнялось неравенство $\dfrac{5}{n} < \varepsilon$. Очевидно, что можно взять $n_0 = \left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right] + 1$. Тогда, если $n \geq n_0$, то $\dfrac{5}{n} < \varepsilon$, и, следовательно, $\left|\dfrac{2+(-1)^n 3}{n}\right| < \varepsilon$. ☻

**Пример 12.** Пусть $x_n = \dfrac{2+(-1)^n 3}{2}$. Доказать, что предела не существует.

☺Сформулируем, отрицание определения предела последовательности. *Число $A$* ***не является пределом*** *данной последовательности, если можно найти $\varepsilon_0 > 0$ такое, что какое бы натуральное число $n_0$ мы ни взяли, можно найти $n \geq n_0$, при котором $\rho(x_n, A) \geq \varepsilon_0$.*

Проверим, что какое бы число $A$ мы ни взяли, для данной последовательности сформулированное условие выполняется.

Последовательность имеет два значения: $-\dfrac{1}{2}$ при нечетных $n$ и $\dfrac{5}{2}$ при четных. Если взять в качестве $a$ произвольное число, отличное от этих двух значений, то в окрестность радиуса $\varepsilon_0 = \min\left(\left|A+\dfrac{1}{2}\right|, \left|A-\dfrac{5}{2}\right|\right)$ не попадет ни один член последовательности. Следовательно, такое число $A$ не может быть пределом. Если взять $A = -\dfrac{1}{2}$ и положить $\varepsilon_0 = 1$ (можно взять любое число, не превосходящее трех - расстояния между точками $-\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{5}{2}$), то в эту окрестность не попадет ни один член последовательности с четным номером, и, следовательно, нет такого номера, начиная с которого, в окрестность попадут <u>все</u> члены последовательности. Аналогично, если предположить $A = \dfrac{5}{2}$. ☻

### 1.3. Бесконечно малые последовательности. Критерий существования предела числовой последовательности

**Определение 2.1.2.** *Пусть $X$ - линейное нормированное пространство.Тогда последовательность, пределом которой является нулевой элемент, будем называть* ***бесконечно малой последовательностью*** *или просто* ***бесконечно малой****.*

Таким образом, в пространстве $\mathbb{R}$ последовательность $\{\alpha_n\}$ будет бесконечно малой, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

В предыдущем пункте мы доказали, что последовательности $x_n = \frac{1}{n}$ и $x_n = a^n$ $\left(|a| < 1\right)$ - бесконечно малые.

С помощью бесконечно малых можно сформулировать очень простой и удобный критерий того, что число $A$ будет пределом последовательности $\{x_n\}$:

**Теорема 2.1.1.** *Для того чтобы число $A$ было пределом последовательности $\{x_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы члены последовательности можно было представить в виде $x_n = A + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая.*

►Для доказательства обозначим $x_n - A = \alpha_n$. (Отсюда $x_n = A + \alpha_n$).

Тогда, если $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, что означает, что $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая.

Наоборот, если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, то, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$ или $|x_n - A| < \varepsilon$, что означает, что число $A$ - предел последовательности $\{x_n\}$. ◄

**Пример 13.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n}$.

☺Представим общий член последовательности в виде суммы $x_n = 2 + \frac{1}{n}$. Так как $\frac{1}{n}$ - бесконечно малая, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ☻

### 1.4. Единственность предела сходящейся последовательности

**Теорема 2.1.2.** *Если последовательность сходится, то ее предел единственен.*

►Докажем эту теорему для последовательности в произвольном метрическом пространстве. Доказательство проведем методом от противного.

Пусть для некоторой последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ имеет место $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$. По определению предела это означает, что 1) для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_1$ такой, что, если $n \ge n_1$, то $\rho(x_n, A) < \varepsilon$ и 2) для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_2$ такой, что, если $n \ge n_2$, то $\rho(x_n, B) < \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = \frac{\rho(A,B)}{2}$ и $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

Тогда для $n \ge n_0$ выполняются оба неравенства $\rho(x_n, A) < \varepsilon$ и $\rho(x_n, B) < \varepsilon$, и по неравенству треугольника, для этих же значений $n$ будем иметь $\rho(A,B) \le \rho(A, x_n) + \rho(x_n, B) < 2\varepsilon = \rho(A,B)$. Полученное противоречие доказывает теорему.◄

## 1.5. Ограниченность сходящейся последовательности

**Определение 2.1.3.** *Числовую последовательность будем называть* ***ограниченной сверху****, если множество ее значений ограничено сверху.*

Т.е. числовая последовательность ограничена сверху, если

$$\exists M: \ x_n \le M, \ \ \forall n.$$

**Определение 2.1.4.** *Числовую последовательность будем называть* ***ограниченной снизу****, если множество ее значений ограничено снизу, т.е.*

$$\exists m: \ x_n \ge m, \ \forall n.$$

**Определение 2.1.5.** *Числовую последовательность будем называть* ***ограниченной****, если множество ее значений ограничено сверху и снизу, т.е.*

$$\exists M, m: \ m \le x_n \le M, \ \ \forall n.$$

Последовательность точек метрического пространства будет ограничена, если все ее значения попадают в некоторый шар (см. §8 гл. 1).

**Теорема 2.1.3.** *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда для всякого числа $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого, все члены последовательности удовлетворяют неравенству $\rho(x_n, A) < \varepsilon$. Если взять, например, $\varepsilon = 1$, то все $x_n$ при $n \ge n_0$ попадут в шар с центром в точке $A$ радиуса 1. При этом члены этой последовательности $x_1, x_2, ..., x_{n_0 - 1}$ могут не лежать в этом шаре. Но таких точек конечное число. Поэтому существует $\max\limits_{1 \le i \le n_0 - 1} \rho(x_i, A) = \rho_0$. Тогда все члены последовательности будут удовлетворять неравенству $\rho(x_n, A) \le R$, где $R = \max(1, \rho_0)$, т.е. будут попадать в шар радиуса $R$. ◄

**Замечание.** *Утверждение, обратное данной теореме, неверно.*

**Пример 14.** Последовательность $x_n = (-1)^n$ ограничена, но не имеет предела. (Докажите самостоятельно).

## 1.6. Сходимость последовательности в $\mathbb{R}^m$

**Теорема 2.1.4.** *Последовательность точек* $\overline{x}_n = \left(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_m^{(n)}\right)$ *сходится к точке* $\overline{A} = (A_1, A_2, ... A_m)$ *тогда и только тогда, когда числовые последовательности* $\left\{x_i^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *сходятся к* $A_i$ *для всех значений* $i$ *от 1 до m.*

Таким образом, сходимость в $R^m$ означает покоординатную сходимость.

►Пусть последовательность $\overline{x}_n$ сходится к точке $\overline{A}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$ такой, что если $n \ge n_0$, то выполняется неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(x_i^{(n)} - A_i\right)^2} < \varepsilon.$$

Тогда для $n \geq n_0$ будет выполнено $\left|x_i^{(n)} - A_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^{(n)} - A_i\right)^2} < \varepsilon,\ i = 1,2,...m$, т.е. для всех значений $i$ справедливо $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = A_i$.

Докажем обратное утверждение. Пусть для всех значений $i$ от 1 до $m$ $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} = A_i$. Это означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ и для каждого $i$ можно найти номер $n_i$, начиная с которого будут верны неравенства $\left|x_i^{(n)} - A_i\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$. Если положить $n_0 = \max(n_1, n_2, ...n_m)$, то последние неравенства будут верны для $n \geq n_0$ для всех значений $i$. Тогда для этих же значений $n$ будет справедливо неравенство $\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(x_i^{(n)} - A_i\right)^2} < \sqrt{\sum_{1}^{m}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \varepsilon$. ◄

## 1.7. Свойства сходящихся числовых последовательностей, связанные с неравенствами

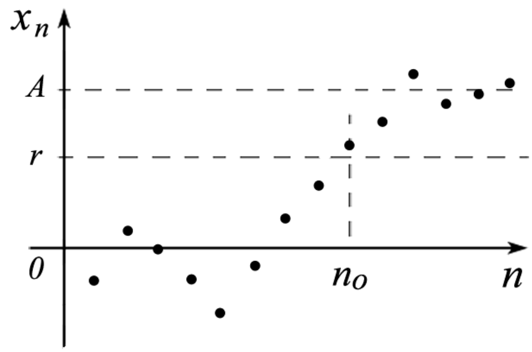
**Теорема 2.1.5.** *Пусть даны две числовые последовательности $x_n$ и $y_n$, причем $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim_{n\to\infty} y_n = B$, и $B > A$. Тогда можно найти номер $n_0$, начиная с которого, члены этих последовательностей будут удовлетворять неравенству $y_n > x_n$.*

►Возьмем $\varepsilon = \frac{B - A}{2}$. Тогда можно найти такой номер $n_1$, что для всех $n \geq n_1$ выполняется неравенство $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon = \frac{A + B}{2}$ и такой номер $n_2$, что для всех $n \geq n_2$ выполняется неравенство $\frac{A + B}{2} = B - \varepsilon < y_n < B + \varepsilon$. Если положить $n_0 = \max(n_1, n_2)$, то для всех $n \geq n_0$ будут выполняться оба из указанных неравенств, а это означает, что для таких $n$ будет $x_n < y_n$. ◄

**Следствие 1.** *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ и $A < B$ ($A > B$), то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности удовлетворяют неравенству $x_n < B$ $(x_n > B)$.*

►Для доказательства достаточно в теореме 2.1.5 взять стационарную последовательность $y_n = B$. ◄

**Следствие 2.** *Если $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ и $A > 0$ ($A < 0$), то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности будут положительны (отрицательны).*




**Замечание.** *Если проанализировать доказательство теоремы, то можно уточнить второе следствие следующим образом: если* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ *и* $A > 0$ $(A < 0)$*, то, начиная с некоторого номера, все члены последовательности будут больше (меньше) некоторого положительного (отрицательного) числа r. Иллюстрация приведена слева.*

Это утверждение в дальнейшем будем называть ***теоремой отделимости последовательности от нуля***.

**Теорема 2.1.6.** (**Теорема о предельном переходе в неравенстве**)

*Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$*, причем для всех натуральных значений n выполняется неравенство* $x_n \le y_n$*. Тогда* $A \le B$*.*

►Допустим, что выполнено противоположное неравенство: $A > B$. Тогда по теореме 1, начиная с некоторого номера, члены последовательности должны удовлетворять неравенству $x_n > y_n$, что противоречит условию.◄

**Замечания**

**1.** *В теореме 2.1.6 неравенство* $x_n \le y_n$ *может выполняться, только начиная с какого-то номера.*

**2.** *Если в условии теоремы 2.1.6 положить* $x_n < y_n$*, то в заключении теоремы нельзя поставить строгое неравенство. Например, пусть* $x_n = \dfrac{1}{n^2}$*,* $y_n = \dfrac{1}{n}$*. Тогда для всех* $n \ge 2$ *выполняется строгое неравенство* $x_n < y_n$*, но* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

## 1.8. Теорема о трех последовательностях

В этом пункте мы поговорим об одном достаточном условии того, чтобы число $A$ было пределом числовой последовательности.

**Теорема 2.1.7.** *Пусть даны три числовые последовательности* $\{x_n\}$*,* $\{y_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *такие, что при всех значениях n выполняется неравенство* $x_n \le y_n \le z_n$*. Допустим также, что последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{z_n\}$ *сходятся, причем* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$*. Тогда последовательность* $\{y_n\}$ *также сходится и* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$*.*

►Возьмем произвольное положительное число $\varepsilon$. Тогда можно найти номер $n_1$, начиная с которого выполнено неравенство $A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$ и номер

$n_2$, начиная с которого выполнено неравенство $A-\varepsilon<z_n<A+\varepsilon$. Тогда, если положить $n_0=\max(n_1,n_2)$, то для всех $n\ge n_0$ будут выполнены оба неравенства, следовательно, будет выполнено неравенство $A-\varepsilon<x_n\le y_n\le z_n<A+\varepsilon$, откуда получим $|y_n-A|<\varepsilon$. ◄

Эту теорему часто называют ***теоремой о «сжатой» переменной***.

Доказанную теорему мы можем применить для вычисления пределов некоторых последовательностей, которые нам будут часто встречаться в дальнейшем.

**Пример 15**. Пусть $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, причем для всех $n$ выполнено неравенство $\alpha_n\ge -1$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{1+\alpha_n}=1$.

☺Докажем сначала, что верно неравенство $1-|\alpha_n|\le\sqrt[k]{1+\alpha_n}\le 1+|\alpha_n|$.

Если $\alpha_n\ge 0$, то левая часть неравенства очевидна, так как $1-|\alpha_n|\le 1\le\sqrt[k]{1+\alpha_n}$. Правую часть неравенства получим, используя свойство степени: если основание степени больше единицы, то большей будет степень с большим показателем. Поэтому $(1+|\alpha_n|)^k\ge 1+\alpha_n$.

Если $\alpha_n<0$, то из неравенства $\sqrt[k]{1+\alpha_n}<1<1+|\alpha_n|$ следует правая часть доказываемого неравенства, а левая получится опять из свойства степени: если основание остепени меньше единицы, то большей будет степень с меньшим показателем. Так как здесь $1-|\alpha_n|=1+\alpha_n$, то $(1-|\alpha_n|)^k<1+\alpha_n$.

Из доказанного неравенства нужное утверждение легко следует по теореме о трех последовательностях и критерию того, что данное число является пределом последовательности (теорема 2.1.1). Если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая, то $\{|\alpha_n|\}$ - тоже бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(1-|\alpha_n|)=\lim\limits_{n\to\infty}(1+|\alpha_n|)=1$, так как эти последовательности представляют собой суммы единицы и бесконечно малых последовательностей. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{1+\alpha_n}=1$. ☻

**Пример 16.** Доказать, что если $a>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

☺ Так как $a>1$, то $\sqrt[n]{a}>1$. Положим $\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1$, тогда $\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n$, где $\alpha_n>0$. Если мы докажем, что $\alpha_n$- бесконечно малая последовательность, то нужное равенство будет доказано.

Используя бином Ньютона, получим неравенство $a=(1+\alpha_n)^n\ge n\alpha_n$, откуда $0<\alpha_n\le\dfrac{a}{n}$. Это означает, что $\alpha_n$ - бесконечно малая последовательность, что и требовалось доказать. ☻

Позже мы докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$ и для $0<a<1$.

**Пример 17**. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

☺ Аналогично предыдущему примеру, $\sqrt[n]{n}>1$, следовательно, если положить $\alpha_n=\sqrt[n]{n}-1$, то $\alpha_n>0$ и $n=\left(1+\alpha_n\right)^n\geq\dfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$ (здесь из разложения бинома взят третий член). Из последнего неравенства получаем $0<\alpha_n^2\leq\dfrac{2}{n-1}$. Следовательно, $\alpha_n$ - бесконечно малая, и так как $\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$, то нужное равенство доказано. ☻

**Пример 18.** Доказать, что если $a>1$ и $m\in\mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^m}{a^n}=0$.

☺Так как $a>1$, то $a=1+x$, где $x>0$ (в отличие от предыдущих примеров здесь $x$ не зависит от $n$). Тогда, рассматривая $n>m$, можно написать

$$a^n=\left(1+x\right)^n\geq C_n^{m+1}x^{m+1}=\frac{(n-m)(n-m+1)...n}{(m+1)!}x^{m+1},$$

Откуда $$0<\frac{n^m}{a^n}\leq\frac{n}{n-m}\cdot\frac{n}{n-m+1}\cdot...\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{(m+1)!}{x^{m+1}}.$$

Допустим, что $n\geq 2m$. Тогда

$$\frac{n}{n-k}=1+\frac{k}{n-k}\leq 1+\frac{m}{m}=2,\quad k=1,2,...,m$$

и $$0<\frac{n^m}{a^n}\leq\frac{1}{n}\cdot\frac{2^m(m+1)!}{x^{m+1}}.$$

Здесь множитель $\dfrac{2^m(m+1)!}{x^{m+1}}$ является константой, которую мы обозначим через $M$. Тогда, взяв $\varepsilon>0$, для всех значений $n\geq n_0=\left[\dfrac{M}{\varepsilon}\right]+1$ получим неравенство $0<\dfrac{n^m}{a^n}<\varepsilon$, что означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^m}{a^n}=0$. ☻

**Упражнения**

1. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[k]{a+\alpha_n}=\sqrt[k]{a}$, если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая.
2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a+\alpha_n}=1$, если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая и $a>0$.
3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{an+b+\alpha_n}=1$, если $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая и $a>0$.

## 1.9. Теорема Кантора

Уточним теорему Кантора, о которой мы говорили в §4 главы 1 (теорема 1.4.4).

**Теорема 2.1.8**. *Пусть дана последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$ *таких, что при* $n \to \infty$ *длина n-го отрезка стремится к нулю, т.е.* $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. *Тогда точка, принадлежащая всем отрезкам, единственна.*

►Допустим, что существует две точки, принадлежащие всем отрезкам: $c$ и $c'$. Пусть $\varepsilon_0 = |c - c'| > 0$. Тогда для всех значений $n$ будут выполняться неравенства $a_n \le c \le b_n$ и $a_n \le c' \le b_n$, следовательно, будет $-(b_n - a_n) \le c - c' \le b_n - a_n$, что означает, что $b_n - a_n \ge |c - c'| = \varepsilon_0$. Доказанное неравенство противоречит тому, что $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$. ◄

# §2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Арифметические свойства предела

## 2.1. Бесконечно малая последовательность

С бесконечно малой последовательностью мы уже познакомились в 1.3. Это последовательность, предел которой равен нулю. Теперь сформулируем и докажем два основных свойства бесконечно малых последовательностей.

**Теорема 2.2.1.** *Сумма двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.*

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) = 0$.

Возьмем некоторое $\varepsilon > 0$ и найдем номер $n_1$, начиная с которого выполняется неравенство $|\alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и номер $n_2$, начиная с которого выполняется неравенство $|\beta_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда оба эти неравенства будут выполняться для всех $n$, начиная с $n_0 = \max(n_1, n_2)$ и, следовательно, для этих номеров будет верным неравенство $|\alpha_n + \beta_n| \le |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.◄

Очевидно, что с помощью метода математической индукции эту теорему можно распространить на любое (фиксированное) количество слагаемых. Но необходимо помнить, что теорема неприменима, если количество слагаемых зависит от $n$ - номера члена последовательности.

**Пример 1.** Рассмотрим последовательность

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

☺Очевидно, что каждое слагаемое этой последовательности стремится к нулю, количество их равно $n$, но их сумма будет иметь предел, отличный от нуля. Для нахождения этого предела применим теорему о сжатой переменной. Очевидна оценка

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1.$$

Левую часть этого неравенства оценим следующим образом:

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} > \sqrt{1-\frac{1}{n}} > 1-\frac{1}{n},$$

откуда получим: $1-\frac{1}{n} < x_n < 1$. Так как левая часть этого неравенства стремится к единице, то и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. ☻

**Теорема 2.2.2.** *Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая.*

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $|x_n| \le C \ \ \forall n \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha_n \cdot x_n) = 0$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{C}$. Тогда, если $n \ge n_0$, будет выполнено неравенство $|\alpha_n \cdot x_n| < \frac{\varepsilon}{C} C = \varepsilon$, что и требовалось доказать.◄

**Следствие.** *Если $\{x_n\}$ - бесконечно малая последовательность, а $\{y_n\}$ - сходящаяся, то их произведение $\{x_n \cdot y_n\}$ - бесконечно малая.*

**Пример 2**. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

☺. Последовательность $\frac{1}{n}$ - бесконечно малая, последовательность $\sin n$ - ограничена. Следовательно, произведение $\frac{1}{n}\sin n$ есть бесконечно малая и искомый предел равен нулю. ☻

## 2.2. Бесконечно большая последовательность

Приведем определения бесконечно больших последовательностей, расширив тем самым определение предела последовательности.

**Определение 2.2.1**. *Числовую последовательность $\{x_n\}$ будем называть* ***бесконечно большой****, если для любого положительного числа $M$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого все члены последовательности будут удовлетворять неравенству $|x_n| > M$.*

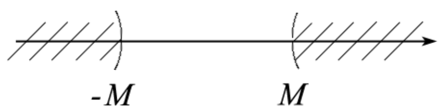
Если последовательность $\{x_n\}$ бесконечно большая, то будем говорить также, что она ***стремится к бесконечности*** и записывать это $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Существуют два частных случая бесконечно больших числовых последовательностей.

**Определение 2.2.2**. *Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ ***стремится к*** $+\infty$*, если для любого положительного числа* $M$ *можно найти номер* $n_0$*, начиная с которого все члены последовательности будут удовлетворять неравенству* $x_n > M$ .

**Определение 2.2.3**. *Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ ***стремится к*** $-\infty$*, если для любого положительного числа* $M$ *можно найти номер* $n_0$*, начиная с которого все члены последовательности будут удовлетворять неравенству* $x_n < -M$ .

Неравенство $|x_n| > M$ означает, что точки $x_n$ при $n \ge n_0$ лежат вне промежутка $[-M, M]$.




Если объединение лучей $(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ назвать ***окрестностью бесконечности***, то утверждение $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ будет означать, что для произвольной окрестности бесконечности можно найти номер $n_0$, начиная с которого все члены последовательности будут попадать в эту окрестность. Это высказывание полностью совпадает с определением предела в конечном случае.

Заметим также, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ означает, что, начиная с некоторого номера, все члены последовательности попадают на луч $(M, +\infty)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ означает, что, начиная с некоторого номера члены последовательности попадут на луч $(-\infty, -M)$.


**Пример 3.** Доказать $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \infty$.

☺Возьмем $M > 0$ и попытаемся найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $\left|(-1)^n n^2\right| > M$. Очевидно, что это неравенство равносильно неравенству $n^2 > M$ или $n > \sqrt{M}$. Следовательно, если взять $n_0 = \left[\sqrt{M}\right] + 1$, то для всех $n \ge n_0$ неравенство $\left|(-1)^n n^2\right| > M$ будет выполнено и $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \infty$. ☻

**Пример 4.** Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2+3n\right)=-\infty$.

☺Возьмем $M>0$ и попытаемся найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $-n^2+3n<-M$. Это неравенство – квадратное и его можно решить точно, но мы поступим иначе. В определении бесконечно большой величины требуется найти номер $n_0$, такой, что неравенство $x_n<-M$ будет выполняться для всех номеров *n*, следующих за $n_0$, но при этом не требуется, чтобы $n_0$ был наименьшим номером, обладающим таким свойством. Поэтому оценим сначала данную величину: $-n^2+3n<-\left(n-3\right)^2$ (эта оценка верна, если $n>3$), и найдем $n_0$, начиная с которого верно неравенство $-\left(n-3\right)^2<M$. Решая это неравенство, получим $n>\sqrt{M}+3$, следовательно, можно взять $n_0=\left[\sqrt{M}\right]+4$. Тогда неравенство $-n^2+3n<-M$ тоже будет выполнено, что и требовалось доказать. ☻

**Пример 5.** Доказать $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-5}{2n}=+\infty$.

☺ Возьмем $M>0$ и попытаемся найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $\dfrac{n^2-5}{2n}>M$. Также как и в предыдущем примере, сделаем оценку члена данной последовательности: $\dfrac{n^2-5}{2n}\ge\dfrac{n^2-5n}{2n}=\dfrac{n-5}{2}$ и найдем $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $\dfrac{n-5}{2}>M$. Решая это неравенство, получим $n>2M+5$. Если взять $n_0=\left[2M\right]+6$, то для всех $n\ge n_0$ неравенство $\dfrac{n-5}{2}>M$ будет выполнено и, следовательно, будет выполнено и неравенство $\dfrac{n^2-5}{2n}>M$. ☻

**Замечание.** *Каждая бесконечно большая последовательность является неограниченной (докажите), но обратное неверно. Последовательность может быть неограниченной, но не быть бесконечно большой.*

**Пример 6.** Рассмотрим последовательность $x_n=\dfrac{n+\left(-1\right)^n n}{2}$.

☺Эта последовательность неограничена, так как какое бы число $M$ мы ни взяли, можно найти номер *n* такой, что $x_n>M$. Для этого надо взять *n* - четное, тогда $x_n=n$ и нужное неравенство будет выполнено для любого четного числа *n*, которое будет больше, чем $M$. Это означает, что никакое число $M$ не может быть верхней границей данной последовательности.

С другой стороны, если взять некоторое положительное число $M_0$, то какой бы номер $n_0$ мы ни взяли, можно найти номер $n$ такой, что $n \ge n_0$ и $x_n < M$. Для этого нужно взять $n$ - нечетное, при котором $x_n = 0$. Это означает, что последовательность не стремится к бесконечности. ☻

**Упражнения**

**1.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что

**а)** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty$; **б)** $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = +\infty$.

**2.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ и $y_n$ - ограничена. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \infty$.

### 2.3. Связь между бесконечно малой и бесконечно большой последовательностями

**Теорема 2.2.3.** *Последовательность $\{x_n\}$ - бесконечно малая ($x_n$ отличны от нуля при всех $n$) тогда и только тогда, когда последовательность $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ - бесконечно большая.*

►Пусть последовательность $x_n$ - бесконечно малая, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Докажем, что $y_n = \dfrac{1}{x_n}$ - бесконечно большая. Возьмем $M > 0$ и найдем $n_0$, начиная с которого $|x_n| < \dfrac{1}{M}$. Тогда для $n \ge n_0$ будет выполняться неравенство $|y_n| > M$, что означает, что $y_n$ - бесконечно большая.

Наоборот, пусть $y_n$ - бесконечно большая последовательность. Докажем, что $x_n = \dfrac{1}{y_n}$ - бесконечно малая. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $|y_n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда для этих номеров $n$ будет выполнено неравенство $|x_n| < \varepsilon$, что означает, что $x_n$ - бесконечно малая.◄

### 2.4. Арифметические свойства пределов

**Теорема 2.2.4.** *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. *Тогда*

*1)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = A + B$;

*2)* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = AB$;

*3)* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{A}{B}$, *если* $y_n \ne 0, \forall n$ *и* $b \ne 0$.

►Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$, то члены последовательности $x_n$ и $y_n$ можно представить в виде $x_n = A + \alpha_n$ и $y_n = B + \beta_n$, где $\alpha_n$ и $\beta_n$ - бесконечно малые последовательности.

1) Тогда $x_n + y_n = (A+B) + (\alpha_n + \beta_n)$, где $\alpha_n + \beta_n$ - бесконечно малая, как сумма двух бесконечно малых последовательностей. Таким образом, последовательность $x_n + y_n$ представлена в виде суммы числа $A+B$ и бесконечно малой, и по критерию того, что число является пределом последовательности, получаем $A + B = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n)$.

2) Аналогично, $x_n \cdot y_n = AB + (A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$. Слагаемые $A\beta_n$, $B\alpha_n$ и $\alpha_n\beta_n$ - бесконечно малые, как произведения бесконечно малых на ограниченные (константы $A$ и $B$ ограничены и каждая из бесконечно малых $\alpha_n$ и $\beta_n$ - ограничена, как последовательность, имеющая предел). Следовательно, сумма $(A\beta_n + B\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$ - бесконечно малая и $AB = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n)$.

3) Докажем, что разность $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{A}{B}$ - бесконечно малая.

Действительно, $\dfrac{x_n}{y_n} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{A+\alpha_n}{B+\beta_n} - \dfrac{A}{B} = \dfrac{B\alpha_n - A\beta_n}{B(B+\beta_n)}$. Числитель этой дроби – сумма двух бесконечно малых, следовательно, бесконечно малая. Что касается знаменателя, то при $n \to \infty$ он стремится к $B^2 > 0$. Следовательно, по теореме об отделимости последовательности от нуля, начиная с некоторого момента, будет выполняться неравенство $B(B+\beta_n) > \dfrac{B^2}{2}$. Тогда $\dfrac{1}{B(B+\beta_n)} < \dfrac{2}{B^2}$, т.е. дробь $\dfrac{1}{B(B+\beta_n)}$ - ограничена. Следовательно, $\dfrac{B\alpha_n - A\beta_n}{B(B+\beta_n)}$ - бесконечно малая, как произведение бесконечно малой на ограниченную и $\dfrac{A}{B} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$. ◄

**Замечания**

**1.** *Очевидно, что теорема будет справедлива для любого (но фиксированного) количества слагаемых или сомножителей.*

**2.** *В примере 16 п.1.8 мы доказали, что, если* $a > 1$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. *Теперь это же соотношение легко доказать и для* $0 < a < 1$ *(для* $a = 1$ *оно очевидно).*

►Пусть $0 < a < 1$. Тогда $a = \dfrac{1}{1/a}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{1/a}} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/a}} = 1$, так как $\dfrac{1}{a} > 1$.◄

### 2.5. Неопределенности

Мы уже знакомы с пределами некоторых последовательностей. Следовательно, мы можем вычислять пределы последовательностей, составленных из этих известных с помощью арифметических действий.

Например,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+\dfrac{n^2}{3^n}-\dfrac{2\cdot 5^n}{7^n}}{\sqrt[n]{n+\dfrac{1}{n}}}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{n^2}{3^n}-\dfrac{2\cdot 5^n}{7^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n+\dfrac{1}{n}}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n}-\lim\limits_{n\to\infty}2\cdot\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n+\dfrac{1}{n}}\right)}=\frac{2}{1}=2.$$

Но часто требуется вычислить предел последовательности, к которой невозможно применить теорему об арифметических свойствах пределов.

Например, $x_n=\dfrac{3n^3+2n+5}{6n^3+7}$. Здесь при $n\to\infty$ числитель и знаменатель являются бесконечно большими последовательностями и теорема о пределе частного неприменима. Про дробь $\dfrac{3n^3+2n+5}{6n^3+7}$ говорят, что она ***неопределена*** при $n\to\infty$ или, что она представляет собой неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$. Процесс вычисления предела такого выражения называется ***раскрытием неопределенности***.

Кроме неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$ нам встретятся неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, $1^\infty$, $\infty^0$, $0^0$.

## §3 Предел монотонной последовательности. Число *e*

### 3.1. Определения

**Определение 2.3.1.** *Будем говорить, что последовательность* $x_n$ ***возрастает***, *если для всех значений n выполняется неравенство* $x_{n+1}\ge x_n$.

**Определение 2.3.2.** *Будем говорить, что последовательность* $x_n$ ***убывает***, *если для всех значений n выполняется неравенство* $x_{n+1}\le x_n$.

**Определение 2.3.3.** *Если последовательность возрастает или убывает, то ее будем называть* ***монотонной***.

**Замечание.** *В определении монотонных последовательностей неравенства* $\ge$ *и* $\le$ *можно заменить на строгие* $x_{n+1}>x_n$ *или* $x_{n+1}<x_n$. *Тогда будем говорить, что последовательность* ***строго возрастает*** *или* ***строго убывает***.

Для исследования последовательности на монотонность можно сравнивать разность соседних членов последовательности с нулем или (если члены последовательности положительны) отношение последующего члена последовательности к предыдущему с единицей.

**Пример 1.** Исследовать на монотонность последовательность: $x_0 = 1$, $x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}$.

☺ Найдем $x_1$: $x_1 = \sqrt{2 + x_0} = \sqrt{3} > x_0$.

Для доказательства того, что последовательность возрастает, докажем индукционную теорему.

Допустим, что при некотором $k$ справедливо $x_k > x_{k-1}$. Тогда $x_{k+1} - x_k = \sqrt{2 + x_k} - \sqrt{2 + x_{k-1}} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{\sqrt{2 + x_k} + \sqrt{2 + x_{k-1}}} > 0$. В силу принципа математической индукции получим $x_n > x_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ☻

**Пример 2.** Исследовать на монотонность последовательность

$$x_n = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2n+1}{3n+2}.$$

☺ Найдем $x_{n-1} = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{5}{8} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{3n-1}$ и составим отношение $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \dfrac{2n+1}{3n+2}$. Так как члены последовательности положительны и $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $x_n < x_{n-1}$ и последовательность строго убывает. ☻

### 3.2. Теорема Вейерштрасса

**Теорема 2.3.1 (Вейерштрасса).** *Последовательность имеет конечный предел, если она возрастает и ограничена сверху или убывает и ограничена снизу.*

►Пусть последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Тогда для любого *n* выполняются неравенства $x_n \le x_{n+1}$ и $x_n \le C$.

Так как последовательность ограничена, то она имеет конечный супремум: $M = \sup x_n$. Докажем, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда, по определению супремума, найдется номер $n_0$ такой, что $M - \varepsilon < x_{n_0} \le M$. Так как последовательность $\{x_n\}$ возрастает, то для всех номеров *n* таких, что $n \ge n_0$ будет выполняться неравенство $x_{n_0} \le x_n \le M$, следовательно, эти члены последовательности будут лежать в $\varepsilon$-окрестности точки $M$, что и означает, что $M = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = m = \inf x_n$.◄

**Замечания**

**1.** *Теорема будет верна, если последовательность монотонна только начиная с некоторого номера.*

**2.** *Если последовательность монотонна, но неограниченна, то она стремится к бесконечности.*

**Пример 3.** Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}$ $\left(a>0\right)$.

☺Докажем, что эта последовательность убывает, начиная с некоторого номера. Существует натуральное число $n_0$ такое, что $a<n_0$. Тогда $a<n$ для всех $n\ge n_0$ и для этих номеров будет верно неравенство $\dfrac{a}{n}<1$. Следовательно, для этих $n$ выполнено неравенство $x_{n+1}=\dfrac{a^{n+1}}{\left(n+1\right)!}=\dfrac{a^n}{n!}\dfrac{a}{(n+1)}<\dfrac{a^n}{n!}=x_n$, т.е. последовательность убывает. Очевидно, что все члены последовательности неотрицательны, значит, последовательность ограничена снизу. По теореме Вейерштрасса она имеет конечный предел. Обозначим его через $l$.

Члены последовательности связаны рекуррентным соотношением $x_{n+1}=x_n\cdot\dfrac{a}{n+1}$. Переходя к пределу в этом соотношении, получим $l=l\cdot 0$, т.е. $l=0$. ☻

## 3.3. Число e

Рассмотрим последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ и докажем, что она имеет предел.

►Для этого воспользуемся биномом Ньютона:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n\left(n-1\right)\ldots\left(n-k+1\right)}{k!}\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n!}{n!}\frac{1}{n^n}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

С увеличением $n$ увеличивается каждая скобка вида $1-\dfrac{m}{n}$, что означает, что в последней сумме увеличивается каждое слагаемое. Кроме того, увеличивается количество слагаемых. Следовательно, $x_{n+1}>x_n$, т.е. последовательность $\left\{x_n\right\}$ возрастает. Докажем, что она ограничена сверху. Так как $1-\dfrac{m}{n}<1$, то

$$2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<$$

$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<2+\frac{1}{2}\frac{1-\left(\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}=$$

$= 2 + 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3$. Следовательно, эта последовательность имеет предел. ◄

Этот предел назовем ***числом e***. Из неравенств, приведенных выше следует, что $2 < e < 3$. В дальнейшем мы докажем, что это число иррационально. Беря достаточно большие значения $n$ и подставляя их в выражение для общего члена последовательности, мы можем вычислить предел этой последовательности приближенно с любой степенью точности. Но делать такие вычисления с помощью последовательности $\{x_n\}$ довольно сложно. В дальнейшем мы получим еще одну последовательность, предел которой равен числу $e$ и которая удобнее для вычисления этого числа. Сейчас напишем только несколько первых цифр: $e \cong 2{,}71828182845904592\ldots$.

Рассмотрим последовательность $y_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$.

Очевидно, что последовательность $y_n$ возрастает и ограничена сверху. Значит, она имеет предел. Обозначим его через $l$.

Неравенство $x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{n!}$, доказанное выше, означает, что $x_n < y_n$, откуда $e \le l$.

С другой стороны, фиксируем некоторое натуральное число $m$ и рассмотрим последовательность при $n > m$

$$x_{n,m} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{m!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{m-1}{n}\right).$$

Очевидно, что выполняется неравенство $y_m < x_{n,m} < x_n$. Отсюда следует, что при каждом значении $m$ справедливо неравенство $y_m < e$, следовательно, $l \le e$.

Из двух полученных неравенств, следует равенство $l = e$.

## §4 Частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса

### 4.1. Частичные пределы

**Определение 2.4.1**. *Пусть дана последовательность $\{x_n\}$ и строго возрастающая последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, значениями которой являются натуральные числа. Тогда последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $y_k = x_{n_k}$ называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.*

**Определение 2.4.2.** *Если* $\{x_{n_k}\}$ *- подпоследовательность последовательности* $\{x_n\}$ *и существует* $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = A$ *(конечный или бесконечный), то $A$ будем называть* ***частичным пределом*** *последовательности* $\{x_n\}$.

**Упражнение.** Докажите, что $A$ является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда $A$ является предельной точкой множества значений последовательности $\{x_n\}$.

**Определение 2.4.3.** *Обозначим через $E$ множество частичных пределов числовой последовательности* $\{x_n\}$. *Тогда* $\sup E$ *будем называть* ***верхним пределом*** *последовательности* $\{x_n\}$, *а* $\inf E$ ***ее нижним пределом*** *и обозначать соответственно* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ *и* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

**Пример 1.** $x_n = 1 + (-1)^n$. Очевидно, что можно выделить две сходящиеся подпоследовательности: $x_{2k} = 1$ и $x_{2k-1} = 0$, и множество $E$ состоит из двух чисел 0 и 1. Поэтому $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 1$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$.

**Пример 2.** $x_n = \left(1 + (-1)^n\right)n$. Здесь также можно выделить две сходящиеся подпоследовательности $x_{2k} = 2k$ и $x_{2k-1} = 0$. Множество $E$ также состоит из двух элементов 0 и $+\infty$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$ и $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = 0$.

**Пример 3.** $\{x_n\}$ - последовательность всех рациональных чисел. Как уже говорилось (гл.1 §8), каждое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел, следовательно, оно является частичным пределом этой последовательности, т.е. $E = \mathbb{R}$. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Используя тот факт, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то любой частичный предел этой последовательности тоже равен $A$, получим важный для нас результат, который является продолжением результатов предыдущего параграфа.

**Теорема 2.4.1.** *Если* $\alpha_k$ *- бесконечно малая последовательность, то* $\lim\limits_{k\to\infty} (1+\alpha_k)^{1/\alpha_k} = e$.

► Сначала предположим, что $\alpha_n > 0$ (будем считать, что $\alpha_n < 1$), тогда $\frac{1}{\alpha_n} \to +\infty$. Положим $n_k = \left[\frac{1}{\alpha_k}\right]$, так что $n_k \le \frac{1}{\alpha_k} < n_k + 1$ и $\frac{1}{n_k} \ge \alpha_k > \frac{1}{n_k+1}$. Тогда выполнено неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1} \ge (1+\alpha_k)^{1/\alpha_k} > \left(1 + \frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}.$$

Последовательности $s_k=\left(1+\dfrac{1}{n_k}\right)^{n_k}$ и $t_k=\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}$ являются подпоследовательностями последовательности $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}$, которая сходится к числу $e$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}s_k=\lim\limits_{k\to\infty}t_k=e$. Отсюда

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}s_k\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)=e$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k}=\frac{\lim\limits_{k\to\infty}t_k}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n_k+1}\right)}=e.$$

Тогда, по теореме о сжатой переменной, $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\alpha_k\right)^{1/\alpha_k}=e$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\alpha_k<0$, (будем считать, что $\alpha_k>-1$). Обозначим $\beta_k=-\alpha_k$.Тогда последовательность $\dfrac{\beta_k}{1-\beta_k}$ бесконечно малая и все ее члены положительны. Следовательно, для нее выполнено неравенство

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\beta_k}{1-\beta_k}\right)^{\frac{1-\beta_k}{\beta_k}}=e.$$

Тогда
$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\alpha_k\right)^{1/\alpha_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1-\beta_k\right)^{-1/\beta_k}=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{1-\beta_k}\right)^{1/\beta_k}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{\beta_k}{1-\beta_k}\right)^{\frac{1-\beta_k}{\beta_k}}\left(1+\frac{\beta_k}{1-\beta_k}\right)=e.$$

Наконец, если в последовательности $\alpha_k$ найдется бесконечно много членов с положительными знаками и бесконечно много с отрицательными, то образуем из них две подпоследовательности $\alpha_{k_m}$ и $\alpha_{k_l}$. Тогда, по доказанному выше $\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\alpha_{k_m}\right)^{1/\alpha_{k_m}}=\lim\limits_{l\to\infty}\left(1+\alpha_{k_l}\right)^{1/\alpha_{k_l}}=e$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\alpha_k\right)^{1/\alpha_k}=e$. ◄

**Теорема 2.4.2**. *Множество частичных пределов $E$ замкнуто.*

►Докажем, что каждая предельная точка множества $E$ содержится в $E$, т.е. является частичным пределом последовательности $\{x_n\}$. Пусть $c$ - предельная точка множества $E$. Тогда, какое бы $\varepsilon>0$ мы ни взяли, можно найти точку $A\in E$ такую, что $A\in\overset{o}{U}_{\varepsilon/2}(c)$ или $0<\rho(A,c)<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Так как $A$ - частичный предел последовательности $\{x_n\}$, то $A$ - предельная точка множества значений последовательности, т.е. существует элемент последовательности $x_{n_0}$, для которого выполняется неравенство $0 < \rho\left(x_{n_0}, A\right) < \rho(A,c) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда следует, что $x_{n_0} \neq c$ и $\rho\left(x_{n_0}, c\right) < \rho\left(x_{n_0}, A\right) + \rho(A,c) < \varepsilon$, т.е. $c$ – предельная точка множества значений $\{x_n\}$. ◄

**Теорема 2.4.3**. *Пусть* $\{x_n\}$ *- числовая последовательность,* $E$ *- множество ее частичных пределов и* $A^* = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. *Тогда*

*а)* $A^* \in E$*;*

*б) если* $A^*$ *- конечное число и* $\varepsilon > 0$*, то существует номер* $n_0$ *такой, что для всех* $n \geq n_0$ *выполняется неравенство* $x_n < A^* + \varepsilon$*;*

*в)* $A^*$ *- единственное число, обладающее свойствами а) и b).*

►Если $A^* = +\infty$, то последовательность $\{x_n\}$ неограниченна сверху и это значит, что можно выбрать подпоследовательность, которая будет стремиться к $+\infty$.

Если $A^*$ - число, то последовательность ограничена и утверждение а) следует из теоремы 2.4.2 и теоремы 1.8.5.

Если $A^* = -\infty$, то множество $E$ содержит только один элемент $(-\infty)$ и ни одного конечного частичного предела не существует. А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Докажем утверждение б). Возьмем $\varepsilon > 0$ и предположим, что существует бесконечно много номеров $n_k$ таких, что $x_{n_k} \geq A^* + \varepsilon$. Тогда из последовательности $\left\{x_{n_k}\right\}$ можно выбрать подпоследовательность, которая будет иметь предел $l$, удовлетворяющий неравенству $l \geq A^* + \varepsilon$, а это будет означать, что $A^*$ не является супремумом множества $E$.

Теперь докажем, что число, удовлетворяющее свойствам а) и б) единственно. Предположим, что найдется два таких числа $A^*$ и $A'$, и предположим, что $A^* < A'$. Возьмем какое-нибудь число $y$, лежащее между ними: $A^* < y < A'$. Тогда, согласно утверждению б), найдется номер $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $x_n < y$. Но тогда точка $A'$ не может быть предельной точкой множества $E$, что противоречит условию а).◄

**Упражнение.** Пусть $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq y_n$. Докажите, что выполнены неравенства

1. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$;
2. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n$.

## 4.2. Теорема Больцано-Вейерштрасса

**Теорема 2.4.4 (Больцано-Вейерштрасса).** *Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

►Пусть последовательность $\{x_n\}$ - ограничена, т.е. все члены последовательности лежат на промежутке $[a,b]$. Разделим этот промежуток пополам. Тогда, по крайней мере на одной половине находится бесконечно много членов данной последовательности. Обозначим эту половину через $[a_1,b_1]$. Отрезок $[a_1,b_1]$ разделим пополам и опять выберем ту половину, которая содержит бесконечно много членов последовательности. Обозначим ее через $[a_2,b_2]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных отрезков, причем $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n}=0$. Следовательно, существует точка $c$, принадлежащая каждому из промежутков $[a_n,b_n]$.

Выберем подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$, сходящуюся к $c$. Для этого возьмем за $x_{n_1}$ - какой-нибудь элемент последовательности, лежащий на промежутке $[a_1,b_1]$, за $x_{n_2}$ - какой-нибудь элемент последовательности, лежащий на промежутке $[a_2,b_2]$ и такой, что $n_2>n_1$ и т.д. Получим последовательность $\{x_{n_k}\}$, которая является подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$ и такую, что $x_{n_k}\in[a_k,b_k]$.

Докажем, что эта подпоследовательность сходится к $c$. Возьмем некоторое число $\varepsilon>0$ и найдем номер $k_0$ такой, что для всех $k\ge k_0$ будет выполняться неравенство $\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$. Тогда для этих значений $k$ будет верным неравенство $\left|x_{n_k}-c\right|<\dfrac{b-a}{2^k}<\varepsilon$, следовательно, $c=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$.◄

## 4.3. Критерий Коши

**Определение 2.4.4.** *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***фундаментальной****, если для любого* $\varepsilon>0$ *можно найти номер* $n_0$*, начиная с которого для всех натуральных чисел* $p$ *будет выполняться неравенство* $\rho\left(x_n,x_{n+p}\right)<\varepsilon$.

Про такую последовательность говорят еще, что она ***сходится в себе.***

Очевидно, что это определение дано для последовательности из произвольного метрического пространства. Для числовой последовательности неравенство $\rho\left(x_n,x_{n+p}\right)<\varepsilon$ заменяется неравенством $\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$.

**Теорема 2.4.5.** *Если последовательность в метрическом пространстве сходится, то она фундаментальна.*

►Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда по $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$ такой, что для всех $n \ge n_0$ будет выполнено неравенство $\rho(x_n, A) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда для таких же номеров *n* и для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $\rho\left(x_{n+p}, A\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Используя неравенство треугольника, получим $\rho\left(x_n, x_{n+p}\right) \le \rho(x_n, A) + \rho\left(A, x_{n+p}\right) < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ◄

Обратная теорема не будет верной в произвольном метрическом пространстве.

**Пример 4**. Пусть $X$ - пространство, элементами которого являются рациональные числа, расстояние между которыми задается формулой $\rho(x, y) = |x - y|$. Возьмем последовательность $\{x_n\}_1^{\infty}$ - рациональных приближений какого-нибудь иррационального числа, например, $\sqrt{2}$. Существование такой последовательности доказано в 4.1, пример 3. Предел такой последовательности является иррациональным числом, поэтому эта последовательность не имеет предела в данном пространстве.

**Определение 2.4.5.** *Пространство, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится, называется* ***полным****.*

Докажем, что пространство $\mathbb{R}$ полное.

**Теорема 2.4.6.** *Если числовая последовательность (в $\mathbb{R}$) фундаментальна, то она имеет конечный предел.*

►Пусть числовая последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Докажем, что она ограничена. Возьмем $\varepsilon = 1$ и найдем номер $n_0$ такой, что для $n \ge n_0$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left|x_{n+p} - x_n\right| < 1$. В частности для всех $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $\left|x_{n_0+p} - x_{n_0}\right| < 1$, откуда следует, что $x_{n_0} - 1 < x_m < 1 + x_{n_0}$ для всех номеров $m > n_0$. Это означает, что множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}$ ограничено. Множество значений $\{x_n\}_{n=1}^{n=n_0}$ конечно и потому тоже ограничено (например, своими наибольшим и наименьшим значениями). Положим, что для $1 \le n \le n_0$ выполняется неравенство $L \le x_n \le K$. Тогда, полагая $m = \min\left(L, x_{n_0} - 1\right)$ и $M = \max\left(K, x_{n_0} + 1\right)$, получим $m \le x_n \le M$, $n \in \mathbb{N}$, т.е. последовательность ограничена.

По теореме Больцано-Вейерштрасса из данной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность: $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\to} A$. Докажем, что $A = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем номер $k_0$, начиная с которого выполняется неравенство $\left|x_{n_k} - A\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. По этому же $\varepsilon$ найдем номер $n_1$ такой, что для всех номеров $n$ и $m$, начиная с $n_1$, выполняется неравенство $\left|x_n - x_m\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда оба эти неравенства будут выполняться для всех $n \ge n_0 = \max\left(n_{k_0}, n_1\right)$, и для этих значений $n$ выполнено $\left|x_n - A\right| \le \left|x_n - x_{n_k}\right| + \left|x_{n_k} - A\right| < \varepsilon$. ◀

Объединяя эти теоремы, получим теорему, которая называется ***критерием Коши в пространстве*** $\mathbb{R}$**:**

**Теорема 2.4.7.** *Для того чтобы числовая последовательность* $\{x_n\}$ *имела предел необходимо и достаточно, чтобы для любого числа* $\varepsilon > 0$ *можно было найти номер* $n_0$ *такой, что для всех* $n \ge n_0$ *и для любого* $p \in \mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|x_{n+p} - x_n\right| < \varepsilon$.

**Пример 5.** Будет ли сходиться последовательность, заданная рекуррентно формулой $x_n = x_{n-1} + \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{3^n}$?

☺Допустим для определенности, что $n > m$ и запишем цепочку равенств

$$x_n - x_{n-1} = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{3^n},$$

$$x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{3^{n-1}},$$

$$x_{n-2} - x_{n-3} = \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-2}},$$

.....

$$x_{m+1} - x_m = \frac{m}{m+2} \cdot \frac{1}{3^{m+1}}.$$

Складывая эти равенства, получим

$$x_n - x_m = \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{1}{3^n} + \frac{n-2}{n} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{n-3}{n-1} \cdot \frac{1}{3^{n-2}} + \ldots + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{1}{3^{m+1}},$$

Откуда $\left|x_n - x_m\right| = \dfrac{n-1}{n+1} \cdot \dfrac{1}{3^n} + \dfrac{n-2}{n} \cdot \dfrac{1}{3^{n-1}} + \dfrac{n-3}{n-1} \cdot \dfrac{1}{3^{n-2}} + \ldots + \dfrac{m}{m+2} \cdot \dfrac{1}{3^{m+1}} \le$

$$\leq \frac{1}{3^n}+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots+\frac{1}{3^{m+1}}=\frac{{}^1\!/_{3^n}\left(1-{}^1\!/_{3^{m-n+2}}\right)}{1-{}^1\!/_3}\leq \frac{{}^1\!/_{3^n}}{{}^2\!/_3}=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}.$$

Очевидно, что для каждого $\varepsilon>0$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого выполняется неравенство $\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}<\varepsilon$, следовательно, критерий Коши выполнен и последовательность сходится. ☻

**Пример 6.** Будет ли сходиться последовательность с общим членом

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}?$$

☺Возьмем $n=2m$. Тогда

$$x_n-x_m=\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\frac{1}{\sqrt{m+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2m}}>\frac{m}{\sqrt{2m}}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что какой бы большой номер $n_0$ мы ни взяли, найдутся значения $m\geq n_0$ и $n>n_0$, при которых $\left|x_n-x_m\right|>\varepsilon_0$ (в качестве $\varepsilon_0$ можно взять, например, единицу). Следовательно, последовательность не имеет предела. ☻

**Упражнения**

**1.** Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$ тогда и только тогда, когда все частичные пределы последовательности $\{x_n\}$ равны $A$.

**2.** Привести пример последовательности, для которой выполнено условие: $\forall p\in\mathbb{N},\ \forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ \forall n\geq n_0\Rightarrow\left|x_{n+p}-x_n\right|<\varepsilon$,

но последовательность $\{x_n\}$ не имеет конечного предела. Объяснить различие между данным условием и условием критерия Коши.

*Указание.* Рассмотрите последовательность $x_n=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}$.

## §5 Понятие о числовом ряде

### 5.1. Основные понятия

Важным примером применения теории пределов числовой последовательности является понятие числового ряда.

**Определение 2.5.1.** *Пусть дана числовая последовательность* $\{a_n\}$. *Числовым рядом называется символ*

$$a_1+a_2+a_3+\ldots.$$

Нужно понимать, что написанная сумма является символом, потому что мы не знаем, как найти сумму бесконечного числа слагаемых. Это требует специального определения. Отсутствие этого определения легло в основу парадокса, описанного греческим философом Зеноном, доказывающего, что Ахиллес никогда не догонит черепаху.

Допустим, что Ахиллес и черепаха движутся по одной дороге в одном направлении и в начальный момент времени расстояние между ними таково, что Ахиллес может его пробежать за время, равное $T$ часов. Допустим также, что Ахиллес бежит со скоростью, которая в 5 раз больше скорости черепахи. Тогда через $T$ часов Ахиллес окажется в точке, где в начальный момент находилась черепаха. Но черепаха за это время доберется до точки, расстояние до которой Ахиллес преодолеет за $\frac{T}{5}$ часов, и через $\frac{T}{5}$ часов, когда Ахиллес добежит до этой точки, черепаха опять уползет вперед и уже будет в точке, до которой Ахиллес доберется только через $\frac{T}{5^2}$ часов. Продолжая рассуждать таким же образом, придем к выводу, что, сколько бы ни бежал Ахиллес, черепаха будет впереди него и он никогда ее не догонит.

Чтобы понять ошибку в этом рассуждении, нужно попытаться подсчитать время, которое Ахиллес догоняет черепаху. Очевидно, это будет бесконечная сумма

$$t = T + \frac{T}{5} + \frac{T}{5^2} + \frac{T}{5^3} + \dots .$$

Зенон считал, что сумма бесконечного числа слагаемых всегда бесконечна, однако, это предположение оказывается неразумным и данная сумма конечна (см. пример 2 ниже). Дадим определение такой суммы.

**Определение 2.5.2**. *Пусть дан ряд* $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$. *Обозначим через* $S_n$ *сумму первых* $n$ *членов этого ряда, которую будем называть частной суммой этого ряда. Тогда суммой ряда будем называть предел последовательности частных сумм при* $n \to \infty$. *(Если этот предел существует)*

Таким образом, если сумму ряда обозначить через $S$, то $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ существует и конечен, то будем говорить, что ***ряд сходится***, если он не существует, то ***ряд расходится***.

Общий член последовательности $\{a_n\}$, из которой составлен ряд, будем называть ***общим членом ряда***. Ряды будем записывать сокращенно в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, таким образом, если ряд сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

**Замечание.** *Нумерация членов ряда может начинаться с любого номера*.

В следующих примерах требуется найти сумму ряда или доказать, что ряд расходится.

**Пример 1.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$.

☺ Рассмотрим частную сумму ряда: $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}$.

Чтобы найти предел последовательности частных сумм, нужно преобразовать $S_n$ так, чтобы можно было применять теорему об арифметических свойствах пределов. Эти преобразования проделаем следующим образом

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+...+\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=$$

$$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

Отсюда получим, что $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$. ☻

**Пример 2.** $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n$

☺ Этот ряд хорошо известен, как геометрическая прогрессия. Частная сумма этого ряда равна сумме первых $n$ членов геометрической прогрессии (в случае, если $q\neq 1$): $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}$. Если $|q|<1$, то $q^n\to 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{a}{1-q}$, если $|q|>1$, то $q^n$ - бесконечно большая последовательность (докажите) и ряд расходится.

При $q=1$ получим $S_n=n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$, т.е. ряд расходится. ☻

Так как в парадоксе об Ахиллесе и черепахе время $t$ является суммой геометрической прогрессии, то теперь мы можем сказать, что Ахиллес догонит черепаху через $\frac{5}{4}T$ часов.

**Пример 3.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

☺ Найдем несколько первых частных сумм этого ряда:

$S_0=1$

$S_1=1-1=0$

$S_2=1-1+1=1$

$S_3=1-1+1-1=0$

Очевидно, что последовательность частных сумм состоит из чередующихся единиц и нулей. Как мы уже доказывали, такая последовательность предела не имеет. Ряд расходится. ☻

Приведем простейшие свойства сходящихся числовых рядов.

**Теорема 2.5.1.** *Ряд останется сходящимся (расходящимся), если изменить или отбросить любое фиксированное количество членов ряда.*

► Если обозначить через $S_n$ частную сумму данного ряда и через $S_n^{(1)}$ частную сумму измененного ряда, то эти частные суммы будут связаны соотношением $S_n^{(1)} = S_n + const$, где $const$ не зависит от $n$ для достаточно больших $n$. Отсюда следует, что, если сходится одна из последовательностей частных сумм, то сходится и другая и наоборот. ◄

**Теорема 2.5.2.** *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* $S$ *- его сумма, то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *тоже сходится, причем его сумма равна* $\lambda \cdot S$.

►Обозначим через $S_n^{(1)}$ частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и через $S_n$ частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$. Тогда $S_n = \lambda \cdot S_n^{(1)}$ и, переходя к пределу, получим требуемое. ◄

**Теорема 2.5.3.** *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся, причем* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S^{(1)}$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = S^{(2)}$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *тоже сходится, причем* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = S^{(1)} + S^{(2)}$.

► Обозначим через $S_n^{(1)}$ частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, через $S_n^{(2)}$ частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и через $S_n$ частную сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Тогда, очевидно, $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)}$. Переходя к пределу в этом равенстве, получим требуемое. ◄

**Замечание.** *Легко доказать, что, если один ряд сходится, а второй расходится, то их суммарный ряд расходится. Если же расходятся оба ряда, то суммарный ряд может быть сходящимся и может быть расходящимся.*

**Пример 4.** Пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится (см. пример 7 §4), при этом частные суммы этого ряда стремятся к бесконечности, так как последовательность этих частных сумм возрастающая.

Так как $b_n > a_n,\ n \in \mathbb{N}$, то частные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тем более будут стремиться к бесконечности, следовательно, второй ряд тоже расходиться. Суммарный ряд тоже расходится, так как $a_n + b_n > a_n,\ \ n \in \mathbb{N}$.

**Пример 5.** Пусть $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ и $b_n = -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2^n}$. Ряд с общим членом $b_n$ расходится как суммарный ряд для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$. Таким образом, оба ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расходятся. Но суммарный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ сходится.

**Теорема 2.5.4.** *Если ряды* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходятся к суммам* $S^{(1)}$ *и* $S^{(2)}$ *соответственно и общие члены этих рядов удовлетворяют неравенствам:* $a_n > 0,\ b_n > 0,\ a_n \le b_n$, *то* $S^{(1)} \le S^{(2)}$.

►Доказательство очевидно следует из соответствующего неравенства для частных сумм этих рядов. ◄

Определение суммы ряда можно дать на языке “$\varepsilon$ - $n$”:

*Число $S$ будет **суммой** числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти номер $n_0$ такой, что для любого $n \ge n_0$ выполняется неравенство $|S - S_n| < \varepsilon$.*

Если ряд сходится, то $S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = R_n$ или $S = S_n + R_n$. Ряд $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ будем называть ***остатком*** данного ряда. Очевидно, что, если ряд расходится, то любой его остаток тоже расходится, но, если ряд сходится, то сходится любой остаток, причем $\lim_{n \to \infty} R_n = 0$.

Если ряд сходится, то его сумму можно вычислить приближенно, вычислив частную сумму при достаточно большом *n*, причем остаток дает оценку точности вычисления. Применим это рассуждение к вычислению числа *e*

В 3.3 мы доказали, что $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...+\frac{1}{n!}\right)$, следовательно, число $e$ можно представить в виде ряда $e=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Оценим остаток этого ряда

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+...=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+...\right)<$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+...\right)=\frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n}.$$

Таким образом, справедливо неравенство: $0<R_n<\frac{1}{n!n}$, откуда $R_n=\frac{\theta}{n!n}$, где $0<\theta<1$. ($\theta$ зависит от $n$).

Теперь мы можем записать равенство $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{\theta}{n!n}$. С помощью этого равенства число $e$ нетрудно вычислить с любой точностью, причем остаток дает оценку этой точности. С помощью этого равенства докажем иррациональность числа $e$.

**Теорема 2.5.5.** *Число e иррационально.*

►Предположим, что $e$ - число рациональное, т.е. предположим, что число $e$ можно представить в виде несократимой рациональной дроби $\frac{k}{m}$, где $m\geq 2$. Тогда $\frac{k}{m}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{m!}+\frac{\theta}{m!m}$. Умножая это равенство на $m!$, получим $k(m-1)!=m!+m!+3\cdot 4\cdot ...\cdot m+...+1+\frac{\theta}{m}$. В этом равенстве слева стоит целое число, а справа дробь, так как $0<\frac{\theta}{m}<1$. Следовательно, наше предположение было неверным.◄

**Замечание.** *Мы получили еще один пример последовательности рациональных чисел, не имеющей предела в пространстве рациональных чисел.*

Перефразируем признак Коши сходимости числовой последовательности для рядов.

**Теорема 2.5.6.** *Для того чтобы числовой ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *сходился необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *можно было найти номер* $n_0$ *такой, что для всех* $n\geq n_0$ *и для всех* $p\in\mathbb{N}$ *выполнялось неравенство* $\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon$.

►Для доказательства достаточно вспомнить критерий Коши для числовой последовательности: для сходимости последовательности частных сумм $S_n$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было найти номер $n_0$ такой, что для всех $n \geq n_0$ и для всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$. Так как $S_{n+p} - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k$, то теорема доказана. ◄

**Следствие (Необходимое условие сходимости ряда)**

*Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю.*

► Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Тогда выполнен признак Коши при $p = 1$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ можно найти $n_0$ такой, то для $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\left|S_n - S_{n-1}\right| = \left|a_n\right| < \varepsilon$. ◄

**Замечание.** *Требуется помнить, что обратное утверждение не будет верным. Можно встретить ряды, у которых общий член стремится к нулю и которые при этом расходятся.*

**Пример 6.** Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Воспользуемся критерием Коши для некоторого числа *n* и $p = n$. Напишем очевидное неравенство

$$S_{2n} - S_{n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что какие бы большие *n* мы ни выбирали, мы не сможем сделать разность $S_{n+p} - S_n$ меньшей ε для всех натуральных значений $p$. Ряд расходится.

Этот ряд называется ***гармоническим рядом***.

Итак, если общий член ряда стремится к нулю, то ряд может сходиться и может расходиться. Но, если общий член ряда к нулю не стремится, то ряд расходится. Например, пользуясь этим предложением, мы можем сказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, не исследуя поведение его частных сумм.

## 5.2. Положительные ряды

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и предположим, что $a_n \geq 0$ при всех значениях *n*. Очевидно, что частные суммы такого ряда образуют возрастающую последовательность. Следовательно, если эти суммы ограничены, то эта последовательность имеет конечный предел, и ряд сходится, в противном случае последовательность частных сумм стремится к бесконечности, и ряд расходится. Воспользуемся этим фактом для доказательства некоторых достаточных признаков сходимости рядов с неотрицательными членами.

**Теорема 2.5.7. (Первая теорема сравнения)**

*Пусть даны два ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем* $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ *и для всех n справедливо неравенство* $a_n \leq b_n$. *Тогда, если сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *то сходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и, если расходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *то расходится ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

►Обозначим через $S_n^{(1)}$ и $S_n^{(2)}$ частные суммы рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ соответственно. Тогда, очевидно, выполняется неравенство $S_n^{(1)} \leq S_n^{(2)}$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то существует его сумма $S^{(2)}$ и $S_n^{(2)} \leq S^{(2)}$. Тогда, последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ограничена: $S_n^{(1)} \leq S^{(2)}$, следовательно, она имеет предел и ряд сходится.

С другой стороны, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то последовательность его частных сумм неограниченна, следовательно, последовательность частных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ тоже неограниченна и второй ряд тоже расходится. ◄

**Теорема 2.5.8. (Вторая теорема сравнения)**

*Пусть даны два ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, *причем* $a_n \geq 0$, $b_n > 0$. *Пусть существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$, $l \neq 0$. *Тогда данные ряды либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

►Допустим для определенности, что $l > 0$ и возьмем $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Тогда можно найти $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $b_n(l-\varepsilon) < a_n < b_n(l+\varepsilon)$ или $b_n \frac{l}{2} < a_n < b_n \frac{3l}{2}$. Тогда, если будет сходиться ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то из неравенства $b_n \frac{l}{2} < a_n$ по первой теореме сравнения будет сходиться ряд с общим членом $b_n \frac{l}{2}$, следовательно, будет сходиться и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Наоборот, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, то сходится ряд с общим членом $b_n \frac{3l}{2}$, следовательно, из неравенства $a_n < b_n \frac{3l}{2}$ будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. ◄

**Замечание.** *Нетрудно доказать, что, если $l = 0$, то из сходимости второго ряда следует сходимость первого и из расходимости первого следует расходимость второго. Если $l = \infty$, то из сходимости первого ряда следует сходимость второго и из расходимости второго расходимость первого.*

Для применения этих признаков нужно иметь некоторый запас рядов, с которыми можно сравнивать данные ряды. Для получения целого семейства таких рядов докажем еще один признак сходимости.

**Теорема 2.5.9. (Третья теорема сравнения)**

*Пусть последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает и все ее члены неотрицательны. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.*

►Пусть $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ и $S'_k = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k}$ - частные суммы этих рядов. При $2^k \le n < 2^{k+1}$ получим

$$S_n = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + ... + a_7) + ... + \left(a_{2^k} + ... + a_n\right) \le a_1 + 2a_2 + 4a_4 + ... + 2^k a_{2^k} = S'_k$$

, откуда следует, что, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

С другой стороны, при том же соотношении между $n$ и $k$ получим

$$S_n \ge a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + ... + \left(a_{2^{k-1}+1} + ... + a_{2^k}\right) \ge \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + ... 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{1}{2} S'_{2^k}.$$

Следовательно, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то последовательность частных сумм ряда $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ ограничена, следовательно, он сходится. ◄

Применим третий признак сравнения к исследованию на сходимость ряда вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Для этого надо исследовать ряд $\sum_{k=0}^{\infty}2^k\frac{1}{2^{ks}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k(s-1)}}$, который представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{2^{s-1}}$. Такая прогрессия сходится, если $|q|<1$, т.е. $s>1$ и расходится, если $|q|\geq 1$, т.е. $s\leq 1$.

Таким образом, для применения признаков сравнения к исследованию рядов на сходимость можно использовать геометрическую прогрессию и ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, который называется ***обобщенным гармоническим рядом***.

## §6 Компактные множества

**Определение 2.6.1.** *Пусть $E$ - некоторое множество точек метрического пространства $X$ и $\{G_\alpha\}$- семейство открытых множеств из этого же пространства. Семейство $\{G_\alpha\}$ будем называть* ***открытым покрытием*** *множества $E$, если $E\subset\bigcup_\alpha G_\alpha$.*

**Определение 2.6.2.** *Множество $E$ называется* ***компактным****, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.*

Приведем некоторые свойства компактных множеств.

**Свойство 1**. *Каждое конечное множество компактно.*

Это свойство очевидно.

**Свойство 2**. *Компактное множество замкнуто.*

►Докажем, что дополнение $E^d$ множества $E$ до всего пространства $X$ открыто. Возьмем какую-нибудь точку $y\in E^d$ и для каждой точки $x\in E$ найдем окрестности $U^x(y)$ и $V(x)$ радиуса меньшего $\frac{1}{2}\rho(x,y)$. Тогда $U^x(x)\cap V(x)=\varnothing$. Очевидно, что система окрестностей $\{V(x)\}$ образует открытое покрытие множества $E$. Выберем из этого покрытия конечное $V(x_1),V(x_2),...,V(x_n)$, так что $E\subset V(x_1)\cup V(x_2)\cup...\cup V(x_n)$, тогда множество $U=U^{x_1}(y)\cap U^{x_2}(y)\cap...\cap U^{x_n}(y)$ является окрестностью точки $y$, которая не пересекается ни с одной из окрестностей $V(x_i)$, $i=1,2,...,n$, следовательно, не пересекается с множеством $E$. Значит $E^d$ - открытое множество. ◄

**Свойство 3**. *Замкнутое подмножество компактного множества компактно.*

► Допустим, что $E$ - компактно, а $F\subset E$ замкнуто. Пусть $\{G_\alpha\}$ открытое покрытие множества $F$. Если к этому покрытию присоединить открытое множество $F^d$, то получим открытое покрытие множества $E$, из которого можно выделить конечное покрытие. Очевидно, оно будет конечным покрытием и для множества $F$. ◄

**Свойство 4.** *Компактное множество ограничено.*

► Возьмем некоторое число $r > 0$ и рассмотрим систему окрестностей $U_r(x)$ радиуса $r$, построенных около каждой точки множества $E$. Очевидно, что эта система образует открытое покрытие множества $E$. Выберем конечное покрытие $U(x_1), U(x_2), \ldots U(x_n)$ и возьмем какую-нибудь точку $y \in E$. Положим $R = \max\left(\rho(y, x_1), \rho(y, x_2), \ldots \rho(y, x_n)\right)$. Теперь возьмем произвольную точку $x \in E$. Обозначим через $U(x_k)$ окрестность, в которую входит взятая точка $x$. Тогда $\rho(x, y) \le \rho(x, x_k) + \rho(x_k, y) \le r + R$, что означает, что $x$ входит в шар радиуса $r + R$ с центром в точке $y$ и множество $E$ ограничено.◄

Обратное утверждение не будет верным в любом метрическом пространстве. Но для пространства $\mathbb{R}$ мы докажем следующую теорему

**Теорема 2.6.1. (Гейне – Бореля – Лебега)**

*Множество $E \subset \mathbb{R}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

► Если множество компактно, оно замкнуто и ограничено. (Свойства 2 и 4).

Пусть числовое множество $E$ замкнуто и ограничено. Докажем, что оно компактно. Так как множество $E$ ограничено, то существует отрезок $[a, b]$ такой, что $E \subset [a, b]$. В силу свойства 3 достаточно доказать, что будет компактен отрезок $[a, b]$.

Возьмем какое-нибудь бесконечное открытое покрытие отрезка $[a, b]$ и предположим, что из него невозможно выделить конечное покрытие. Разделим этот отрезок пополам. Тогда хотя бы одну половину будет покрывать бесконечное множество открытых множеств этого покрытия, из которого невозможно выделить конечное. Обозначим эту половину через $[a_1, b_1]$. Продолжая этот процесс, построим систему отрезков $[a_n, b_n]$, ни один из которых нельзя покрыть конечной системой множеств из данного покрытия. С другой стороны, эти отрезки вложены друг в друга: $[a_{n-1}, b_{n-1}] \subset [a_n, b_n]$, $\forall n$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$. Значит, существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам. Обозначим ее через $c$: $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Возьмем какое-нибудь множество данного покрытия, содержащее точку $c$. Так как множество открыто, то точка $c$ внутренняя, следовательно, начиная с некоторого номера, точки $a_n$ и $b_n$ попадут в это множество. Тогда и отрезки $[a_n, b_n]$ тоже попадут в это множество, т.е. каждый такой отрезок будет накрыт только одним множеством из данного покрытия, что противоречит выбору этих отрезков. ◄

Рассмотрим еще одну характеристику компактного множества, которая справедлива в любом пространстве, но чтобы не усложнять рассуждения докажем ее только для пространства $\mathbb{R}$.

**Теорема 2.6.2.** *Множество $E$ компактно тогда и только тогда, когда из любого его бесконечного подмножества можно выделить последовательность, имеющую конечный предел, принадлежащий $E$.*

► Пусть $E \subset \mathbb{R}$ - компактно, тогда по теореме 2.6.1 оно ограничено и замкнуто. Тогда по теореме Больцано-Вейерштрасса любое бесконечное подмножество множества $E$ будет иметь предельную точку, принадлежащую $E$.

Обратно, если из каждого бесконечного подмножества множества $E$ можно выделить последовательность, сходящуюся к конечной точке из $E$, то множество $E$ не может быть неограниченным. В противном случае, найдется последовательность точек из $E$, предел которой равен бесконечности, что противоречит условию.

Кроме того, множество $E$ замкнуто. Пусть $y$ - предельная точка множества $E$. Тогда существует последовательность различных точек $x_n \in E$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$. Но множество $\{x_n\}$ является бесконечным подмножеством множества $E$, следовательно, $y \in E$ и множество $E$ замкнуто. ◄

Две последние теоремы можно объединить в следующее утверждение:

*В пространстве $\mathbb{R}$ три утверждения эквивалентны:*

*1) $E$ - компактно;*

*2) $E$ - ограничено и замкнуто;*

*3) каждое бесконечное подмножество множества $E$ имеет предельную точку, принадлежащую $E$.*

# ГЛАВА III. ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## §1 Функция одной вещественной переменной

### 1.1. Определения

**Определение 3.1.1.** *Пусть дано множество $X \subset \mathbb{R}$. Отображение множества $X$ в $\mathbb{R}$ будем называть* ***вещественнозначной функцией одной вещественной переменной*** *или просто* ***числовой функцией***.

Для функций можно применять общую терминологию, но чаще употребляют специальные термины и специальные обозначения.

*Множество $X$, на котором действует правило, задающее функцию f, называется* ***областью определения функции*** *и обозначается $D(f)$ или $\operatorname{dom} f$ (от латинского слова domus - дом, жилище). Переменную x, которая принимает значения из этой области, будем называть* ***аргументом функции***.

*Образ каждого элемента $x \in D(f)$ называют* ***значением функции***, *а множество $f(D(f))$ -* ***множеством значений*** *или* ***областью изменения функции***. *Область изменения функции обозначают $E(f)$ или $\operatorname{im} f$ (от латинского imago - образ, изображение).*

*Две функции будем называть* ***равными***, *если совпадают их области определения, и для каждого значения аргумента совпадают значения функции.*

**Пример 1.** Функции $y=\sqrt{x^2}$ и $y=|x|$, заданные на всей вещественной оси, совпадают, а функции $y=\sqrt{x}$, $D(f)=[0,+\infty)$ и $y=x$, $D(f)=\mathbb{R}$ различны.

### 1.2. Сложная функция

**Определение 3.1.2.** *Пусть заданы две функции $f(t)$, $D(f)=G_1$, $E(f)=G_2$ и $g(x)$, $D(g)=G_3$, $E(g)=G_4$, причем $G_1 \cap G_4 \neq \varnothing$. Пусть $E=g^{-1}(G_1 \cap G_4)$ - прообраз множества $G_1 \cap G_4$. Очевидно, что $E \subset G_3$. Тогда, взяв некоторое значение $x \in E$, можно найти $t=g(x) \in G_1$ и по найденному значению переменной $t$ найти значение $y=f(t)=f(g(x))$. Таким образом, определена функция, сопоставляющая каждому значению $x \in E$ значение $y \in G_2$, которую называют* ***сложной функцией, композицией или суперпозицией функций***.

**Пример 2.** Функция $\sin(2x-1)$ будет суперпозицией функций $f(t)=\sin t$ и $g(x)=2x-1$.

**Пример 3.** Функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ будет суперпозицией функций $f(t)=\sqrt{t}$, $t \in [0;+\infty)$ и $g(x)=1-x^2$, $x \in [-1;1]$.

## 1.3. График функции

**Определение 3.1.3.** *Множество точек декартовой плоскости, координаты которых связаны соотношением* $y = f(x)$, *называется* ***графиком функции***.

Так как функцией является только такое соответствие, при котором каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, то прямая, проведенная параллельно оси ординат, пересекает график функции не более одного раза.

## 1. 4. Обратная функция

**Определение 3.1.4.** *Пусть функция* $f(x)$ *отображает множество* $D(f)$ *на множество* $E(f)$ *взаимно однозначно. Тогда, функция, которая каждому элементу* $s \in E(f)$ *сопоставляет элемент* $t \in D(f)$ *такой, что* $f(t) = s$, *называется* ***обратной*** *к функции* $f(x)$.

Функцию, обратную к функции $f(x)$, будем обозначать $f^{-1}$. Очевидно, что $D\left(f^{-1}\right) = E(f)$ и $E\left(f^{-1}\right) = D(f)$.

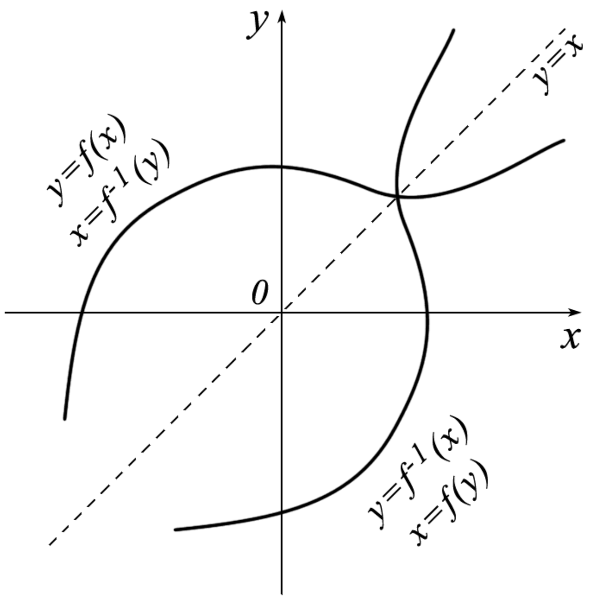
**Пример 4.** Пусть $f(x) = 5 - 2x$, $D(f) = [0;2{,}5]$. Тогда областью изменения этой функции будет промежуток $[0;5]$. Обратная функция $f^{-1}$ каждому числу $y \in [0;5]$ сопоставляет число $x \in [0;2{,}5]$ такое, что $5 - 2x = y$. Можно считать, что уравнение $y = 5 - 2x$ задает эту функцию неявно. Чтобы получить явное задание, нужно выразить переменную $x$ из этого уравнения. Тогда $x = \dfrac{5-y}{2}$. Заменяя букву $x$ на $y$ и $y$ на $x$, получим более привычные для нас обозначения $y = \dfrac{5-x}{2}$ или $f^{-1}(x) = \dfrac{5-x}{2}$.

Если функция имеет обратную, то ее будем называть ***обратимой***. Заметим, что не всякая функция является обратимой. Например, функция $f(x) = x^2$, заданная на всей вещественной оси, не будет обратимой, потому что для всякого числа $s > 0$ можно найти <u>два</u> значения $t$ таких, что $t^2 = s$, следовательно, соответствие $s \to t$ не будет однозначным. В таких случаях часто берут сужение функции, например, если задать $f(x) = x^2$, $D(f) = [0, +\infty)$, то эта функция будет иметь обратную $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $D\left(f^{-1}\right) = [0, +\infty)$.

Сформулируем два свойства обратимых и обратных к ним функций.

**Свойство 1.** $\forall y \in E(f),\ f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ *и* $\forall x \in D(f),\quad f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

**Свойство 2.** *Графики функций* $y = f(x)$ *и* $y = f^{-1}(x)$ *симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.*



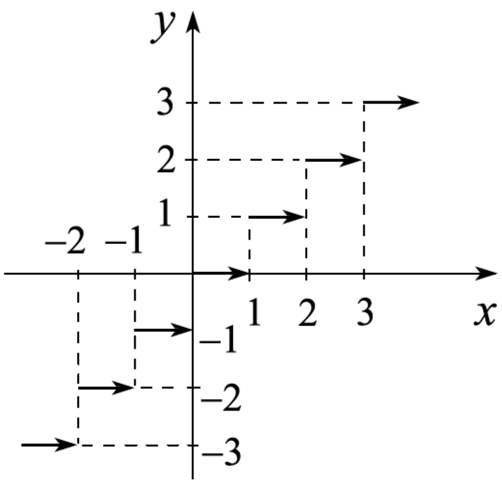

Отметим, что обратная функция может быть записана и в виде $x = f^{-1}(y)$. Тогда ее график будет совпадать с графиком исходной функции.

## 1.5. Способы задания функции

**Способ 1. Описательный**

Правило можно задать словесным описанием действий, которые нужно проделать с аргументом, чтобы получить значение функции или просто перечислением значений функции, которые сопоставляются каждому значению аргумента.

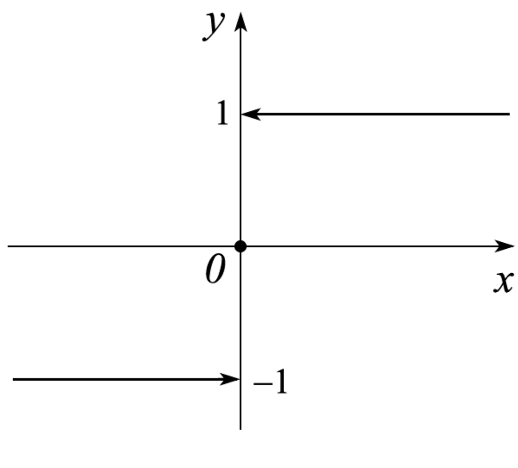
**Пример 5.** Функция $y = [x]$ - целая часть числа $x$.




Пусть $D(f) = \mathbb{R}$. Возьмем $x \in \mathbb{R}$ и найдем целое число $n$ так, чтобы выполнялось неравенство $n \le x < n+1$ (почему это можно сделать?). Тогда $y = [x] = n$. Построим график этой функции. Очевидно, что если $0 \le x < 1$, то $y = 0$. Аналогично, если $1 \le x < 2$, то $y = 1$, если $2 \le x < 3$, то $y = 2$ и т.д., и с отрицательной стороны, если $-1 \le x < 0$, то $y = -1$, если $-2 \le x < -1$, то $y = -2$ и т.д. Получим «ступенчатый график». Область изменения этой функции $E(f) = \mathbb{Z}$ - множество целых чисел.

**Пример 6.** Функция $y = \operatorname{sign} x$ - знак числа $x$.

Положим $y = -1$, если $x < 0$, $y = 1$, если $x > 0$ и $y = 0$, если $x = 0$.
Таким образом,
$D(f) = \mathbb{R}, E(f) = \{-1, 0, 1\}$. График функции представлен на рисунке.



**Пример 7.** ***Функция Дирихле***

$$d\left(x\right)=\begin{cases}1, & x-\text{рациональное число},\\ 0, & x-\text{иррациональное число}.\end{cases}$$

Очевидно, что $D\left(f\right)=R,\ E\left(f\right)=\left\{0,1\right\}$. График такой функции изобразить невозможно.

**Способ 2. Аналитический**

Правило задается формулой, в которой используются некоторые уже изученные простейшие функции и арифметические действия. Например,
$y=\dfrac{2x^2-3x}{x+1}$, $y=\sqrt{1+2\ln x}$, $y=2^{3\arcsin^2 x}$.

Если при таком способе задания не указана область определения, то эта область считается «естественной», т.е. берутся все значения аргумента, для которых возможно выполнить указанные действия. Например, для функции $y=\sqrt{1+2\ln x}$ областью определения будет множество тех значений $x$, для которых верно неравенство $1+2\ln x\geq 0$, т.е. $x\geq e^{-1/2}$.

Иногда функция задается с помощью нескольких выражений.

**Пример 8.** $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2+2x+2, & x\leq -1\\ 2^{x+1}, & -1<x\leq 1.\\ 5-x, & x>1\end{cases}$

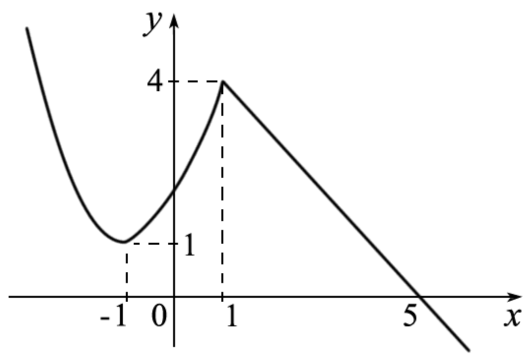



График этой функции представлен справа.

**Способ 3. Графический**

Функцию можно задать с помощью графика. Такое задание функции используется на практике, когда прибор рисует график какой-либо зависимости. Такое задание используется также в изложении курса математики для иллюстрации свойств функций.

**Способ 4. Табличный**

На практике часто снимают дискретные показания приборов и составляют из них таблицу, которая дает значения некоторой зависимой переменной для отдельных дискретных значений аргумента. Такое задание называется табличным. График такой функции будет состоять из отдельных точек, которые можно связать непрерывной кривой, например, графиком многочлена, заменив тем самым имеющуюся функцию многочленом.

**Способ 5. Неявная функция**

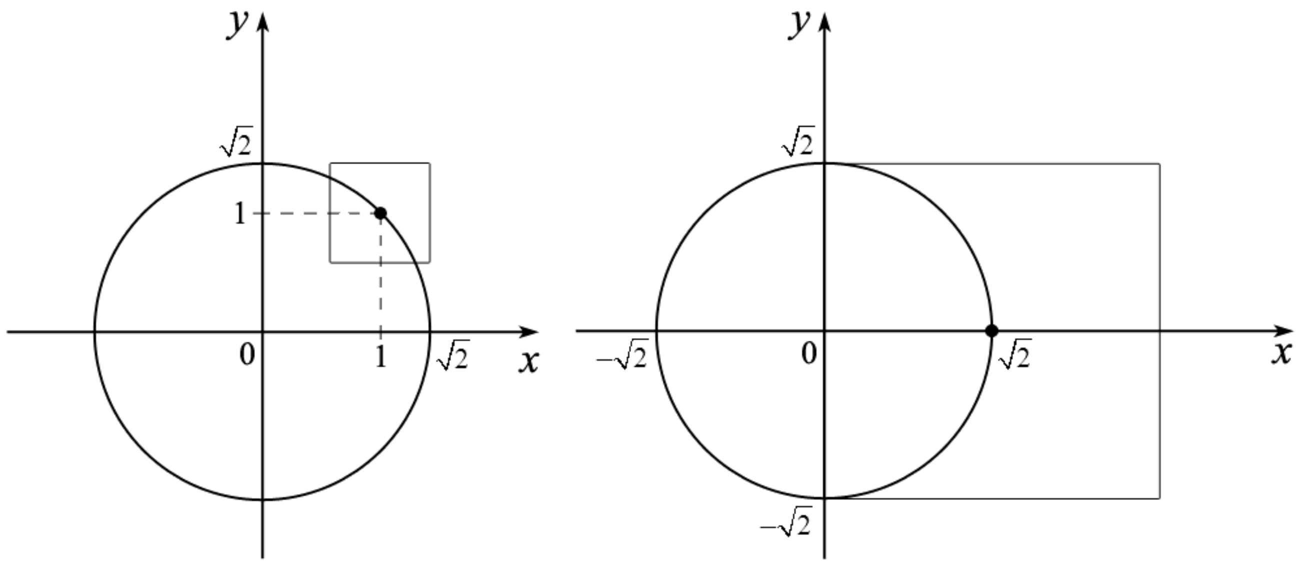
Пусть дано уравнение $F\left(x,y\right)=0$. Допустим, что пара чисел $\left(x_0,y_0\right)$ является решением этого уравнения, т.е. $F\left(x_0,y_0\right)=0$ и в некотором прямоугольнике $P=\{(x,y)\mid x_0-\lambda<x<x_0+\lambda,\ y_0-\sigma<y<y_0+\sigma\}$ для каждого значения $x\in(x_0-\lambda,x_0+\lambda)$ можно найти единственное значение $y(x)\in(y_0-\sigma,y_0+\sigma)$ так, чтобы выполнялось равенство $F(x,y(x))=0$. Тогда будем говорить, что уравнение $F(x,y)=0$ в окрестности точки $(x_0,y_0)$ определяет ***функцию*** $y=y(x)$***, заданную неявно***. (Требования к функции $F(x,y)$, при которых это возможно, будут сформулированы и доказаны в дальнейших частях курса.)

**Пример 9.** Пусть дано уравнение $x^2+y^2=2$ и точка $(x_0,y_0)=(1,1)$. Очевидно, что точка $(1,1)$ удовлетворяет уравнению $x^2+y^2=2$ и в квадрате $P=\{(x,y)\mid 2-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},2-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\}$ каждому значению $x$ из промежутка $\left(2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ будет соответствовать единственное значение $y$ из промежутка $\left(2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$. В данном случае формулу, задающую это соответствие, можно получить явно, выразив $y$ из уравнения $x^2+y^2=2$: $y=\sqrt{2-x^2}$.

**Замечания**

***1.*** *Если не ограничить промежуток значений $y$, в котором мы хотим получить значения функции, то уравнение $F(x,y)=0$ может задавать не одну функцию. Например, уравнение $x^2+y^2=2$ задает для $x\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ две функции $y=\pm\sqrt{2-x^2}$, а также бесконечное множество разрывных функций, где $y$ может равняться $\sqrt{2-x^2}$ для одних значений $x$ и $-\sqrt{2-x^2}$ для других.*

***2.*** *Функция $y=y(x)$ существует не для любой точки $(x_0,y_0)$, удовлетворяющей уравнению $F(x,y)=0$. Например, ни в каком прямоугольнике с центром в точке $\left(\sqrt{2},0\right)$ не существует функции $y=y(x)$, заданной уравнением*



$x^2+y^2=2$. *Полезно заметить, что существует квадрат* $P=\left\{(x,y)\,|\,0<x<2\sqrt{2},\,-\sqrt{2}<y<\sqrt{2}\right\}$, *в котором для каждого* $y\in\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ *можно найти единственное значение* $x=x(y)\in\left(0,2\sqrt{2}\right)$ *такое, что* $x^2(y)+y^2=2$.

**Способ 6. Параметрическое задание функции**

Пусть на некотором множестве $E$ заданы две функции $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, причем функция $x=\varphi(t)$ обратима. Если можно образовать сложную функцию $f(x)=\psi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, то будем говорить, что уравнения $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$ определяют ***функцию*** $f(x)$***, заданную параметрически***.

**Пример 10.** Пусть даны уравнения $x=R\cos t,\ y=R\sin t,\ t\in[0,\pi]$. Тогда $t=\arccos\dfrac{x}{R}$ и $y=R\sin\arccos\dfrac{x}{R}=R\sqrt{1-\cos^2\arccos\dfrac{x}{R}}=R\sqrt{1-\dfrac{x^2}{R^2}}=\sqrt{R^2-x^2}$. Таким образом, данные уравнения определяют функцию $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.

**Замечания**

***1.*** *Если функция* $x=\varphi(t)$ *не является обратимой, но обратима функция* $y=\psi(t)$, *то можно говорить, что эти уравнения задают параметрически функцию* $x=\varphi\left(\psi^{-1}(y)\right)$.

***2.*** *На практике очень редко уравнения* $x=\varphi(t)$ *и* $y=\psi(t)$ *задают функцию, так как они редко являются обратимыми. Но обычно область задания параметра – множество* $E$ *можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых существует функция* $f(x)$ *или* $g(y)$. *В таком случае можно говорить о параметрическом задании кривой, являющейся объединением графиков всех этих функций.*

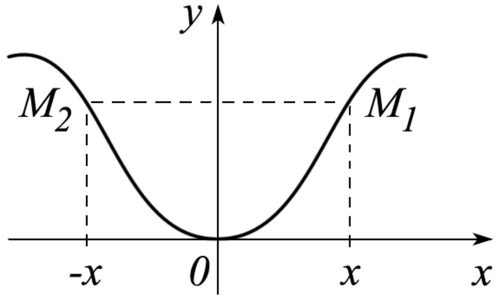
## 1.6. Основные свойства функций

***Четность-нечетность***

**Определение 3.1.5**. *Функция* $y=f(x)$ *называется* ***четной***, *если*

*1.* $\forall x\in D(f)\ \ (-x)\in D(f)$,

*2.* $\forall x\in D(f)\ \ f(-x)=f(x)$.



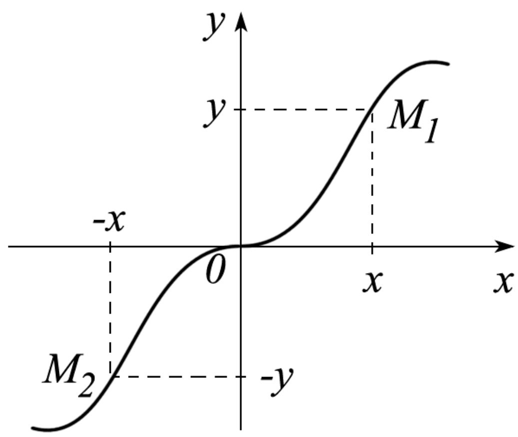

Первое условие в определении означает, что $D(f)$ - область определения четной функции, симметрична относительно начала координат.

Из определения четной функции следует,

что, если точка $M_1(x,y)$ лежит на графике функции, то точка $M_2(-x,y)$ тоже лежит на графике этой функции, следовательно, график четной функции будет симметричен относительно оси $OY$.

**Определение 3.1.6**. *Функция $y=f(x)$ называется **нечетной**, если*

1. $\forall x\in D(f)\ \ (-x)\in D(f)$,
2. $\forall x\in D(f)\ \ f(-x)=-f(x)$.




Область определения нечетной функции тоже симметрична относительно начала координат и, если точка $M_1(x,y)$ лежит на графике функции, то на этом же графике будет лежать точка $M_2(-x,-y)$. Следовательно, график будет симметричен относительно начала координат.

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными.

***Монотонность***

**Определение 3.1.7**. *Будем говорить, что функция $y=f(x)$ **возрастает** на множестве $E$, если для любых значений $x_1,x_2\in E$ таких, что $x_1>x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.*

**Определение 3.1.8**. *Будем говорить, что функция $y=f(x)$ **убывает** на множестве $E$, если для любых значений $x_1,x_2\in E$ таких, что $x_1>x_2$, выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.*

Возрастающие и убывающие на множестве $E$ функции называют ***монотонными*** на этом множестве.

В определениях 3.1.7 и 3.1.8 можно рассматривать нестрогие неравенства $f(x_1)\geq f(x_2)$ или $f(x_1)\leq f(x_2)$. Тогда говорят, что имеется ***нестрогая монотонность*** или функция является ***неубывающей*** или, соответственно, ***невозрастающей***.

**Замечание.** *Полезно заметить, что если функция строго монотонна на всей области определения, то она взаимно однозначно отображает множество $D(f)$ на множество $E(f)$, поэтому строго монотонная на области определения функция обратима.*

***Периодичность***

**Определение 3.1.9**. *Функция $y=f(x)$ называется **периодической**, если существует число $T\neq 0$, такое что*

1. $\forall x\in D(f)\ \ x\pm T\in D(f)$,
2. $\forall x\in D(f)\ \ f(x+T)=f(x)$.

Число $T$, указанное в определении, называется ***периодом функции***. Наименьший положительный период называется ***главным периодом***.

Если некоторое число $T$ является периодом функции, то число $kT$ при любом $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ тоже является периодом.

***Ограниченность функций***

**Определение 3.1.10**. *Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** на множестве $E$, если ограниченно множество ее значений на $E$.*
Таким образом, $f(x)$ - ограничена на $E$, если выполнено одно из условий

а) $\exists C \quad \forall x \in E: \ |f(x)| \leq C$

или

в) $\exists m, M \quad \forall x \in E: \ m \leq f(x) \leq M$.

Числа $m$ и $M$ называются, соответственно, ***нижней*** и ***верхней границами*** функции на множестве $E$.

Как и ранее, точную нижнюю границу функции называют ***нижней гранью*** или ***инфимумом***, а точную верхнюю – ***верхней гранью*** или ***супремумом*** функции на множестве $E$.

Таким образом

$$m = \inf_{x \in E} f(x) \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \ \forall x \in E \ \ f(x) \geq m \\ 2)\ \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in E \ \ f(x) < m + \varepsilon \end{array}$$

и

$$M = \sup_{x \in E} f(x) \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1)\ \ \forall x \in E \ f(x) \leq M \\ 2)\ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists x \in E \ \ f(x) > M - \varepsilon \end{array}.$$

Если на множестве $E$ найдется значение $x_0$ такое, что $f(x_0) \geq f(x)$ для всякого $x \in E$, то значение $f(x_0)$ называют ***наибольшим значением функции*** на множестве $E$. Соответственно, если $f(x_0) \leq f(x)$ для всякого $x \in E$, то значение $f(x_0)$ называют ***наименьшим значением функции*** на множестве $E$.

Эти факты мы будем записывать в виде $f(x_0) = \max_{x \in E} f(x)$ или, соответственно, $f(x_0) = \min_{x \in E} f(x)$.

Ясно, что, если наибольшее и наименьшее значения функции на $E$ существуют, то $\inf_{x \in E} f(x) = \min_{x \in E} f(x)$ и $\sup_{x \in E} f(x) = \max_{x \in E} f(x)$.

## §2 Определения предела функции

В этом параграфе везде будем считать, что точка $x_0$ является предельной точкой области определения функции. Сама она может принадлежать области определения и может не принадлежать ей.

## 2.1. Определение предела функции по Коши

**Определение 3.2.1.** *Число* $A$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ *при* $x$, *стремящемся к* $x_0$ *(или в точке* $x_0$*), если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно найти число* $\delta > 0$ *так, что для всех значений* $x \in D(f)$, *для которых выполнено неравенство* $0 < |x - x_0| < \delta$, *справедливо неравенство* $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что $A$ является пределом функции в точке $x_0$, записывается следующим образом: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} A$.

Напомним, что неравенство $|t - t_0| < r$ задает на вещественной прямой окрестность точки $t_0$ радиуса $r$, а неравенство $0 < |t - t_0| < \delta$ задает проколотую окрестность. Поэтому сформулированное определение можно изложить на геометрическом языке следующим образом:

**Определение 3.2.1(а).** *Точка* $A$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ *при* $x$, *стремящемся к* $x_0$, *если для любой* $\varepsilon$ *- окрестности точки* $A$ *можно найти такое число* $\delta > 0$, *что для всякого значения* $x$ *из области определения функции и входящего в проколотую* $\delta$ *- окрестность точки* $x_0$, *значения функции будут лежать в* $\varepsilon$ *- окрестности точки* $A$.

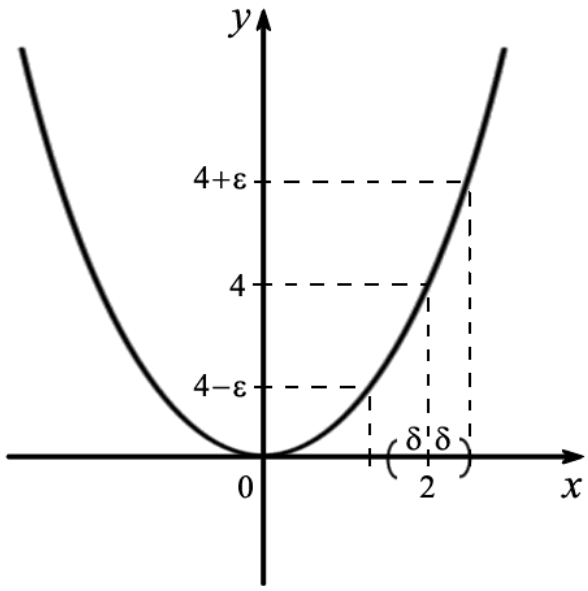
Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1**. Докажем, что $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$.

☺ Здесь $x_0 = \dfrac{1}{2}$, $A = 2$. Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем те значения $x$, для которых будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2\right| < \varepsilon$. Очевидно, что если $x \neq \dfrac{1}{2}$, то дробь можно сократить, тогда неравенство преобразуется в неравенство $|(2x + 1) - 2| < \varepsilon$ или $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Это означает, что взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\left|x - \dfrac{1}{2}\right| < \delta$, $x \neq \dfrac{1}{2}$, то значения функции будут удовлетворять неравенству $\left|\dfrac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2\right| < \varepsilon$, т.е. лежать в $\varepsilon$ - окрестности точки 2. ☻

**Пример 2**. Докажем что $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

☺ Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем значения $x$, при которых выполняется неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Будем считать, что $\varepsilon < 4$. Тогда, решая это неравенство, получим $\sqrt{4 - \varepsilon} < |x| < \sqrt{4 + \varepsilon}$. Последнее неравенство задает два промежутка, причем точка $x_0 = 2$ лежит на том из них, который находится на положительной полуоси. Возьмем $\delta = \min\left(2 - \sqrt{4 - \varepsilon}, \sqrt{4 + \varepsilon} - 2\right)$. Тогда проколотая $\delta$ - окрестность точки $x_0 = 2$ входит в найденное множество решений неравенства $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. ☻




Решая предыдущий пример, мы видели, что неравенство $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ должно являться только следствием неравенства $0 < \left|x - x_0\right| < \delta$, поэтому неравенство $\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$ вовсе необязательно решать точно.

Можно было, например, поступить следующим образом. Возьмем неравенство $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$ и запишем его в виде $\left|x - 2\right| \cdot \left|x + 2\right| < \varepsilon$. Далее, предположим, что мы будем рассматривать только те значения $x$, которые лежат на промежутке $(1,3)$. Тогда будет справедливо неравенство $\left|x - 2\right| \cdot \left|x + 2\right| < 5\left|x - 2\right|$ и, следовательно, если потребовать, чтобы выполнялось неравенство $5\left|x - 2\right| < \varepsilon$, то для этих значений $x$ будет справедливо $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$. Это означает, что, если взять $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{5}\right)$, то для всех значений $x$ из проколотой $\delta$-окрестности точки 2, будет верно неравенство $\left|x^2 - 4\right| < \varepsilon$, что и требуется для того, чтобы число 4 было пределом функции $x^2$ при $x$, стремящемся к 2.

## 2.2. Определение предела функции по Гейне

**Определение 3.2.2.** *Число $A$ называется* ***пределом функции*** *$f(x)$ при $x$, стремящемся к $x_0$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек, взятых из области определения функции, сходящейся к $x_0$, последовательность значений функции $f(x_n)$ будет стремиться к числу $A$.*

Это определение не всегда удобно для доказательства того, что некоторое число <u>является</u> пределом функции в заданной точке, так как часто невозможно перебрать все требуемые последовательности $\{x_n\}$, но это определение очень удобно для доказательства того, что взятое число не является пределом функции или того, что функция вообще не имеет предела при $x \to x_0$.

**Пример 3.** Докажем, что функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

☺ Возьмем последовательность $x'_n = \frac{1}{\pi n}$. Тогда $\sin\frac{1}{x'_n} = \sin \pi n = 0$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x'_n} = 0$.

Теперь возьмем другую последовательность $x''_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}$. Тогда $\sin\frac{1}{x''_n} = \sin\frac{\pi(4n+1)}{2} = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{x''_n} = 1$.

Отсюда следует, что предела функции в точке 0 не существует. ☻

**Замечание.** *Если для некоторой последовательности* $\{x_n\}$, *такой что* $x_n \in D(f)$ *и* $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$ *последовательность* $f(x_n)$ *будет стремиться к числу* $A$, *то число* $A$ *будем называть* ***частичным пределом*** *функции в точке* $x_0$.

**Теорема 3.2.1**. *Функция имеет предел в точке* $x_0$ *тогда и только тогда, когда любая последовательность* $\{f(x_n)\}$, *где* $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *сходится.*

►Допустим, что для любой последовательности $\{x_n\}$ такой, что $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится. Возьмем две последовательности $\{x'_n\}$ и $\{x''_n\}$ значений аргумента функции, удовлетворяющие этим условиям, и предположим, что последовательности $\{f(x'_n)\}$ и $\{f(x''_n)\}$ имеют разные пределы. Образуем из этих значений последовательность $f(x'_1), f(x''_1), f(x'_2), f(x''_2), \ldots$

Очевидно, что последовательность значений аргумента $x'_1, x''_1, x'_2, x''_2, x'_3, x''_3, \ldots$ сходится к $x_0$, но последовательность значений функции в этой точке не имеет предела, так как она имеет два различных частичных предела. Это противоречит условию теоремы.

В обратную сторону теорема очевидна. ◄

## 2.3. Эквивалентность определений

**Теорема 3.2.2.** *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

►Сначала докажем, что если число $A$ является пределом функции по Коши в точке $x_0$, то оно является пределом функции и по Гейне в этой же точке. Возьмем некоторую последовательность $x_n$ значений аргумента $x$ такую что $x_n \in D(f)$, $x_n \neq x_0$ и $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$.

Далее, возьмем число $\varepsilon > 0$ и найдем $\delta > 0$ так, чтобы для значений $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, было справедливо неравенство

$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$. По найденному $\delta$ можно найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $0<\left|x_n-x_0\right|<\delta$, т.е. члены последовательности $x_n$ будут лежать в проколотой $\delta$- окрестности точки $x_0$. Следовательно, для них будет выполнено: $\left|f(x_n)-A\right|<\varepsilon$, что означает, что число $A$ является пределом последовательности $f(x_n)$.

Теперь предположим, что число $A$ является пределом функции $f(x)$ в точке $x_0$ в смысле определения по Гейне, но не является пределом этой же функции в смысле определения по Коши. Это означает, что можно найти $\varepsilon_0>0$ такое, что какое бы $\delta>0$ мы ни взяли, найдется значение $x_\delta \in D(f)$, удовлетворяющее неравенству $0<\left|x_\delta - x_0\right|<\delta$ и такое, что справедливо неравенство $\left|f(x_\delta)-A\right|\ge\varepsilon_0$.

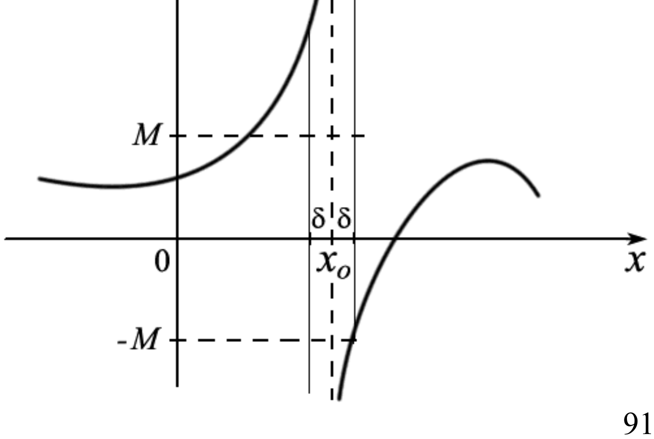
Возьмем последовательность $\delta_n=\frac{1}{n}$ и для каждого $\delta_n$ найдем соответствующее значение $x_n$. Тогда, так как каждое из этих значений удовлетворяет неравенству $\left|x_n-x_0\right|<\frac{1}{n}$, то $x_n \underset{n\to\infty}{\to} x_0$, но, с другой стороны для каждого из них будет выполняться неравенство $\left|f(x_n)-A\right|\ge\varepsilon_0$, что противоречит тому, что число $A$ является пределом функции по Гейне. ◄

## 2.4. Бесконечные пределы

**Определение 3.2.3**. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ ***стремится к бесконечности*** *при x, стремящемся к* $x_0$*, если для любого числа* $M>0$ *можно найти* $\delta>0$ *так, что, если значение x удовлетворяет условиям:* $x\in D(f)$, $0<\left|x-x_0\right|<\delta$*, то справедливо неравенство* $\left|f(x)\right|>M$.

Если функция стремится к бесконечности в некоторой точке, то она называется ***бесконечно большой*** в этой точке.

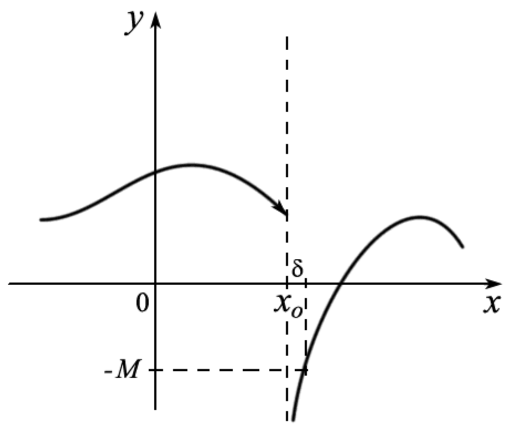
Этот факт записывается следующим образом: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

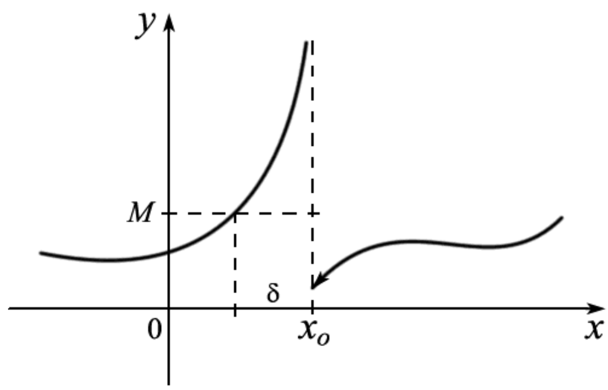



Неравенство $\left|f(x)\right|>M$ означает, что $f(x)\in(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$. Так как объединение $(-\infty,-M)\cup(M,+\infty)$ называют окрестностью бесконечности, то определение бесконечно большой функции сводится к определению 3.2.1(а) при $A=\infty$.

Можно рассматривать «односторонние» окрестности бесконечности $(-\infty,-M)$ или $(M,+\infty)$. Тогда, будем говорить, что функция стремится к $-\infty$, если для любого числа $M>0$ можно найти $\delta>0$ так, что, если значения $x$ удовлетворяют условиям: $x\in D(f)$, $0<|x-x_0|<\delta$, то $f(x)\in(-\infty,-M)$ и будем говорить, что функция стремится к $+\infty$, если для любого числа $M>0$ можно найти $\delta>0$ так, что, если значения $x$ удовлетворяют условиям: $x\in D(f)$, $0<|x-x_0|<\delta$, то $f(x)\in(M,+\infty)$. Соответствующие рисунки приведены на следующей странице.

Это записывается, соответственно, так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.




**Пример 4**. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2-1}=\infty$.

☺ Возьмем $M>0$ и попытаемся найти окрестность точки $x_0=1$ такую, что для всякого значения $x$ из этой окрестности будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|>M$. Для этого сначала предположим, что $0<x<2$. Тогда $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|=\dfrac{1}{|x+1||x-1|}>\dfrac{1}{3|x-1|}$ и, если взять $\delta=\min\left(1,\dfrac{1}{3M}\right)$, то для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $|x-1|<\delta$ будет выполняться неравенство $\dfrac{1}{3|x-1|}>M$, следовательно, будет верно $\left|\dfrac{1}{x^2-1}\right|>M$. ☻

**Пример 5.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$.

☺ Возьмем $M>0$ и найдем окрестность точки $x_0=1$ такую, что для всякого значения $x$ из этой окрестности будет выполняться неравенство $\dfrac{1}{(x-1)^2}>M$. Решая последнее неравенство, получим $|x-1|<\dfrac{1}{\sqrt{M}}$, следовательно, если взять $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, то из условия $x \in U_\delta(1)$ будет следовать $f(x) \in (M, +\infty)$. ☻

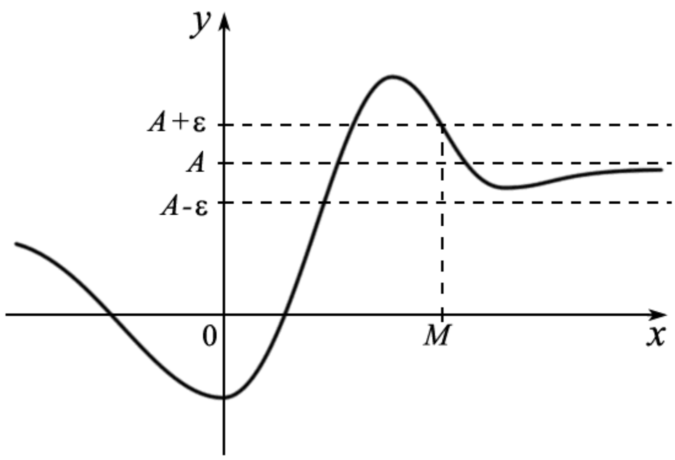
**Пример 6.** Доказать, что $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{(x+1)^2 (x-2)} = -\infty$.

☺ Возьмем $M > 0$ и найдем окрестность точки $x_0 = -1$ такую, что для всякого значения $x$ из этой окрестности будет выполняться неравенство $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-2)} < -M$. Предположим, что $-2 < x < 0$. Тогда $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-2)} < \dfrac{-1}{4(x+1)^2}$ и, если взять $\delta = \min\left(1, \dfrac{1}{2\sqrt{M}}\right)$, то для всех значений $x$, удовлетворяющих неравенству $|x+1| < \delta$ будет справедливо неравенство $\dfrac{-1}{4(x+1)^2} < -M$, следовательно, будет верно $\dfrac{1}{(x+1)^2(x-2)} < -M$. ☻

## 2.5. Пределы на бесконечности

**Определение 3.2.4.** *Будем говорить, что число $A$ является* ***пределом*** *функции $f(x)$* ***при x, стремящемся к бесконечности****, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\sigma > 0$ так, что для всех значений $x \in D(f)$, для которых выполнено неравенство $|x| > \sigma$, справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Это означает, что взяв произвольную $\varepsilon$-окрестность точки $A$ - $U_\varepsilon(A)$на оси ординат, можно найти окрестность бесконечности на оси абсцисс так, что для всех значений аргумента функции, взятых из этой окрестности бесконечности, значения функции будут лежать в $U_\varepsilon(A)$.




Если значения аргумента брать только из промежутка $(-\infty, -\sigma)$ или только из $(\sigma, +\infty)$, то будем говорить о пределе при $x$, стремящемся к $-\infty$ (минус бесконечности) или, соответственно, к $+\infty$ (плюс бесконечности).

**Пример 7.** Доказать, что $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2 - 3} = \dfrac{1}{2}$.

☺ Возьмем $\varepsilon > 0$ и найдем окрестность бесконечности такую, что для всех значений $x$ из этой окрестности будет выполняться неравенство $\left|\frac{x^2+1}{2x^2-3}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

Для этого преобразуем выражение, стоящее под знаком модуля: $\frac{x^2+1}{2x^2-3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{2\left(2x^2-3\right)}$ и допустим, что $|x| > \sqrt{\frac{3}{2}}$. Тогда неравенство $\left|\frac{x^2+1}{2x^2-3}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ примет вид $\frac{5}{2\left(2x^2-3\right)} < \varepsilon$ и его решением будет множество $|x| > \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{3}{2}}$. Следовательно, если положить $\sigma = \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}+\frac{3}{2}}$, то для всех $x \in U_\sigma(\infty)$ будет выполняться неравенство $\left|\frac{x^2+1}{2x^2-3}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. ☻

**Упражнение.** Сформулируйте на языке окрестностей следующие факты:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;
d) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

## 2.6. Односторонние пределы

**Определение 3.2.5.** *Допустим, что в любой окрестности точки $x_0$ существуют точки из области определения функции $f(x)$, лежащие слева от $x_0$, т.е. $x < x_0$. Будем говорить, что число $A$ является **пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к $x_0$ слева** , если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ так, что для всех значений $x \in D(f)$, для которых выполнено неравенство $x_0-\delta < x < x_0$, справедливо неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.*

***Определение 3.2.6.*** *Аналогично, допустим, что в любой окрестности точки $x_0$ существуют точки из области определения функции $f(x)$, лежащие справа от $x_0$, т.е. $x > x_0$. Будем говорить, что число $A$ является **пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к $x_0$ справа**, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ так, что для всех значений $x \in D(f)$, для которых выполнено неравенство $x_0 < x < x_0+\delta$, справедливо неравенство $|f(x)-A| < \varepsilon$.*

Тот факт, что $A$ является пределом функции в точке $x_0$ слева или справа, записывается следующим образом: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$.

Для этих пределов также будем применять обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$.

**Пример 8.** Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1 \quad \lim\limits_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1$.

☺ Действительно, возьмем $\varepsilon > 0$ и какое-нибудь $\delta > 0$. Тогда, если $x$ удовлетворяет условию $-\delta < x < 0$, то $|\operatorname{sign} x + 1| = 0 < \varepsilon$ и, если $x$ удовлетворяет условию $0 < x < \delta$, то $|\operatorname{sign} x - 1| = 0 < \varepsilon$. ☻

**Теорема 3.2.3.** *Функция имеет конечный предел в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные пределы слева и справа и они равны между собой.*

(Докажите самостоятельно).

**Замечания**

***1.*** *Пределы функции при x, стремящемся к $-\infty$ или к $+\infty$, можно считать односторонними пределами функции на бесконечности.*

***2.*** *Можно определить бесконечные односторонние пределы в конечной точке: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty$.*

***3.*** *Все особые случаи пределов (бесконечные и односторонние) можно сформулировать на языке последовательностей (по Гейне).*

***4.*** *Введенный ранее (глава 2) предел последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции, определенной на множестве натуральных чисел при $n \to +\infty$.*

## §3 Свойства пределов функции

### 3.1. Ограниченность функции, имеющей предел

**Теорема 3.3.1.** *Если функция имеет конечный предел в точке $x_0$, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

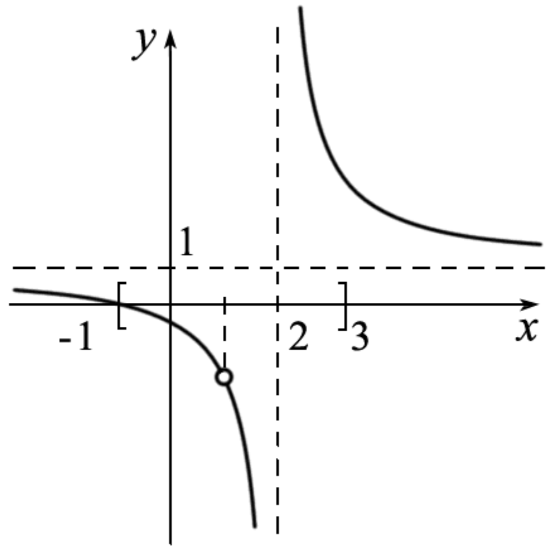
►Для доказательства достаточно взять какое-нибудь значение ε, например, $\varepsilon = 1$. Тогда существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что для всех значений $x \in D(f) \cap \overset{o}{U}(x_0)$ будет выполняться неравенство $A - 1 < f(x) < A + 1$, где $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$. Если существует значение $f(x_0)$, то в найденной окрестности функция будет ограничена числами $\min\left(A-1, f(x_0)\right)$ и $\max\left(A+1, f(x_0)\right)$.
◄

**Замечания**

***1.*** *В теореме утверждается, что свойство ограниченности функции, имеющей предел в некоторой точке, локальное, т.е. выполняется только в окрестности этой точки. Легко построить пример функции, которая не будет ограничена даже на ограниченном множестве вещественной оси.*

*2.* *Утверждение теоремы верно и для случая* $x_0 = \infty$.

**Пример 1**. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x-2)}$.




Если $x \neq 1$, то $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, в точке $x = 1$ функция не определена. В некоторой окрестности точки $x = 1$ функция ограничена, но она не является ограниченной, например, на промежутке $[-1,3]$. График данной функции представлен на рисунке.

### 3.2. Предельный переход в неравенстве

**Теорема 3.3.2.** *Пусть две функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}(x_0)$ *точки* $x_0$, *причем для всех значений* $x$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x) \leq g(x)$. *Допустим, что существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$. *Тогда* $A \leq B$.

►Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n \in \overset{0}{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Тогда, используя определение предела функции по Гейне, получим: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n \to \infty} g(x_n) = B$. Так как $f(x_n) \leq g(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то по теореме о предельном переходе в неравенстве для последовательности, получим $A \leq B$. ◄

### 3.3. Теорема о сжатой переменной

**Теорема 3.3.3.** *Пусть в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}(x_0)$ *точки* $x_0$ *определены три функции* $f(x)$, $g(x)$ *и* $h(x)$, *причем для всех значений* $x$ *из этой окрестности выполняется неравенство* $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$. *Допустим, что существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$. *Тогда существует* $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$.

► Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ такую, что $x_n \in \overset{0}{U}(x_0)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$. Используя определение предела функции по Гейне, получим: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. Так как $f(x_n) \le h(x_n) \le g(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$, то по теореме о сжатой переменной для последовательности, получим $\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n) = A$. ◄

### 3.4. Теорема отделимости от нуля

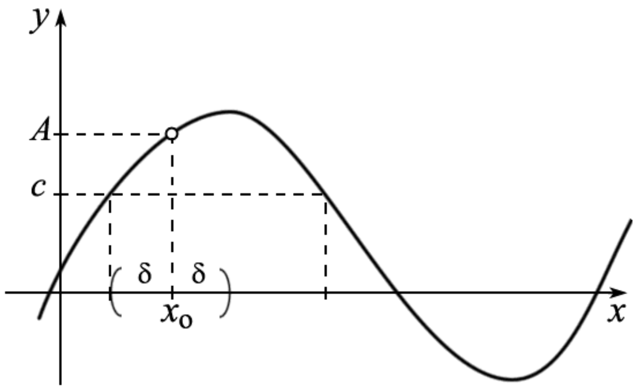
**Теорема 3.3.4.** *Пусть в точке $x_0$ существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, причем $A > 0$. Тогда существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap D(f)$ будет выполняться неравенство $f(x) > 0$.*

► Возьмем $\varepsilon = \dfrac{A}{2}$. По определению предела функции по Коши, можно найти окрестность $U(x_0)$ такую, что для всех значений $x$, принадлежащих множеству $\overset{o}{U}(x_0) \cap D(f)$, будет выполняться неравенство $A - \dfrac{A}{2} < f(x) < A + \dfrac{A}{2}$. Из левой части этого неравенства следует, что для этих значений $x$ будет $f(x) > 0$. ◄

**Замечания**

***1.*** *Если в условиях теоремы положить $A < 0$, то для соответствующих значений $x$ будет выполнено $f(x) < 0$.*

***2.*** *Из этой теоремы следует, что если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ne 0$, то в некоторой окрестности точки $x_0$ функция будет, не только отлична от нуля, но можно найти число $c > 0$ так, что $|f(x)| > c$.*




*Тогда в этой окрестности функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ будет ограничена.*

***3.*** *Теорему можно усилить, сформулировав ее следующим образом: Пусть в точке $x_0$ существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, причем $A > B$. Тогда существует окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$ такая, что $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap D(f)$ будет выполняться неравенство $f(x) > B$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть функцию $f_1(x) = f(x) - B$.

### 3.5. Арифметические свойства пределов

**Теорема 3.3.5.** *Пусть существуют конечные пределы* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. *Тогда существуют пределы суммы, произведения, частного этих функций, причем*

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

*Последнее равенство справедливо при условии* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$ .

►Для доказательства достаточно взять произвольную последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента этих функций, сходящуюся к $x_0$, и воспользоваться определением предела функции по Гейне и соответствующим свойством предела последовательности. ◄

**Замечание.** *Все доказанные теоремы §3 справедливы и для* $x_0=\infty$.

### 3.6. Пределы монотонной функции

**Теорема 3.3.6.** *Пусть функция* $f(x)$ *определена на некотором промежутке* $\langle a,b\rangle$, *причем на этом промежутке она монотонно возрастает. Тогда в каждой внутренней точке этого промежутка* $x_0$ *существуют пределы этой функции слева и справа:* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0+0)$, *причем* $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$.

►Рассмотрим промежуток $(a,x_0)$. На этом промежутке функция будет ограничена сверху, так как $\forall x\in(a,x_0)$ выполняется неравенство $f(x)\le f(x_0)$. Следовательно, существует число $M=\sup\limits_{x\in(a,x_0)} f(x)$. Докажем, что $M=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$.

По определению точной верхней границы имеем

1) $f(x)\le M,\quad \forall x\in(a,x_0)$,

2) $\forall\varepsilon>0\quad \exists x_\varepsilon\in(a,x_0)\quad f(x_\varepsilon)>M-\varepsilon$.

Тогда для всех значений $x$, лежащих на промежутке $(x_\varepsilon,x_0)$, будет выполняться неравенство $M-\varepsilon<f(x_\varepsilon)\le f(x)\le M$. Таким образом, по $\varepsilon>0$ мы нашли $\delta=x_0-x_\varepsilon$ так, что, если взять значения $x$ из $\delta$ - окрестности точки $x_0$ и $x<x_0$, то соответствующие им значения функции попадут в $\varepsilon$ - окрестность точки $M$ . Мы доказали, что $M=f(x_0-0)$, следовательно, $f(x_0-0)\le f(x_0)$.

Аналогично доказывается, что существует $f\left(x_0+0\right)=\inf\limits_{x\in\left(x_0,b\right)} f\left(x\right)$ и справедливо неравенство $f\left(x_0\right)\le f\left(x_0+0\right)$. ◄

**Замечания**

***1.*** *Теорема справедлива и в случае, когда функция $f\left(x\right)$ монотонно убывает. Тогда будет верным неравенство $f\left(x_0-0\right)\ge f\left(x_0\right)\ge f\left(x_0+0\right)$.*

***2.*** *Если монотонная функция задана на замкнутом промежутке $\left[a,b\right]$, то в точке $a$ существует правосторонний предел, а в точке $b$ - левосторонний.*

***3.*** *Теорема будет справедлива и на открытом промежутке, конечном или бесконечном. Причем, если функция возрастает и ограничена сверху, то на правом конце промежутка существует ее конечный односторонний предел, если она возрастает и неограниченна, то ее левосторонний предел на этом конце равен $+\infty$. Если она возрастает и ограничена снизу, то на левом конце промежутка существует конечный предел и этот предел равен $-\infty$, если функция неограниченна. Аналогичное утверждение можно сформулировать и для убывающей функции.*

## 3.7. Бесконечно малые функции. Критерий существования предела

**Определение 3.3.1.** *Функция $\alpha\left(x\right)$ называется **бесконечно малой** в точке $x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha\left(x\right)=0$.*

Очевидно, что для бесконечно малых функций выполняются те же свойства, что и для бесконечно малых последовательностей.

**Свойство 1.** *Сумма конечного числа бесконечно малых в точке $x_0$ функций есть бесконечно малая функция.*

**Свойство 2.** *Произведение бесконечно малой в точке $x_0$ функции на функцию, ограниченную в некоторой окрестности этой точки есть бесконечно малая в этой точке функция.*

**Свойство 3.** *Пусть функция $\alpha\left(x\right)\ne 0$ в некоторой окрестности точки $x_0$. Тогда $\alpha\left(x\right)$ будет бесконечно малой в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда функция $\sigma\left(x\right)=\dfrac{1}{\alpha\left(x\right)}$ будет бесконечно большой в этой точке.*

Также как и для предела последовательности, справедлив следующий критерий того, что число $A$ будет пределом функции в точке $x_0$:

**Теорема 3.3.7.** *Для того чтобы число $A$ было пределом функции $f\left(x\right)$ в точке $x_0$ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности точки $x_0$ функцию можно было представить в виде $f\left(x\right)=A+\alpha\left(x\right)$, где $\alpha\left(x\right)$ - бесконечно малая в точке $x_0$ функция.*

Доказательство очевидно следует из любого из определений предела функции.

## 3.8. Критерий Коши

**Теорема 3.3.8.** *Для того чтобы функция* $f(x)$ *имела конечный предел в точке* $x_0$ *необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *можно было найти* $\delta > 0$ *так, что для любых двух значений* $x'$ *и* $x''$ *из множества* $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ *выполнялось неравенство* $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

► *Необходимость.* Предположим, что функция $f(x)$ в точке $x_0$ имеет предел, равный $A$. Тогда, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, можно найти $\delta > 0$ так, что, если $x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$, то будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Возьмем два значения $x'$ и $x''$ из множества $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$. Тогда будет справедливо $|f(x') - f(x'')| \le |f(x') - A| + |f(x'') - A| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

*Достаточность.* Допустим, что выполнено условие, сформулированное в теореме, т.е. по $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что для любых двух значений $x'$ и $x''$ из множества $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$ будет выполняться неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Возьмем произвольную последовательность $\{x_n\}$ значений аргумента функции, сходящуюся к $x_0$ $(x_n \ne x_0)$. Тогда по найденному значению $\delta > 0$ можно указать номер $n_0$, начиная с которого все члены последовательности $\{x_n\}$ попадут в множество $\overset{o}{U}_\delta(x_0) \cap D(f)$, следовательно, для $n \ge n_0$ и $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| < \varepsilon$. Последнее неравенство означает, что последовательность значений $\{f(x_n)\}$ - сходящаяся (по критерию Коши для последовательности).

Мы доказали, что если взять последовательность значений аргумента $\{x_n\}$, сходящуюся к $x_0$ ($x_n \ne x_0$), то последовательность соответствующих значений функции будет сходящейся. По теореме 3.2.1 функция в точке $x_0$ имеет предел. ◄

**Замечание.** *Теорема будет справедлива, если* $x_0 = \infty$ *или, если* $x_0$ *- конечная точка, но рассматривается односторонний предел.*

## §4 Непрерывность функций

В этом параграфе мы рассмотрим одно из самых важных свойств функций.

### 4.1. Непрерывность функции в точке

**Определение 3.4.1.** *Пусть* $x_0 \in D(f)$ *- предельная точка области определения функции* $f(x)$. *Будем говорить, что функция* $f(x)$ ***непрерывна в точке*** $x_0$, *если* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Таким образом, функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$, если

1) существует значение $f(x_0)$;

2) существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) предел функции в точке $x_0$ равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Используя определения предела, это определение можно перефразировать на языке окрестностей (или "$\varepsilon - \delta$") или на языке последовательностей:

1. *Функция* $f(x)$ *будет непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, *если для любой окрестности* $U_\varepsilon(f(x_0))$ *точки* $f(x_0)$ *можно найти окрестность* $U_\delta(x_0)$ *точки* $x_0$ *так, что из условия* $x \in U_\delta(x_0) \cap D(f)$ *следует* $f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$.
2. *Функция* $f(x)$ *будет непрерывной в точке* $x_0 \in D(f)$, *если для любой последовательности* $\{x_n\}$ *такой, что* $x_n \in D(f)$ *и* $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$, *будет выполнено* $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Если выполняется соотношение $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ или $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то говорят о непрерывности в точке $x_0$, соответственно, справа или слева.

Сформулируем свойства непрерывных функций.

**Свойство 1.** *Если функция непрерывна в точке* $x_0$, *то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.*

**Свойство 2**. *Если для функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x_0$ *выполняется неравенство* $f(x) \le g(x)$ *и обе эти функции непрерывны в точке* $x_0$, *то* $f(x_0) \le g(x_0)$.

**Свойство 3.** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна в точке* $x_0$ *и* $f(x_0) > 0$, *то существует окрестность этой точки такая, что для всех значений аргумента,* *взятых из этой окрестности, будет справедливо неравенство* $f(x)>0$. *(Аналогично, если* $f(x_0)<0$*, то для всех значений аргумента, взятых из некоторой окрестности точки* $x_0$*, выполнено* $f(x)<0$*).*

**Свойство 4.** *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* $x_0$*, то в этой точке будут непрерывны*

*a) их сумма* $f(x)+g(x)$*;*

*b) их произведение* $f(x)\cdot g(x)$*;*

*c) если* $g(x_0)\neq 0$*, будет непрерывно их частное* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

**Замечание.** *Это свойство легко распространяется на сумму и произведение любого фиксированного числа компонент.*

**Свойство 5.** *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была непрерывной в точке* $x_0\in D(f)$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* $f(x)=f(x_0)+\alpha(x)$*, где* $\alpha(x)$ *- бесконечно малая в точке* $x_0$ *функция.*

Свойства 1-5 очевидно следуют из свойств пределов функции.

**Свойство 6.** *Если функция* $\varphi(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x_0$ *и непрерывна в этой точке, а функция* $f(t)$ *определена в окрестности точки* $t_0=\varphi(x_0)$ *и непрерывна в ней, то в некоторой окрестности точки* $x_0$ *определена сложная функция* $f(\varphi(x))$*, которая будет непрерывна в точке* $x_0$.

► Возьмем $\varepsilon>0$ и найдем $\sigma>0$ такое, что $U_\sigma(t_0)\subset D(f)$ и если $t\in U_\sigma(t_0)$, то $f(t)\in U_\varepsilon(f(t_0))$. Для найденного числа $\sigma$ можно указать число $\delta>0$ такое, что если $x\in U_\delta(x_0)$, то $\varphi(x)\in U_\sigma(t_0)$.

Отсюда следует, что если $x\in U_\delta(x_0)$, то существует $f(\varphi(x))$ и $f(\varphi(x))\in U_\varepsilon(f(t_0))$, а так как $f(t_0)=f(\varphi(x_0))$, это означает непрерывность функции $f(\varphi(x))$ в точке $x_0$.◄

**Замечание.** *Если в свойстве 6 предположить непрерывность функции* $f(t)$ *и существование предела* $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=t_0$*, при этом непрерывность* $\varphi(x)$ *не предполагать, то можно доказать, что* $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=f\left(\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right)$.

## 4. 2. Точки разрыва

**Определение 3.4.2.** *Если точка $x_0$ является предельной точкой области $D(f)$, но функция не является непрерывной в этой точке, то точка $x_0$ называется* ***точкой разрыва*** *функции $f(x)$.*

Для исследования поведения функции вблизи точки разрыва полезно вспомнить, что предел функции в точке существует тогда и только тогда, когда существуют ее пределы справа и слева и они равны между собой. Поэтому определение 3.4.2 удобно сформулировать следующим образом:

**Определение 3.4.1(а)**. *Функция $f(x)$* ***непрерывна*** *в точке $x_0$, если*

1) *Существует значение $f(x_0)$;*
2) *Существуют односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;*
3) *Справедливо равенство $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.*

Если нарушено хотя бы одно из условий 1) – 3), то точка $x_0$ *будет* ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

**Классификация точек разрыва функции**

*а) Если односторонние пределы в точке $x_0$ существуют и равны между собой, но функция в этой точке не определена, или $f(x_0) \neq \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка $x_0$ называется* ***точкой устранимого разрыва.***

**Пример 1**. $f(x) = \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$, $x_0 = \dfrac{1}{2}$.

☺ Значение функции в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$ не определено, но мы доказали в примере 1 §2, что $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{4x^2-1}{2x-1} = 2$. Значит $x_0 = \dfrac{1}{2}$ - точка устранимого разрыва.

Если ввести функцию $f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 2, & x = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$ то эта функция будет непрерывной в точке $x_0 = \dfrac{1}{2}$. ☻

**Пример 2.** $f(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

☺В точке $x_0 = 0$ функция не определена, но $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\sin\frac{1}{x}\right) = 0$, так как $\left|x\cdot\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|$. Следовательно, функция $f_1 = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ будет непрерывной. ☻

*б) Если существуют конечные односторонние пределы, но они не равны между собой, то точка $x_0$, называется* ***точкой разрыва первого рода*** *или* ***точкой конечного разрыва.***

**Пример 3.** $f(x) = \operatorname{sign} x,\ x_0 = 0$.

☺ Как было доказано в примере 8 §2, $\lim\limits_{x\to 0-0}\operatorname{sign} x = -1$ и $\lim\limits_{x\to 0+0}\operatorname{sign} x = 1$. Следовательно, точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода для функции $f(x) = \operatorname{sign} x$. Будем говорить, что в этой точке функция имеет ***скачок*** и величина скачка равна $f(x_0+0) - f(x_0-0) = 2$. ☻

*в) Если в точке $x_0$ хотя бы один конечный односторонний предел не существует или существует и бесконечен, то эта точка называется* ***точкой разрыва второго рода.***

**Пример 4.** $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x_0 = 0$.

☺ Как было доказано в примере 3 §2, $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (Из доказательства ясно, что не существуют и односторонние пределы). Поэтому эта точка является точкой разрыва второго рода. ☻

**Пример 5.** $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $x_0 = 1$.

☺ В примере 4 §2 было доказано, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1} = \infty$. Следовательно, точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода. В этом случае также говорят, что это ***точка бесконечного разрыва.*** ☻

### 4.3. Критерий непрерывности функции

Возьмем точку $x_0 \in D(f)$, являющуюся предельной точкой области определения $D(f)$ и число $\Delta x$, которое будем называть приращением аргумента, такое, чтобы $x = x_0 + \Delta x \in D(f)$.

Составим разность $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$, которую будем называть приращением функции в точке $x_0$, соответствующим приращению аргумента $\Delta x$.

**Теорема 4.4.1 (Критерий непрерывности функции в точке)**

*Функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда ее приращение в этой точке будет стремиться к нулю, если приращение аргумента стремится к нулю.*

►Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке $x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x_0$ будет справедливо равенство $f(x)=f(x_0)+\alpha_1(x)$, где $\alpha_1(x)$ - бесконечно малая в точке $x_0$ функция. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ и $\alpha(\Delta x)=\alpha_1(x)$. Следовательно, $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\alpha(\Delta x)$, откуда $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)= \;=\alpha(\Delta x)$- бесконечно малая функция при $\Delta x$, стремящемся к нулю.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0)=0$. По критерию существования предела в точке получим $\Delta f(x_0)=\alpha(\Delta x)$, следовательно, $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\alpha(\Delta x)$. Если положить $x_0+\Delta x = x$ и $\alpha(\Delta x)=\alpha_1(x)$, то последнее равенство примет вид $f(x)=f(x_0)+\alpha_1(x)$, где функция $\alpha_1(x)$ - бесконечно малая при $x$, стремящемся к $x_0$, а это означает, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, т.е. функция непрерывна в точке $x_0$. ◄

**Пример 6.** Функция $f(x)=c$ - непрерывна в каждой точке вещественной оси.

☺ Для доказательства достаточно составить приращение функции в произвольной точке: $\Delta f(x)=c-c=0$. Функция, тождественно равная нулю – бесконечно малая, следовательно, $f(x)=c$ - непрерывна. ☻

**Пример 7.** Функция $f(x)=x$ непрерывна в каждой точке.

☺ Составим приращение функции $\Delta f(x)=(x+\Delta x)-x=\Delta x$. Если $\Delta x\to 0$, то $\Delta f(x)\to 0$. ☻

**Пример 8.** Функция $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$ непрерывна в каждой точке вещественной оси.

☺ Это следует из предыдущего примера и теоремы о непрерывности произведения непрерывных функций. ☻

**Теорема 4.4.2.** *Функция, заданная и монотонная на промежутке $\langle a,b\rangle$, $-\infty\le a<b\le+\infty$ может иметь не более чем счетное число точек разрыва первого рода.*

► Было доказано, что, если функция монотонна на некотором промежутке, то в любой внутренней точке этого промежутка существуют ее пределы слева и справа, причем выполнено неравенство $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$.

Отсюда следует, что, если точка $x_0$ является точкой разрыва функции, то это точка разрыва первого рода, и в этой точке хотя бы одно из этих неравенств – строгое. Допустим, что $f(x_0-0)<f(x_0)$ и возьмем рациональное число, лежащее на промежутке $\left(f(x_0-0);f(x_0)\right)$. Так как все такие промежутки не пересекаются, то числа, соответствующие точкам разрыва, будут разные. Множество таких рациональных чисел счетно, как подмножество множества всех рациональных чисел. Следовательно, множество точек разрыва тоже будет счетно. ◄

## 4.4. Непрерывность функции на множестве

**Определение 3.4.3.** *Будем говорить, что функция* $f(x)$ ***непрерывна на множестве*** $G\subset D(f)$*, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

При этом если $G=[a,b]$ - отрезок, то функция должна быть непрерывна справа в точке $a$ и непрерывна слева в точке $b$.

**Теорема 4.4.3.** *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на множестве* $G$*, и множество* $G$ *компактно, то множество* $f(G)$ *- компактно.*

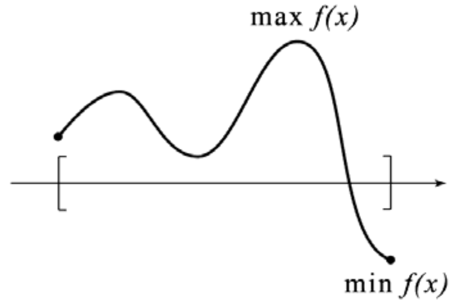
► Докажем, что множество $f(G)$- замкнуто, т.е. содержит все свои предельные точки. Пусть $y_0$ - предельная точка множества $f(G)$. Тогда существует последовательность различных точек $\{y_n\}$ таких что $\forall n\in\mathbb{N}\quad y_n\in f(G)$, $y_n\neq y_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$. Рассмотрим прообраз этой последовательности $f^{-1}(\{y_n\})$, который состоит из бесконечного множества точек $x_n\in G$. По теореме о компактном множестве в $\mathbb{R}^1$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0\in G$ (так как $G$ - замкнуто). Тогда, с одной стороны $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)$, так как функция $f(x)$ непрерывна, с другой стороны $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=y_0$, так как $\{y_{n_k}\}$ - подпоследовательность сходящейся к $y_0$ последовательности. Следовательно, $y_0=f(x_0)$, т.е. $y_0\in f(G)$.

Теперь докажем ограниченность множества $f(G)$. Так как функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества $G$, то для каждой точки можно найти окрестность, в пределах которой функция будет ограничена. Рассмотрим систему этих окрестностей $\{U(x),\ \ x\in G\}$. Очевидно, она образует открытое покрытие множества $G$ и в силу его компактности из нее можно выбрать конечный набор окрестностей, который также будет являться покрытием множества $G$. Пусть это будет система $U(x_1),U(x_2),...U(x_m)$, причем для $x\in U(x_i)$, $i=1,2,...m$ выполняется неравенство $m_i\le f(x)\le M_i$. Обозначим через $M = \max\limits_{1 \le i \le m} M_i$ и $m = \min\limits_{1 \le i \le m} m_i$. Тогда на всем множестве $G$ будет выполняться неравенство $m \le f(x) \le M$. ◄

Следствиями из этой теоремы являются две теоремы Вейерштрасса:

**Теорема 4.4.4 (Первая теорема Вейерштрасса)**

*Функция, непрерывная на отрезке ограничена.*

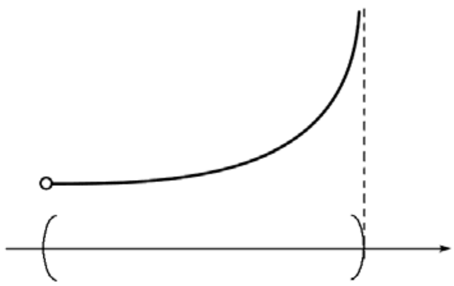


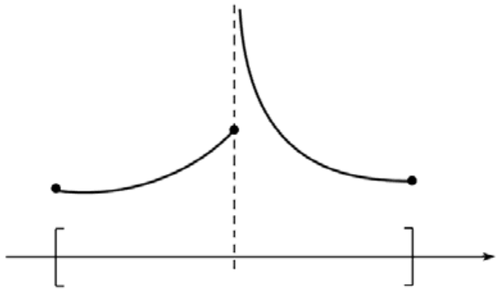

**Теорема 4.4.5 (Вторая теорема Вейерштрасса)**

*Если функция непрерывна на отрезке, то на этом отрезке она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.*

Первая из этих теорем очевидна, а вторая следует из замкнутости множества $f(G)$.

**Замечание.** *Если условия теоремы 4.4.3 не выполнены, то функция может быть неограниченной. Некоторые случаи изображены на рисунках:*





**Теорема 4.4.6 (Первая теорема Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции)**

*Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и на концах этого отрезка принимает значения разных знаков. Тогда внутри отрезка найдется, по крайней мере, одна точка, в которой $f(x)=0$.*

► Предположим, что такой точки не существует. Тогда для любого $x \in [a,b]$ $f(x) \ne 0$ и, следовательно, у каждой точки промежутка найдется окрестность, в пределах которой функция будет сохранять знак. Эти окрестности образуют открытое покрытие промежутка $[a,b]$ и в силу компактности этого промежутка из него можно выделить конечное покрытие, т.е. конечный набор окрестностей $U(x_1), U(x_2), \ldots U(x_m)$, $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_m$, объединение которых содержит данный отрезок, и в каждой из которых все значения функции имеют один и тот же знак.

Тогда допустив, что $f(a) > 0$, получим, что $f(x) > 0$ в $U(x_1)$, а так как окрестности $U(x_1)$ и $U(x_2)$ пересекаются, то $f(x) > 0$ и в $U(x_2)$. Таким образом, за конечное число шагов мы можем дойти до последней окрестности

$U(x_m)$, которая содержит точку $b$, но в которой $f(x)>0$, что противоречит тому, что в точке $b$ должно быть $f(b)<0$. ◄

**Следствие 1 (Вторая теорема Коши о промежуточном значении непрерывной на отрезке функции)**

*Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $A=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $B=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. Тогда для любого значения $C$ такого, что $A<C<B$ на промежутке $[a,b]$ найдется по крайней мере одна точка $x_0$, в которой $f(x_0)=C$.*

►Для доказательства достаточно взять функцию $f(x)-C$ и применить к ней первую теорему Коши о промежуточном значении. ◄

**Замечание.** *Данные теоремы часто применяются для доказательства существования на заданном промежутке корней уравнений вида $f(x)=0$ или $f(x)=C$.*

**Пример 9.** Рассмотрим уравнение $x^3-3x+1=0$.

☺ Обозначим $x^3-3x+1=f(x)$. Так как $f(0)=1>0$, а $f(1)=-1<0$, то можно утверждать, что на промежутке $[0,1]$ лежит по крайней мере один корень данного уравнения. ☻

**Следствие 2.** *Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $f([a,b])$ - отрезок.*

Это следует из второй теоремы Вейерштрасса и второй теоремы Коши.

**Следствие 3 (Теорема об обратной функции)**

*Пусть функция $f(x)$ задана, строго возрастает и непрерывна на отрезке $[a,b]$, причем $f(a)=c$ и $f(b)=d$. Тогда существует функция $f^{-1}(y)$, обратная к функции $f(x)$, заданная и непрерывная на промежутке $[c,d]$, которая также строго возрастает.*

►Так как $f(x)$ возрастает, то $\min\limits_{[a,b]} f(x)=c=f(a)<f(b)=d=\max\limits_{[a,b]} f(x)$. Таким образом, по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции, областью значений данной функции будет промежуток $[c,d]$, т.е. для каждого $y\in[c,d]$ уравнение $f(x)=y$ имеет хотя бы одно решение. Чтобы доказать существование обратной функции, нужно доказать, что это решение единственно.

Допустим, что это уравнение имеет два решения $x_1$ и $x_2$, причем $x_1<x_2$. В силу строгого возрастания функции получим неравенство $f(x_1)<f(x_2)$, которое противоречит тому, что $f(x_1)=f(x_2)=y$. Следовательно, наше предположение неверно, уравнение $f(x)=y$ имеет ровно одно решение, и на промежутке $[c,d]$ существует функция $x=f^{-1}(y)$, обратная к данной.

Докажем, что функция $f^{-1}(y)$ строго возрастает. Допустим противное, т.е. допустим, что существуют значения $y_1, y_2 \in [c,d]$ такие, что $y_1 < y_2$, но $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2) = x_2$.

Тогда, используя монотонность функции $f(x)$, получим неравенство $f(x_1) = y_1 \geq y_2 = f(x_2)$, которое противоречит неравенству $y_1 < y_2$. Следовательно, предположение неверно и обратная функция строго возрастает.

Докажем непрерывность обратной функции. Сначала напомним, что областью значений обратной функции будет промежуток $[a,b]$. Так как обратная функция монотонна, то в любой точке $y_0 \in [c,d]$ будет выполняться неравенство $f^{-1}(y_0 - 0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0 + 0)$, и для доказательства непрерывности функции в точке $y_0$ нужно доказать, что последнее неравенство является равенством.

Допустим противное. Например, допустим, что $f^{-1}(y_0 - 0) < f^{-1}(y_0)$. Тогда никакое число из промежутка $\left(f^{-1}(y_0 - 0); f^{-1}(y_0)\right) \subset (a,b)$ не будет являться значением функции, что противоречит тому, что любое число из промежутка $[a,b]$ является значением обратной функции. Теорема полностью доказана. ◄

**Замечания**

***1.*** *Теорема будет верна и в случае, когда функция $f(x)$ строго убывает. Тогда $f^{-1}(y)$ тоже будет строго убывающей.*

***2.*** *Аналогично формулируется и доказывается теорема о существовании функции, обратной к монотонной и непрерывной функции, заданной на интервале (конечном или бесконечном).*

**Пример 10.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^n$.

☺ Если $n$ нечетно, то эта функция возрастает и непрерывна на всей вещественной оси, причем ее область значений - $\mathbb{R}$. Следовательно, обратная к ней функция $\sqrt[n]{y}$ существует на $\mathbb{R}$, непрерывна и монотонно возрастает.

Если $n$ четно, то функция $x^n$ будет возрастающей на промежутке $[0,+\infty)$ и убывающей на промежутке $(-\infty,0]$, причем ее область значений будет $[0,+\infty)$. Существуют две обратные функции $f_+^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, $D\left(f_+^{-1}\right) = [0,+\infty)$, $E\left(f_+^{-1}\right) = [0,+\infty)$ и $f_-^{-1}(y) = -\sqrt[n]{y}$, $D\left(f_-^{-1}\right) = [0,+\infty)$, $E\left(f_-^{-1}\right) = (-\infty,0]$. Обе эти функции непрерывны, но первая возрастает, а вторая убывает. ☻

## 4.5. Равномерная непрерывность

Рассмотрим функцию $f(x)$, где $x \in G \subset X$, $X$ – некоторое метрическое пространство.

**Определение 4.4.4.** *Будем говорить, что функция $f(x)$* ***равномерно непрерывна*** *на множестве $G \subset D(f)$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ так, что для любых значений аргумента $x'$ и $x''$, принадлежащих множеству $G$, из неравенства $\rho(x',x'') < \delta$ будет следователь неравенство $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.*

Для вещественнозначной функции одной вещественной переменной равномерная непрерывность на множестве $G$ будет означать, что по $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ такое, что если $|x' - x''| < \delta$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ для любых $x'$ и $x''$, принадлежащих множеству $G$.

Отличие определения равномерной непрерывности от непрерывности на множестве состоит в том, что в определении равномерной непрерывности число $\delta$ зависит только от $\varepsilon$, тогда как в определении непрерывности функции в точке $\delta$ зависит от $\varepsilon$ и от точки, для которой мы ищем окрестность.

**Пример 11.** Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ на множестве $[0,+\infty)$. Докажем, что на этом множестве данная функция будет равномерно непрерывна.

☺ Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и два значения аргумента из промежутка $[0,+\infty)$ и составим разность

$$f(x') - f(x'') = \frac{1}{1+x'^2} - \frac{1}{1+x''^2} = \frac{x''^2 - x'^2}{(1+x'^2)(1+x''^2)} = \frac{(x''-x')(x'+x'')}{(1+x'^2)(1+x''^2)}.$$

Оценим модуль этой разности, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\left( x \le \dfrac{1+x^2}{2} \right)$:

$$|f(x') - f(x'')| \le \left( \frac{x'}{1+x'^2} + \frac{x''}{1+x''^2} \right) \cdot |x' - x''| \le \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) |x' - x''| = |x' - x''|.$$

Отсюда следует, что, если взять $\delta = \varepsilon$, то из неравенства $|x' - x''| < \delta$ будет следовать неравенство $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$, что и требовалось доказать. ☻

**Пример 12.** Пусть $f(x) = x^2$ и $G = [0,+\infty)$. Отметим, что данная функция будет непрерывной в каждой точке данного промежутка. Докажем, что эта непрерывность не будет равномерной на $G$.

☺ Возьмем два значения аргумента $x' = n + \dfrac{1}{n}$ и $x'' = n$ $n \in \mathbb{N}$, которые будут принадлежать заданному промежутку. Тогда будет справедливо неравенство

$$\left|f(x')-f(x'')\right|=\left|x'^2-x''^2\right|=\frac{1}{n}\left(2n+\frac{1}{n}\right)>2.$$

Следовательно, если взять $\varepsilon_0=2$, то, какое бы число $\delta>0$ мы ни взяли, мы сможем найти число $n\in\mathbb{N}$ такое, что $\left|x'-x''\right|=\dfrac{1}{n}<\delta$, но при этом $\left|f(x')-f(x'')\right|>\varepsilon_0$. Это означает, что равномерной непрерывности функции на данном промежутке нет. ☻

**Теорема 4.4.7 (Кантора).** *Если функция непрерывна на компакте $G\subset D(f)$, то она равномерно непрерывна на нем.*

► Возьмем $\varepsilon>0$ и, пользуясь непрерывностью функции на множества $G$, для каждой точки $x$ этого множества найдем окрестность $U_{\delta_x}(x)$ так, что если $\overline{x}\in U_{\delta_x}(x)\cap D(f)$, то $f(\overline{x})\in U_{\varepsilon/2}(f(x))$. Тогда, если взять значения $x'$ и $x''$ из множества $U_{\delta_x}(x)\cap D(f)$, то будет выполняться неравенство $\rho(f(x'),f(x''))\le\rho(f(x'),f(x))+\rho(f(x),f(x''))<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

Теперь возьмем покрытие данного компакта $\left\{U_{\delta_x/2}(x)\right\}$ окрестностями каждой точки радиуса $\delta_x/2$ и выделим из этой системы конечное покрытие. Пусть это будут окрестности $U_{\delta_1/2}(x_1),U_{\delta_2/2}(x_2),...,U_{\delta_m/2}(x_m)$ точек $x_1,x_2,...,x_m$.

Положим $\delta=\min\left(\delta_1/2,\delta_2/2,...,\delta_m/2\right)$ и возьмем два значения аргумента функции $x'$ и $x''$ из множества $G$ таких, чтобы $\rho(x',x'')<\delta$. Найдем окрестность $U_{\delta_k/2}(x_k)$, в которую попадает точка $x'$, т.е. $\rho(x',x_k)<\dfrac{\delta_k}{2}$. Тогда $\rho(x'',x_k)\le\rho(x'',x')+\rho(x',x_k)<\delta+\dfrac{\delta_k}{2}\le\delta_k$. Это означает, что точки $x'$ и $x''$ лежат в одной и той же окрестности точки $x_k$ радиуса $\delta_k$. А тогда, по доказанному выше, получим $\rho(f(x'),f(x''))<\varepsilon$. ◄

По доказанной теореме, функция $f(x)=x^2$ будет равномерно непрерывной на любом конечном промежутке $[0,a]$, но, как мы видели, не будет равномерно непрерывной на бесконечном луче $[0,+\infty)$.

## §5 Элементарные функции и их непрерывность

В этом параграфе мы изучим конкретные функции и получим ряд замечательных пределов, которые понадобятся нам на практике.

### 5.1. Определения

**Определение 3.5.1.** ***Простейшими функциями*** *будем называть следующие функции:*

| | |
|---|---|
| 1. $f(x)=c$ | 9. $f(x)=\operatorname{th} x$ |
| 2. $f(x)=x^{\alpha}, \alpha\in\mathbb{R}$ | 10. $f(x)=\operatorname{cth} x$ |
| 3. $f(x)=\sin x$ | 11. $f(x)=a^{x},\ a>0,\ a\neq 1$ |
| 4. $f(x)=\cos x$ | 12. $f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$ |
| 5. $f(x)=\operatorname{tg} x$ | 13. $f(x)=\arcsin x$ |
| 6. $f(x)=\operatorname{ctg} x$ | 14. $f(x)=\arccos x$ |
| 7. $f(x)=\operatorname{sh} x$ | 15. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ |
| 8. $f(x)=\operatorname{ch} x$ | 16. $f(x)=\operatorname{arcctg} x$ |

**Замечание.** *Не все простейшие функции были точно определены в школе. Поэтому мы дадим далее определения таких операций.*

**Определение 3.5.2.** ***Элементарными функциями*** *будем называть функции, образованные из простейших функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа композиций функций.*

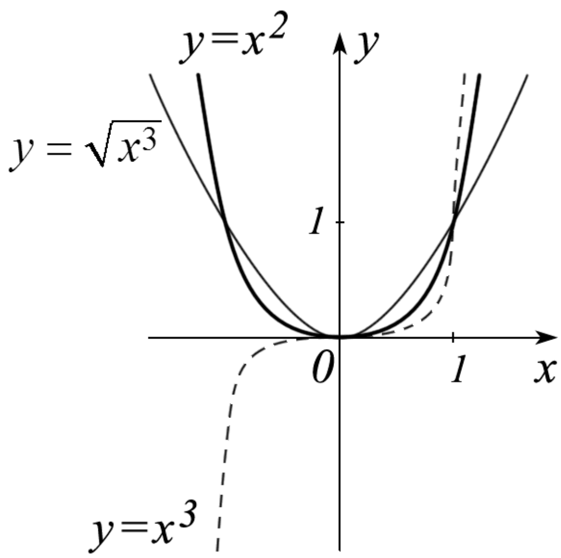
Если мы докажем, что каждая простейшая функция непрерывна на своей области определения, то по свойствам непрерывных функций получим, что любая элементарная функция непрерывна на своей области определения.

### 5.2. Исследование простейших функций

**1)** Непрерывность функции $f(x)=c$ мы уже доказали (пример 6 §4).

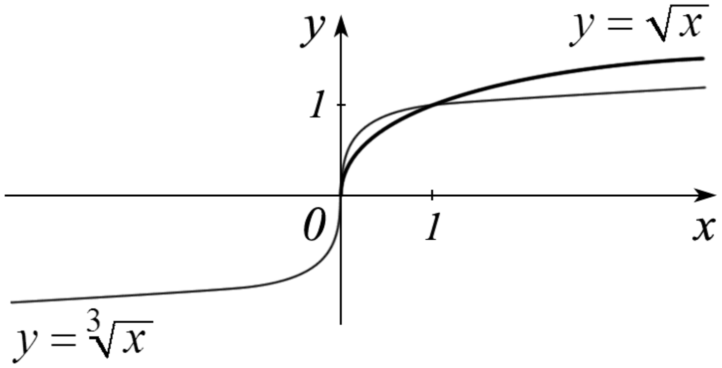
**2)** Рассмотрим функцию $f(x)=x^{\alpha}$.

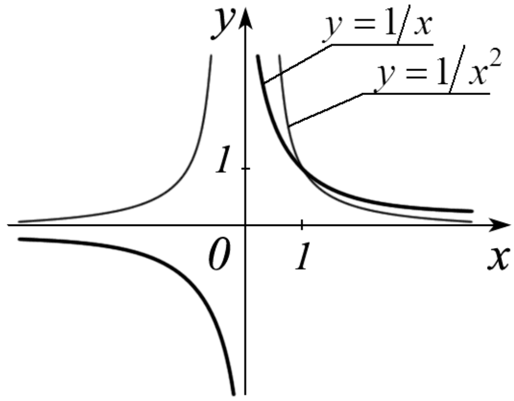
Уже определена и доказана непрерывность функций $f(x)=x^{n}$ и $f(x)=\sqrt[n]{x}$, $n\in\mathbb{N}$ (примеры 8 и 10 §4). Если $\alpha$ - целое отрицательное число, то $x^{\alpha}=\dfrac{1}{x^{n}}$, где $n=-\alpha\in\mathbb{N}$. Эта функция определена и непрерывна на множестве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



Если $\alpha \in \mathbb{Q}$, то $x^{\alpha} = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Таким образом, функция $f(x) = x^{\alpha}$ определена при $\alpha \in \mathbb{Q}$ и непрерывна, как композиция непрерывных функций во всех точках, где она определена. Перечислим основные свойства степени с рациональным показателем (при $x, y > 0$):




**1.** $x^{\alpha_1} \cdot x^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 + \alpha_2}$;

**2.** $\left(x^{\alpha_1}\right)^{\alpha_2} = x^{\alpha_1 \cdot \alpha_2}$;  **3.** $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha} = \dfrac{(x)^{\alpha}}{(y)^{\alpha}}$;  **4.** *Если* $x > 1,\ \alpha > 0$*, то* $x^{\alpha} > 1$*;*

**5.** *Если* $x > 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$*, то* $x^{\alpha_1} > x^{\alpha_2} > 0$ *и, если* $0 < x < 1$ *и* $\alpha_1 > \alpha_2$*, то* $0 < x^{\alpha_1} < x^{\alpha_2}$.

Эти свойства легко доказываются на основании свойств степени с целым показателем и свойств арифметических корней.

Для иррациональных показателей определение степени введем позже.

**3)** Рассмотрим теперь ***показательную функцию*** $f(x) = a^x,\ \ a > 0,\ a \neq 1$.

Из предыдущего пункта ясно, что эта функция сейчас определена только для $x \in \mathbb{Q}$. Докажем два свойства этой функции.

**Свойство 1.** *Функция* $f(x) = a^x,\ D(f) = \mathbb{Q}$ *непрерывна в точке 0.*

► Используя определение непрерывности на языке последовательности, докажем, что если $r_n \in \mathbb{Q},\ r_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, то $a^{r_n} \to 1$.

В примере 16 §1 и §2 главы 2 было доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Допустим, сначала, что $a > 1$. Возьмем $\varepsilon > 0$. Тогда можно найти номер $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что будут выполняться неравенства $0 < a^{1/k_0} - 1 < \varepsilon$ и $0 < 1 - a^{-1/k_0} < \varepsilon$. Из этих неравенств, используя монотонность степени с рациональным показателем, получим $1 - \varepsilon < a^{-1/k_0} < a^{1/k_0} < 1 + \varepsilon$.

Так как $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, то можно найти номер $n_0$, начиная с которого будет выполняться неравенство $|r_n| < \frac{1}{k_0}$. Тогда для этих же членов последовательности $\{r_n\}$ будет справедливо $1-\varepsilon < a^{-1/k_0} < a^{r_n} < a^{1/k_0} < 1+\varepsilon$, а это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Очевидно, что при $0 < a < 1$, доказательство останется верным, изменятся лишь знаки неравенств, написанных на основании монотонности функции. ◄

**Свойство 2.** *Если последовательность $\{r_n\}$ рациональных чисел сходится, то последовательность $\{a^{r_n}\}$ тоже сходится.*

►Воспользуемся критерием сходимости Коши. Возьмем $\varepsilon > 0$ и докажем, что последовательность $a^{r_n}$ фундаментальна. Для этого рассмотрим $\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| = \left|a^{r_m}\right|\left|a^{r_n - r_m} - 1\right|$.

Опять предположим, для определенности, что $a > 1$.

Так как последовательность $\{r_n\}$ сходится, то она ограничена. Допустим, что $c \le r_n \le d$. Тогда по монотонности степени с рациональным показателем будет верным неравенство $a^c \le a^{r_n} \le a^d$.

Так как $\lim\limits_{r\to 0} a^r = 1,\ r \in \mathbb{Q}$, то по заданному $\varepsilon$ можно найти $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|r| < \delta$ будет следовать $\left|a^r - 1\right| < \varepsilon / a^d$. Последовательность $r_n$ сходится, следовательно, она сходится в себе и по найденному числу $\delta$ можно найти такой номер $n_0$, что если $n \ge n_0$ и $m \ge n_0$, то $|r_n - r_m| < \delta$ и, следовательно, для этих членов последовательности будет выполняться неравенство $\left|a^{r_n - r_m} - 1\right| < \varepsilon / a^d$. Тогда для этих же членов последовательности будет справедливо $\left|a^{r_n} - a^{r_m}\right| = \left|a^{r_m}\right|\left|a^{r_n - r_m} - 1\right| < a^d \frac{\varepsilon}{a^d} = \varepsilon$.

Для случая $0 < a < 1$ доказательство аналогично. ◄

Теперь можно определить степень числа $a$, $a > 0$, $a \ne 1$ с произвольным вещественным показателем.

**Определение 3.5.3.** *Пусть $x$ - произвольное вещественное число и $\{r_n\}$ - последовательность рациональных чисел, сходящаяся к $x$. Тогда положим $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.*

**Замечания**

***1.*** *Последовательность рациональных чисел, сходящаяся к вещественному числу $x$, всегда существует, так как каждое вещественное число является предельной точкой множества рациональных чисел.*

**2.** *Так как последовательность* $\left\{a^{r_n}\right\}$ *сходится, какова бы ни была сходящаяся к* $x$ *последовательность* $\left\{r_n\right\}$*, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$ *не будет зависеть от последовательности* $\left\{r_n\right\}$ *(теорема 3.2.1)* .

Таким образом, определена функция $f(x)=a^x$, $a>0, a\neq 1$, где $x\in\mathbb{R}$.

Сформулируем и докажем свойства показательной функции.

**Свойство 1.** *Для любых вещественных чисел* $x_1$ *и* $x_2$ *справедливо равенство*

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}.$$

► Пусть $\left\{r_n'\right\}$ и $\left\{r_n''\right\}$ - последовательности рациональных чисел такие, что при $n\to\infty$ выполняется: $r_n'\to x_1$ и $r_n''\to x_2$. Тогда $r_n'+r_n''\to x_1+x_2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'}=a^{x_1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n''}=a^{x_2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'+r_n''}=a^{x_1+x_2}$.

Требуемое равенство получим, переходя к пределу в равенстве $a^{r_1'}\cdot a^{r_2''}=a^{r_1'+r_2''}$. ◄

**Следствие.** *Для любых вещественных чисел* $x_1$ *и* $x_2$ *справедливо равенство*

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}.$$

**Свойство 2.** *Для любого вещественного* $x$ *выполняется неравенство* $a^x>0$.

► Допустим, что $a>1$ и найдем $r$ - рациональное число такое, что $x>r$. Возьмем $\left\{r_n\right\}$ - последовательность рациональных чисел, сходящуюся к $x$. Тогда, начиная с некоторого номера, будет выполняться неравенство $r_n>r$ и, следовательно, будет верным неравенство $a^{r_n}>a^r$. Переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $a^x\geq a^r>0$.

Если $0<a<1$, то аналогичные рассуждения можно провести для основания степени, равного $\dfrac{1}{a}$. ◄

**Свойство 3.** *Функция* $f(x)=a^x$, $a>1$ *строго возрастает и функция* $f(x)=a^x$, $0<a<1$ *строго убывает.*

► Допустим, что $a>1$, и возьмем два вещественных числа $x_1$ и $x_2$ таких, что $x_1<x_2$. Найдем какие-нибудь рациональные числа $r_1$ и $r_2$ так, чтобы выполнялось неравенство $x_1<r_1<r_2<x_2$ и возьмем последовательности рациональных чисел $\left\{r_n^{(1)}\right\}$, сходящуюся к $x_1$, и $\left\{r_n^{(2)}\right\}$, сходящуюся к $x_2$. Тогда можно найти номер, начиная с которого будут выполняться неравенства $r_n^{(1)}<r_1$ и $r_2<r_n^{(2)}$. По монотонности показательной функции с рациональным показателем для этих значений $n$ будет верным неравенство $a^{r_n^{(1)}}<a^{r_1}<a^{r_2}<a^{r_n^{(2)}}$.

Тогда, переходя к пределу в последнем неравенстве, получим $a^{x_1} \le a^{r_1} < a^{r_2} \le a^{x_2}$, откуда следует требуемое.

Для доказательства этого свойства при $0 < a < 1$ можно применить доказанное к основанию $\frac{1}{a}$ и воспользоваться свойствами неравенств. ◄

**Свойство 4.** *Функция* $f(x) = a^x$, $a > 0, a \ne 1$ *непрерывна на* $\mathbb{R}$.

► Предположим, для определенности, что $a > 1$.

Докажем сначала, что функция $a^x$ непрерывна в нуле. Возьмем произвольную последовательность вещественных чисел $\{x_n\}$, сходящуюся к нулю. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно найти рациональные числа $r_n^{(1)}$ и $r_n^{(2)}$ такие, что $x_n - \frac{1}{n} < r_n^{(1)} < x_n < r_n^{(2)} < x_n + \frac{1}{n}$. Тогда обе последовательности $\left\{r_n^{(1)}\right\}$ и $\left\{r_n^{(2)}\right\}$ стремятся к нулю, и, следовательно, по непрерывности в нуле показательной функции с рациональным показателем будет выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n^{(1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n^{(2)}} = 1$.

С другой стороны, по монотонности показательной функции получим неравенство $a^{r_n^{(1)}} < a^{x_n} < a^{r_n^{(2)}}$, откуда по теореме о сжатой переменной получим $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. Непрерывность в нуле доказана.

Теперь возьмем произвольную точку $x_0$ и докажем, что функция $a^x$ непрерывна в этой точке. Найдем приращение функции в этой точке: $\Delta f(x_0) = a^{x_0+\Delta x} - a^{x_0} = a^{x_0}\left(a^{\Delta x} - 1\right)$. Так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^{\Delta x} = 1$, а $a^{x_0}$ - константа (не зависит от $\Delta x$), то по теореме о пределе произведения двух функций получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = 0$, т.е. показательная функция непрерывна в произвольной точке $x_0$. ◄

**Свойство 5.** *Для любых вещественных* $x_1$ *и* $x_2$ *выполняется равенство*

$$\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}.$$

► Проведем доказательство в два этапа. Сначала предположим, что $x_2 = r$ - рациональное число. Возьмем $\{r_n\}$ - последовательность рациональных чисел, сходящуюся к $x_1$. Тогда $\left(a^{r_n}\right)^r = a^{r_n r} \to a^{x_1 r}$ при $n \to \infty$. С другой стороны, $s_n = a^{r_n} \to a^{x_1}$ и $(s_n)^r \to \left(a^{x_1}\right)^r$ по непрерывности степенной функции с рациональным показателем. Следовательно, $\left(a^{x_1}\right)^r = a^{x_1 r}$.

Теперь докажем это свойство для любых вещественных значений $x_1$ и $x_2$. Пусть $\{\rho_n\}$ - последовательность рациональных чисел, сходящаяся к $x_2$. Тогда, по доказанному в первой части, получим $\left(a^{x_1}\right)^{\rho_n} = a^{x_1\rho_n}$. По определению степени имеем: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{x_1}\right)^{\rho_n} = \left(a^{x_1}\right)^{x_2}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_1\rho_n} = a^{x_1x_2}$. Отсюда $\left(a^{x_1}\right)^{x_2} = a^{x_1\cdot x_2}$. ◄

**Свойство 6.** *Если* $a>1$, *то* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$, *и если* $0<a<1$, *то* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ *и* $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

► Допустим, что $a>1$ и $x\to+\infty$.

Пусть $n=[x]$ - целая часть числа $x$. Тогда по доказанному в (пример 18 §1 главы 2) будет существовать номер, начиная с которого будет выполнено неравенство $\frac{n}{a^n}<1$, т. е. неравенство $a^n>n$. Следовательно, $a^x \ge a^n \to +\infty$ при $x\to+\infty$.

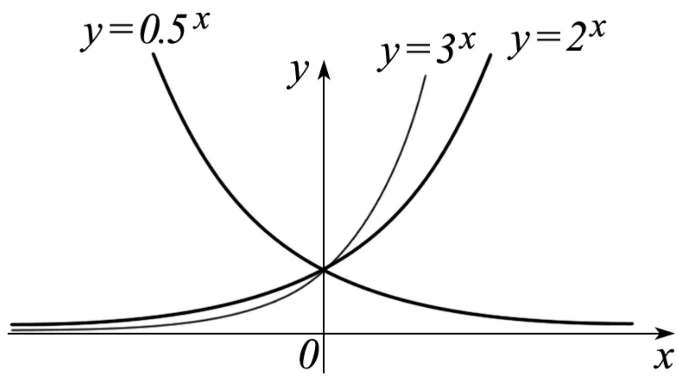
Все остальные утверждения этого свойства следуют из доказанного. ◄

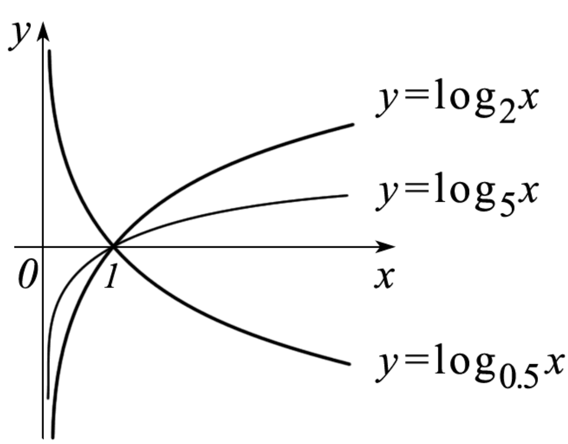
**Следствие.** *Областью изменения показательной функции является множество* $(0,+\infty)$.

**4)** ***Логарифмическая функция***

Функция $f(x)=a^x$, $a>0$, $a\ne1$ строго монотонна и непрерывна. Следовательно, существует обратная к ней функция, которая называется ***логарифмической*** и обозначается $\log_a x$. Эта функция определена на промежутке $(0,+\infty)$, непрерывна и строго возрастает, если $a>1$ и убывает, если $0<a<1$. Множество ее значений – вся числовая прямая.

Если $a=e$, то логарифм по такому основанию называют ***натуральным*** и обозначают $\ln x$.



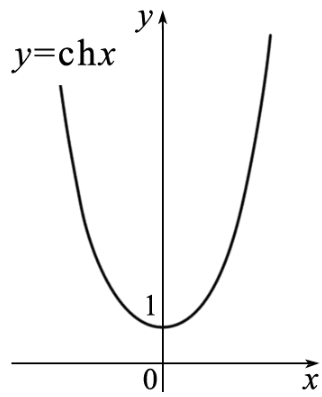
**5)** ***Степенная функция*** *(вещественный показатель)*

Пусть $\alpha$ - произвольное вещественное число. Положим $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$. Такая функция определена на множестве $(0,+\infty)$, непрерывна, как композиция непрерывных функций и возрастает, если $\alpha > 0$, и убывает, если $\alpha < 0$.

**6)** ***Показательно-степенная функция***

Функция $\left(u(x)\right)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}$, определенная на множестве, где $u(x) > 0$, называется ***показательно-степенной функцией***. Если $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны, то такая функция непрерывна на области своего определения, как композиция непрерывных функций.

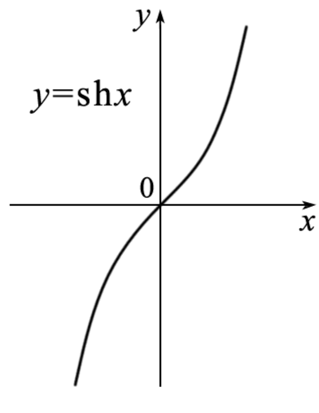
**7)** ***Гиперболические функции*** и обратные к ним




Функции

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

называют, соответственно, ***гиперболическими косинусом*** и ***синусом***. Эти функции определены на всей вещественной оси и непрерывны на ней, причем косинус – функция четная, а синус – функция нечетная.




Из определения этих функций следуют формулы:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

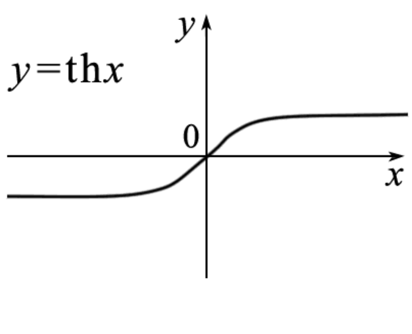
$$\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1,$$

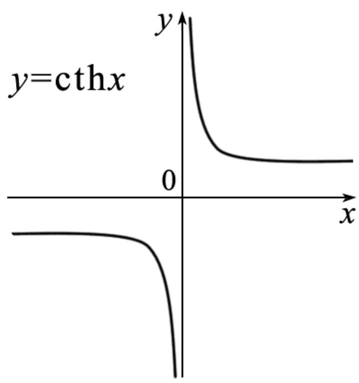
$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$$

По аналогии с тригонометрическим функциями определяют гиперболические тангенс и котангенс:

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \quad \text{и} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

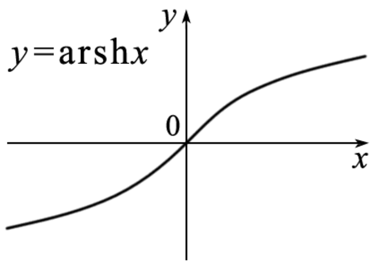
Функция $\operatorname{th} x$ определена на всей вещественной оси, а функция $\operatorname{cth} x$ определена для всех вещественных чисел $x$, кроме $x = 0$. Каждая из этих функций непрерывна на своей области определения.



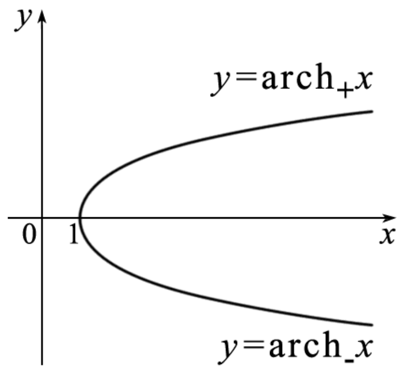



Элементарными методами довольно трудно исследовать монотонность этих функций, поэтому для доказательства существования обратных функций рассмотрим для каждой из этих функций разрешимость уравнения $y = f(x)$ относительно переменной $x$.

Сначала решим уравнение $y = \operatorname{sh} x$ или $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. После преобразований получим $e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0$, откуда $e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}$. Из этих двух уравнений только одно, а именно то, в котором радикал берется со знаком «плюс», имеет решение $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. Производя замену обозначений, получим $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ (читается ареа-синус) – обратная функция к функции $\operatorname{sh} x$.

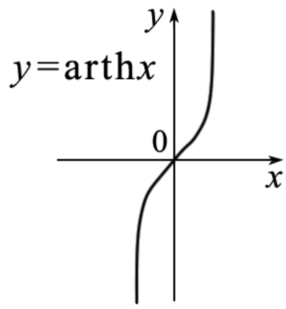



Теперь попытаемся решить уравнение $y = \operatorname{ch} x$ или $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$. Заметим сначала, что $y \geq 1$. Из квадратного уравнения $e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$ получим $e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$. Очевидно, что оба корня квадратного уравнения подходят. Таким образом, получим две обратные функции:



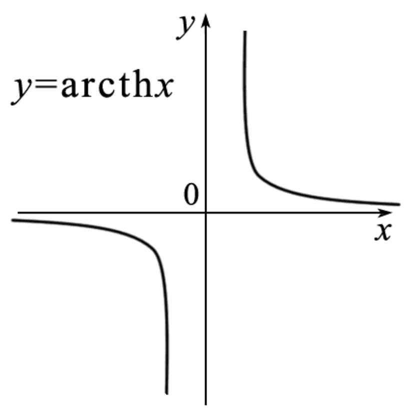

$\operatorname{arch}_+ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \geq 1$, обратная к $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{arch}_+ x \geq 0$ и

$\operatorname{arch}_- x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, $x \geq 1$, обратная к $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{arch}_- x \leq 0$.




Прежде чем искать функции обратные к $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$, отметим, что область изменения $\operatorname{th} x$ - множество $(-1,1)$, а область изменения $\operatorname{cth} x$ - множество $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.

Решая уравнение $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, получим $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{1-y}$, и из уравнения $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ получим $x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+y}{y-1}$, откуда следует

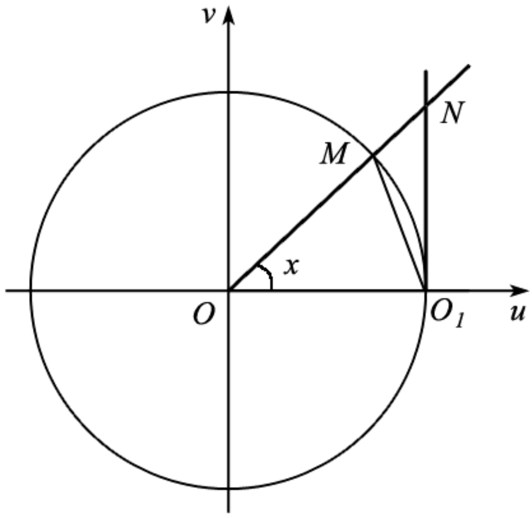


$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ \ |x|<1 \text{ и}$$
$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x-1},\ \ |x|>1.$$

**8)** ***Тригонометрические функции*** были достаточно хорошо определены в школе, и мы будем считать, что эти определения хорошо известны. Выведем несколько полезных свойств тригонометрических функций.

**Свойство 1.** $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ *при* $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x|$ *при* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *и* $|\sin x| \le |x|$ *при любом x.*

►Рассмотрим на тригонометрической окружности угол $x$, лежащий в первой четверти (изображено на рисунке). Пусть дуга $O_1M$ равна $x$. Построим линию тангенсов и отложим на ней точку $N$ такую, что $O_1N = \operatorname{tg} x$. Рассмотрим треугольники $OMO_1$, $ONO_1$ и сектор $OMO_1$. Очевидно, что площади этих фигур связаны неравенством: $S_{\triangle OMO_1} < S_{cektmOMO_1} < S_{\triangle ONO_1}$.




Так как эти площади равны, соответственно:

$S_{\triangle OMO_1} = \frac{1}{2}R^2\sin x = \frac{1}{2}\sin x$;

$S_{cektmOMO_1} = \frac{1}{2}R^2 x = \frac{1}{2}x$ и

$S_{\triangle ONO_1} = \frac{1}{2}OO_1 \cdot O_1N = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x$, то из неравенства между площадями получим неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x,\quad 0 < x < \frac{\pi}{2}. \qquad (*)$$

Используя нечетность функций $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$, получим, что если $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, то выполнено неравенство $-\sin x < -x < -\operatorname{tg} x$ или $|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$. Тогда, очевидно, что, если $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то справедливо неравенство

$$|\sin x| \le |x| \le |\operatorname{tg} x| \qquad (**)$$

и $\forall x \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $|\sin x| \le |x|$. ◄

**Свойство 2.** *Тригонометрические функции непрерывны на своих областях определения.*

►Рассмотрим приращение функции $\sin x$:

$$\Delta f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Используя неравенство (**) и то, что $\left|\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, получим $\left|\Delta f(x)\right|\le 2\cdot\left|\dfrac{\Delta x}{2}\right|=\left|\Delta x\right|$. Отсюда следует, что, если $\Delta x\to 0$, то $\Delta f(x)\to 0$.

Аналогично получается неравенство

$$\left|\cos(x+\Delta x)-\cos x\right|=\left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le\left|\Delta x\right|,$$

из которого следует непрерывность функции $\cos x$.

Функции $\mathrm{tg}\,x$ и $\mathrm{ctg}\,x$ непрерывны в точках, где они существуют, как частные непрерывных функций.◄

**Свойство 3 (Первый замечательный предел)**

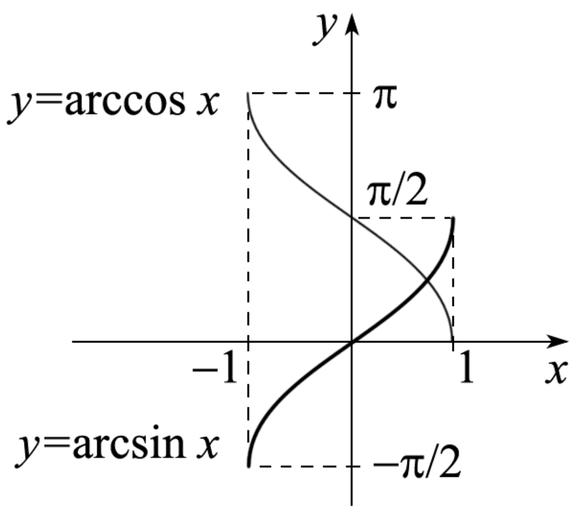
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

►Считая, что $x\ne 0$, разделим каждый член неравенства (**) на $\left|\sin x\right|$ и получим $1<\left|\dfrac{x}{\sin x}\right|<\dfrac{1}{\left|\cos x\right|}$ или $1>\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|>\left|\cos x\right|$, $x\in\left(-\pi/2,\pi/2\right)$, $x\ne 0$. Так как все функции в последнем неравенстве положительны, то модуль можно убрать и получить $1>\dfrac{\sin x}{x}>\cos x$. Если устремить $x$ к нулю, то $\cos x$ будет стремиться к 1 (по непрерывности функции $\cos x$). Следовательно, по теореме о сжатой переменной будет иметь место равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, которое обычно называют первым замечательным пределом. ◄

**9) *Обратные тригонометрические функции***

Рассмотрим функцию $f(x)=\sin x$, $x\in\left[-\pi/2,\pi/2\right]$. Известно, что такая функция строго возрастает и непрерывна, следовательно, она имеет обратную, которая также будет возрастать и будет непрерывной и которая обозначается $\arcsin x$, $x\in[-1,1]$.

Аналогично, функцией $\arccos x$, $x\in[-1,1]$ будем называть функцию, обратную к функции $\cos x$, $x\in[0,\pi]$. Эта функция будет непрерывной и строго убывающей.

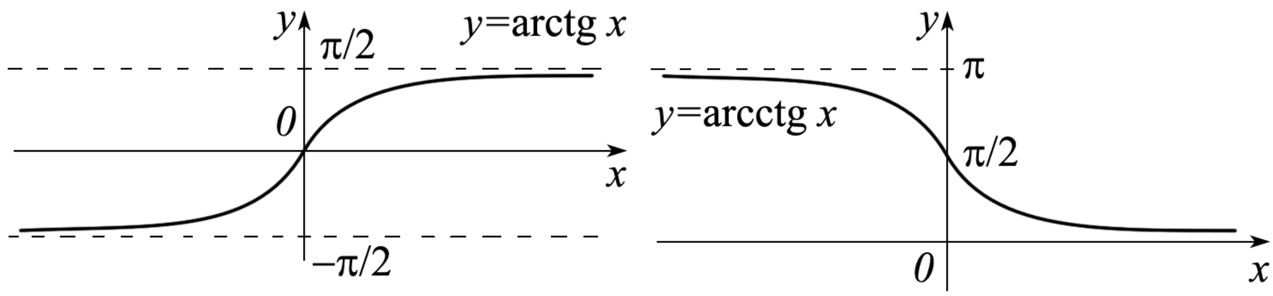


Функцией $\operatorname{arctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ будем называть функцию, обратную к функции $\operatorname{tg} x$, $x \in \left(-\pi/2, \pi/2\right)$, а функцией $\operatorname{arcctg} x$, $x \in \mathbb{R}$ - функцию, обратную к функции $\operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$. Эти функции непрерывны и монотонны.

В заключении отметим два полезных равенства с обратными тригонометрическими функциями.

$$1.\ \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$2.\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$




►Докажем первое равенство. Докажем, что $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$. Очевидно, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x$ и $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$. Отсюда $\frac{\pi}{2} - \arccos x = \arcsin x$.

Второе равенство доказывается аналогично. ◄

## 5.3. Некоторые важные пределы

Выше мы доказали, что $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Рассмотрим еще несколько важных пределов.

**1). *Второй замечательный предел***

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

► В теореме 2.4.1. было доказано, что для любой бесконечно малой числовой последовательности $\{x_n\}$ будет верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} (1+x_n)^{1/x_n} = e$. Тогда требуемое утверждение следует из определения предела по Гейне. ◄

**2).** $$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

► Функция $\frac{\ln(1+x)}{x}$ не определена в точке $x=0$, но мы можем использовать свойство сложной функции при условии, что $f(t)$ непрерывна: $\lim\limits_{x\to x_0} f\left(g(x)\right)=f\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.

Используя непрерывность логарифмической функции, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{1/x}=\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1$. ◄

**Следствие.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$.

► $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x\ln a}=\frac{1}{\ln a}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{\ln a}$. ◄

**3).** $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

► Пусть $e^x-1=y$. Тогда $x=\ln(1+y)$. Заметим также, что утверждение $x\to 0$ равносильно утверждению $y\to 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$.
◄

**Следствие.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ a>0,\ a\neq 1$.

► $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a\right)=\ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=\ln a$. Здесь положено $y=x\ln a\underset{x\to 0}{\to}0$. ◄

**4).** $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=s.$$

►
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^s-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{s\ln(1+x)}-1}{s\ln(1+x)}\cdot\frac{s\ln(1+x)}{x}\right)=s\cdot\lim_{x\to 0}\frac{e^{s\ln(1+x)}-1}{s\ln(1+x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=s.$$
◄

## § 6 Сравнение функций. Символы Ландау

### 6.1. Сравнение функций

**Определение 3.6.1.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}(x_0)$ *точки* $x_0$. *Будем говорить, что функция* $f(x)=O(g(x))$ *(читается: функция* $f(x)$ *есть* ***О большое*** *от функции* $g(x)$*) при* $x$, *стремящемся к* $x_0$, *если существует функция* $h(x)$, *определенная в той же окрестности точки* $x_0$ *такая, что* $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0)$ *выполняется равенство* $f(x)=h(x)\cdot g(x)$ *и* $|h(x)| \le C$.

**Пример 1.** $\sqrt{x}+2x=O(\sqrt{x})$ при $x \to 0$.

☺ $\sqrt{x}+2x=\sqrt{x}(1+2\sqrt{x})$ и в окрестности нуля функция $h(x)=1+2\sqrt{x}$ ограничена. ☻

**Пример 2.** $\sqrt{x}+2x=O(x)$ при $x \to \infty$.

☺ $\sqrt{x}+2x=x\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. При $x \to \infty$ сумма $2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ будет ограниченной. ☻

**Пример 3.** $x\sin\dfrac{1}{x}=O(x)$ при $x \to 0$.

☺ $h(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ ограничена. ☻

**Замечание.** *Равенство* $f(x)=O(1)$ *при* $x \to x_0$ *означает, что функция* $f(x)$ *ограничена в некоторой проколотой окрестности точки* $x_0$.

Если $f(x)=O(g(x))$ и $g(x)=O(f(x))$ при $x \to x_0$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ ***одного порядка***.

**Теорема 3.6.1.** *Если существует конечный, не равный нулю предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *то функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *одного порядка при* $x \to x_0$.

► Обозначим $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Так как существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, то в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ функция $h(x)$ ограничена. ◄

**Определение 3.6.2.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены в некоторой проколотой окрестности* $\overset{o}{U}(x_0)$ *точки* $x_0$. *Будем говорить, что функция* $f(x)$

*есть **бесконечно малая по сравнению с** функцией $g(x)$ при $x \to x_0$, если существует функция $h(x)$, определенная в той же окрестности точки $x_0$ такая, что $\forall x \in \overset{o}{U}(x_0)$ выполняется равенство $f(x) = h(x) \cdot g(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$.*

Если данное определение выполнено, то пишут: $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$ (читается: $f(x)$ есть ***о малое*** от $g(x)$ при $x$, стремящемся к $x_0$).

Если $g(x)$ бесконечно малая, то $f(x)$ тоже бесконечно малая и говорят, что $f(x)$ ***бесконечно малая более высокого порядка***, чем $g(x)$.

**Пример 4.** $x^2 + 2x = o\left(x^3\right), \quad x \to \infty$.

**Пример 5.** $x^2 = o(x), \quad x \to 0$.

**Пример 6.** $\sin^2 x \cdot \sin\dfrac{1}{x} = o(x), \quad x \to 0$.

**Замечание.** *Символы $O(g(x))$ и $o(g(x))$ при $x \to x_0$ означают не конкретную функцию, а класс функций и равенство $f(x) = o(g(x))$ означает только, что функция $f(x)$ принадлежит этому классу. Например, запись $x^2 = o(x)$ означает, что $x^2$ при $x \to 0$ является бесконечно малой функцией более высокого порядка, по сравнению с функцией $x$.*

Поэтому равенство $f(x) = o(g(x))$ нельзя понимать как обычное равенство, в частности нельзя читать это равенство справа налево.

**Пример 7.** Утверждение $o(f(x)) = O(f(x))$ - верно, а $O(f(x)) = o(f(x))$ - неверно.

Символы $O$ и $o$ были введены академиком Ландау и их называют ***символами Ландау.***

Отметим несколько важных для нас свойств символа $o$ (будем считать, что $x \to x_0$).

**1.** $o(Cf) = o(f)$

**2.** $C \cdot o(f) = o(f)$

**3.** $o(f) + o(f) = o(f)$

**4.** $o(o(f)) = o(f)$

**5.** $o(f + o(f)) = o(f)$

**6.** $o\left(f^k\right) \cdot o\left(f^m\right) = o\left(f^{k+m}\right), \ k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$

**7.** $f^k \cdot o(f) = o\left(f^{k+1}\right), \qquad k \in \mathbb{N}$

**8.** $\left(o(f)\right)^k = o\left(f^k\right), \qquad k \in \mathbb{N}$

**9.** $\dfrac{o\left(f^k\right)}{f} = o\left(f^{k-1}\right), \qquad k \in \mathbb{N}$

►Докажем, например, четвертое из этих свойств.

Возьмем какую-нибудь функцию $g(x)=o(o(f))$ и какую-нибудь функцию $g_1(x)=o(f)$. Это означает, что в некоторой проколотой окрестности точки $x_0$ выполнены соотношения $g(x)=\alpha(x)\cdot g_1(x)$ и $g_1(x)=\beta(x)\cdot f(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$. Тогда $g(x)=(\alpha(x)\cdot\beta(x))\cdot f(x)$, где $h(x)=\alpha(x)\cdot\beta(x)\to 0$, что означает, что $g(x)=o(f)$.

Остальные свойства доказываются аналогично. ◄

## 6.2. Эквивалентность функций

**Определение 3.6.3.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}(x_0)$ точки $x_0$. Будем говорить, что функция $f(x)$* ***эквивалентна*** *функции $g(x)$ при $x\to x_0$, если существует функция $h(x)$, определенная в той же окрестности точки $x_0$ такая, что $\forall x\in\overset{o}{U}(x_0)$ выполняется равенство $f(x)=h(x)\cdot g(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=1$.*

Эквивалентные функции обозначают символом $f\sim g$ при $x\to x_0$.

**Замечания**

***1.*** *Эквивалентные функции являются функциями одного порядка.*

***2.*** *Отношение эквивалентности обладает свойствами*

*а) $f\sim f$ (рефлексивность);*

*б) $f\sim g \Leftrightarrow g\sim f$ (симметричность);*

*в) $f\sim g,\, g\sim h\Rightarrow f\sim h$ (транзитивность).*

Используя пределы, найденные в §5, запишем таблицу некоторых эквивалентных функций, которая нам понадобится для вычисления различных пределов. При $t\to 0$ выполнены соотношения

$$\begin{array}{ll}
\sin t\sim t & e^t-1\sim t\\
\arcsin t\sim t & a^t-1\sim t\ln a\\
\mathrm{tg}\, t\sim t & \ln(1+t)\sim t\\
\mathrm{arctg}\, t\sim t & \log_a(1+t)\sim \dfrac{t}{\ln a}\\
1-\cos t\sim \dfrac{t^2}{2} & (1+t)^s-1\sim st
\end{array}$$

Доказательства этих соотношений предоставляем читателю.

**Теорема 3.6.2.** *Если при $x\to x_0$ выполнено $f\sim f_1$ и $g\sim g_1$, то*

*1) если существует $\lim\limits_{x\to x_0}(f_1\cdot g_1)$, то $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)=\lim\limits_{x\to x_0}(f_1\cdot g_1)$ и*

*2) если существует* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{g_1}$*, то* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{g_1}$.

►По условию теоремы в некоторой окрестности точки $x_0$ будет выполнено $f(x)=f_1(x)h_1(x)$ и $g(x)=g_1(x)h_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}h_1(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h_2(x)=1$.

Тогда

$\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)=\lim\limits_{x\to x_0}(f_1\cdot h_1\cdot g_1\cdot h_2)=\lim\limits_{x\to x_0}(f_1\cdot g_1)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(h_1\cdot h_2)=\lim\limits_{x\to x_0}(f_1\cdot g_1)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1\cdot h_1}{g_1\cdot h_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{g_1}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h_1}{h_2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f_1}{g_1}$. ◄

**Теорема 3.6.3 (Критерий эквивалентности функций)**

*Две функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны при* $x\to x_0$ *тогда и только тогда, когда при* $x\to x_0$ *справедливо равенство* $f(x)=g(x)+o(g(x))$.

► Пусть $f\sim g$ при $x\to x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x_0$ справедливо равенство $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=1$. Отсюда получим $f(x)-g(x)=g(x)(1-h(x))$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0}(1-h(x))=0$, то $f-g=o(g)$.

Обратно, пусть $f(x)=g(x)+o(g(x))$ при $x\to x_0$. Тогда в некоторой окрестности точки $x_0$ будет $f(x)-g(x)=g(x)\alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$. Отсюда $f(x)=g(x)(1+\alpha(x))$ или $f(x)=g(x)\cdot h(x)$, где $h(x)=1+\alpha(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=1$. Это означает, что $f\sim g$. ◄

Используя последнюю теорему, перепишем таблицу эквивалентов следующим образом:

$$\begin{array}{ll}
\sin t=t+o(t) & e^t-1=t+o(t)\\
\arcsin t=t+o(t) & a^t-1=t\ln a+o(t)\\
\mathrm{tg}\,t=t+o(t) & \ln(1+t)=t+o(t)\\
\mathrm{arctg}\,t=t+o(t) & \log_a(1+t)=\dfrac{t}{\ln a}+o(t)\\
\cos t=1-\dfrac{t^2}{2}+o(t^2) & (1+t)^s-1=st+o(t)
\end{array}$$

Покажем, как можно применять эти соотношения на практике для вычисления пределов.

**Пример 8.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-\sin 2x\cdot\ln\left(1-\dfrac{x}{2}\right)-1}{e^{x^2}-1}$.

☺ Используя таблицу эквивалентов и свойства $o\left(x^k\right)$, запишем

$$\sqrt[3]{\cos 6x}=\sqrt[3]{1-\frac{36x^2}{2}+o\left(x^2\right)}=1-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{36x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)+o\left(\frac{36x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)=$$

$$=1-6x^2+o\left(x^2\right),$$

$$\sin 2x\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)=\left(2x+o(x)\right)\left(-\frac{x}{2}+o(x)\right)=-x^2+o\left(x^2\right),\ e^{x^2}-1=x^2+o\left(x^2\right).$$

Отсюда, используя то, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{o\left(x^2\right)}{x^2}=0$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-\sin 2x\cdot\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)-1}{e^{x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-6x^2+x^2+o\left(x^2\right)-1}{x^2+o\left(x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-5x^2+o\left(x^2\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-5+o\left(x^2\right)/x^2}{1+o\left(x^2\right)/x^2}=-5.\ ☻$$

# ГЛАВА IV. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## §1 Производная и дифференцируемость функции

### 1.1. Определение производной

**Определение 4.1.1.** *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x_0$. *Допустим, что существует предел отношения приращения функции в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$. *Тогда этот предел называется* ***производной*** *функции в точке* $x_0$.

Производная функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ обозначается $f'(x_0)$, $f'_x(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $y'(x_0)$.

Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

Операция вычисления производной называется ***дифференцированием*** функции.

**Пример 1.** Вычислить производную функции $f(x) = ax^2$ а) в точке $x_0 = 1$; б) в произвольной точке $x$.

☺ а) Составим приращение функции $ax^2$ в точке $x_0 = 1$: $\Delta f(1) = a(1 + \Delta x)^2 - a \cdot 1^2 = a\left(2\Delta x + (\Delta x)^2\right)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\left(2\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a(2 + \Delta x) = 2a.$$

б) Составим приращение функции в произвольной точке $x$:

$$\Delta f(x) = a(x + \Delta x)^2 - ax^2 = a\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right).$$

Тогда $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a\left(2x\Delta x + (\Delta x)^2\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a(2x + \Delta x) = 2ax.$$ ☻

**Замечание.** *Производная, вычисленная в произвольной точке, является функцией. Если сначала найти эту функцию, а затем вычислить значение производной функции при заданном значении аргумента, то получим производную в конкретной точке. В рассмотренном примере, производная в произвольной точке равна* $2ax$. *Следовательно, в точке* $x = 1$ *производная будет равна* $2ax|_{x=1} = 2a$.

**Пример 2**. Вычислить производную функции $f(t) = 3\sin(2t + 1)$ в произвольной точке $t$.

☺ Приращение функции в произвольной точке равно $\Delta f = 3\sin\left(2\left(t+\Delta t\right)+1\right) - 3\sin\left(2t+1\right) = 6\sin\left(\Delta t\right)\cos\left(2t+1+\Delta t\right)$. Тогда

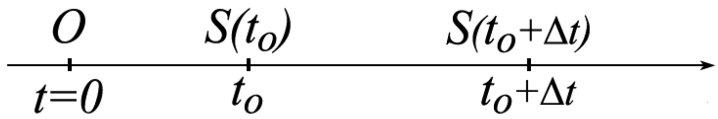
$$f'\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{6\sin\left(\Delta t\right)\cos\left(2t+1+\Delta t\right)}{\Delta t} = 6\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\left(\Delta t\right)}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \cos\left(2t+1+\Delta t\right) =$$

$= 6\cos\left(2t+1\right)$. ☻

## 1.2. Задачи, приводящие к производной

### а) Задача о скорости

Пусть материальная точка движется по прямой и путь, пройденный точкой от начала движения за время $t$, равен $S\left(t\right)$. Тогда путь, пройденный точкой от момента $t_0$ до момента $t_0 + \Delta t$, равен $S\left(t_0+\Delta t\right) - S\left(t_0\right)$ и средняя скорость на этом участке пути будет $v_{cp} = \dfrac{S\left(t_0+\Delta t\right) - S\left(t_0\right)}{\Delta t}$.




Назовем ***скоростью точки в момент*** $t_0$ (***мгновенной скоростью***) предел, к которому стремится средняя скорость этой точки за промежуток времени от $t_0$ до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$, т.е. $v\left(t_0\right) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{S\left(t_0+\Delta t\right) - S\left(t_0\right)}{\Delta t}$.

Согласно определению производной, получим $v\left(t_0\right) = S'\left(t_0\right)$. Таким образом, производная от функции, задающей закон движения материальной точки вдоль прямой, равна скорости движения этой точки.

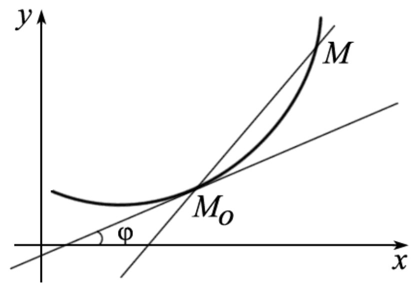
**Пример 3.** Закон движения маятника вдоль оси $OX$: $x\left(t\right) = 3\sin\left(2t+1\right)$. Найти скорость (модуль скорости) его движения в момент, когда маятник находится в начале координат.

☺ Скорость движения маятника вдоль оси равна $x'\left(t\right) = 6\cos\left(2t+1\right)$. Так как функции $x\left(t\right)$ и $x'\left(t\right)$ периодичны, то можно выбрать значения переменной $t$, при которых маятник находится в начале координат, лежащие на любом периоде, например, $t_1 = -\dfrac{1}{2}$ и $t_2 = \dfrac{\pi - 1}{2}$. Тогда $\left|x_1'\left(t\right)\right| = \left|x_2'\left(t\right)\right| = 6$. ☻

### б) Задача о касательной. Уравнение касательной

Рассмотрим график функции $y = f\left(x\right)$. Предположим, что функция непрерывна в точке $x_0$. Пусть $f\left(x_0\right) = y_0$, $f\left(x_0+\Delta x\right) = y_1$ и проведем прямую через точки графика этой функции $M_0\left(x_0, y_0\right)$ и $M\left(x_0+\Delta x, y_1\right)$. Назовем эту прямую ***секущей*** графика. Угловой коэффициент секущей равен $k_{сек} = \dfrac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \dfrac{f\left(x_0+\Delta x\right) - f\left(x_0\right)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$, и ее уравнение будет иметь вид: $y - y_0 = \dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}\left(x - x_0\right)$.

Очевидно, что, если устремить $\Delta x$ к нулю, то точка $M\left(x_0+\Delta x, y_1\right)$ будет двигаться по графику функции к точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$. При этом секущая будет поворачиваться и стремиться занять некоторое предельное положение, которое мы будем называть ***касательным положением*** *или* ***касательной к графику функции в точке*** $M_0\left(x_0, y_0\right)$**.**




Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}$, то, переходя к пределу в уравнении секущей, получим уравнение касательной $y-y_0=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, т.е. $k_{кас}=f'\left(x_0\right)$.

Используя то, что угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс, получаем **геометрический смысл производной**: *производная функции в точке $x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику этой функции, проведенной в точке $M_0\left(x_0, y_0\right)$, к положительному направлению оси абсцисс.*

**Пример 4.** В какой точке графика функции $y=2x^2$ касательная будет составлять с положительным направлением оси абсцисс угол $45^o$? Составить уравнение этой касательной.

☺ Используя результат примера 1, получим $y'(x)=4x$. Касательная будет составлять с осью абсцисс угол $45^0$ в той точке, где $y'(x)=\operatorname{tg}45^o=1$. Решая уравнение $4x_0=1$, получим $x_0={}^1\!/_4$. Тогда $y_0=\dfrac{2}{4^2}=\dfrac{1}{8}$ и уравнение касательной будет иметь вид $y-{}^1\!/_8=1\cdot\left(x-{}^1\!/_4\right)$ или, после упрощения, $y=x-{}^1\!/_8$. ☻

### 1.3. Дифференцируемость функции

**Определение 4.1.2.** *Функция $f(x)$ называется* ***дифференцируемой*** *в точке $x_0$, если существует число $A$ такое, что $\Delta f\left(x_0\right)=A\Delta x+o(\Delta x)$ при $\Delta x\to 0$.*

**Теорема 4.1.1.** *Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$ тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.*

► Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{A\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$, т.е. в этой точке производная существует и равна $A$.

Наоборот, если существует производная в точке $x_0$, то по критерию существования предела функции, получим $\dfrac{\Delta f\left(x_0\right)}{\Delta x}=f'\left(x_0\right)+\alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x)\to 0$, если $\Delta x\to 0$.

Тогда $\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x = A\Delta x + o(\Delta x)$, где $A = f'(x_0)$. ◄

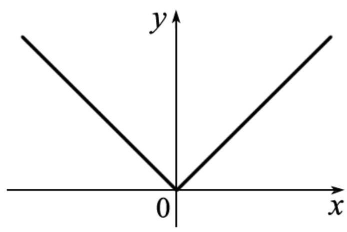
**Замечание.** *Из доказательства теоремы следует, что, если функция дифференцируема, то число $A$, о котором говорится в определении дифференцируемости, равно производной функции в данной точке.*

Из доказанной теоремы следует, что для функции одной переменной дифференцируемость равносильна существованию производной.

**Теорема 4.1.2.** *Если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.*

►Если функция дифференцируема в точке $x_0$, то для ее приращения выполняется соотношение $\Delta f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, откуда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$. А это означает, что функция непрерывна в точке $x_0$. ◄

**Замечание.** *Эта теорема необратима. Существуют функции, непрерывные в некоторой точке, но не имеющие производной в этой точке. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но ее график не будет иметь касательной в этой точке, следовательно, она не будет дифференцируемой в ней.*

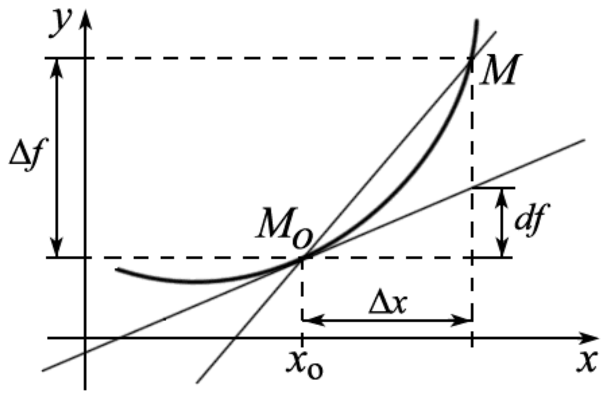



**Определение 4.1.3.** *Если функция дифференцируема в каждой точке промежутка $(a,b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, то будем говорить, что она* ***дифференцируема на промежутке*** $(a,b)$.

### 1.4. Дифференциал

**Определение 4.1.4.** *Допустим, что функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0$. Тогда выражение $f'(x_0)\Delta x$ будем называть* ***дифференциалом*** *этой функции в точке $x_0$ и обозначать $df(x_0)$ или $df$.*

Если функция дифференцируема в точке, то в этой точке выполняется равенство $\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x)$. Поэтому часто говорят, что дифференциал – это главная, линейная часть приращения функции в данной точке.




Отметим на графике функции точку $M(x_0, y_0)$, построим касательную в этой точке и возьмем некоторое приращение аргумента $\Delta x$. Тогда ясно, что *величина $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ совпадает с приращением ординаты касательной, соответствующем приращению аргумента* $\Delta x$. В этом состоит геометрический смысл дифференциала.

Разность между приращением функции и ее дифференциалом $\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$ очень мала при малых значениях $\Delta x$. Это позволяет использовать дифференциал для приближенных вычислений.

Найдем дифференциал от функции $f(x)=x$. Для этого найдем сначала производную этой функции: $(x)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(x+\Delta x)-x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} 1 = 1$.

Отсюда $dx = 1\cdot\Delta x$ и в формуле $df(x_0)=f'(x_0)\Delta x$ приращение аргумента можно заменить дифференциалом функции $f(x)=x$:

$$df(x_0)=f'(x_0)dx,$$

что придает этой формуле симметричный вид.

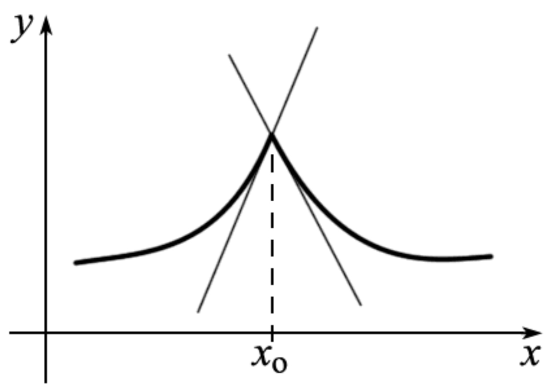
**Замечание.** *Из полученной формулы следует, что производную можно рассматривать как частное дифференциала функции и дифференциала аргумента:*

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}.$$

## 1.5. Односторонние и бесконечные производные

**Определение 4.1.5.** *Допустим, что функция определена на промежутке* $[x_0, x_0+\delta)$ *и существует предел* $\lim\limits_{\Delta x\to x_0+0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. *Тогда этот предел будем называть* ***правосторонний производной*** *функции* $f(x)$ *и обозначать* $f'_+(x_0)$.

*Аналогично, если функция определена на промежутке* $(x_0-\delta, x_0]$ *и существует* $\lim\limits_{\Delta x\to x_0-0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, *то его будем называть* ***левосторонней производной*** *функции* $f(x)$ *и обозначать* $f'_-(x_0)$.




Прямые, проходящие через точку $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0=f(x_0)$ с угловыми коэффициентами $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ естественно называть ***правосторонней и левосторонней касательными.***

**Теорема 4.1.3.** *Для того чтобы существовала производная* $f'(x_0)$ *в точке* $x_0$ *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке существовали односторонние производные и* $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$.

Доказательство этой теоремы очевидно и предоставляется читателю.

Теперь допустим, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\infty$. Тогда будем говорить, что в точке $x_0$ функция имеет ***бесконечную производную***.

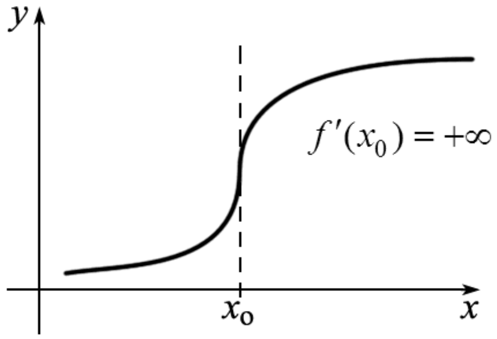
Запишем уравнение секущей в виде $\dfrac{\Delta x}{\Delta f(x_0)}(y-y_0)=x-x_0$. Тогда, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta f(x_0)}=0$, то предельное положение секущей задается уравнением

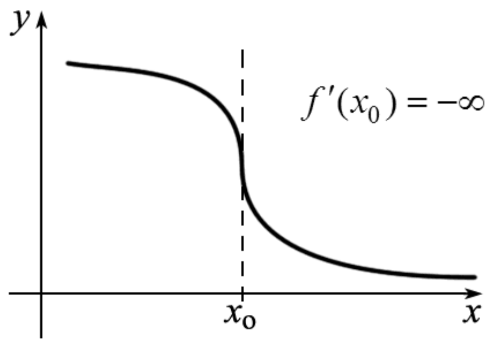
$x = x_0$. Геометрически это соответствует тому, что касательная к графику функции будет перпендикулярна оси абсцисс.

В точке, где производная функции бесконечна, функция не является дифференцируемой.

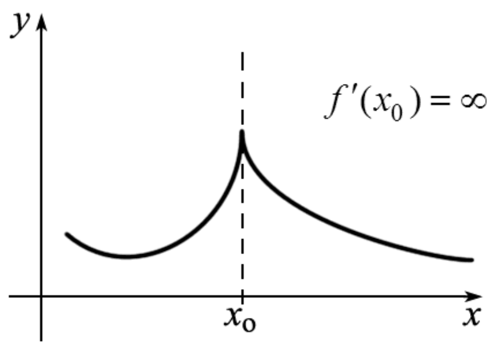
**Замечания**

**1.** *Может оказаться, что* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ *или* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$. *В этом случае, мы будем говорить, что* $f'(x_0) = +\infty$ *или, соответственно,* $f'(x_0) = -\infty$. *Графики таких функций в окрестности точки* $x = x_0$ *схематически изображены на рисунках.*




**2.** *Можно говорить об односторонних бесконечных производных. При этом, если обе односторонние производные бесконечны и разных знаков, то можно написать* $f'(x_0) = \infty$. *График такой функций приведен на рисунке.*




## §2 Правила дифференцирования. Таблица производных

### 2.1. Дифференцирование суммы, произведения, частного

**Теорема 4.2.1.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в точке* $x_0$. *Тогда в этой точке дифференцируемы их сумма* $f(x) + g(x)$, *их произведение* $f(x) \cdot g(x)$ *и, при условии, что* $g(x_0) \neq 0$, *их частное* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *при этом*

$$а)\quad \left(f(x) + g(x)\right)' \big|_{x=x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$б)\quad \left(f(x) \cdot g(x)\right)' \big|_{x=x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

$$в)\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' \Bigg|_{x=x_0} = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

► Так как $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ и $\Delta g(x_0)=g(x_0+\Delta x)-g(x_0)$, то $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+\Delta f(x_0)$ и $g(x_0+\Delta x)=g(x_0)+\Delta g(x_0)$.

Тогда, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0)$, то

а) $\big(f(x)+g(x)\big)'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\big(f(x_0+\Delta x)+g(x_0+\Delta x)\big)-\big(f(x_0)+g(x_0)\big)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)+\Delta g(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+g'(x_0)$.

б) $\big(f(x)g(x)\big)'\big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\big(f(x_0+\Delta x)g(x_0+\Delta x)\big)-\big(f(x_0)g(x_0)\big)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\big(f(x_0)+\Delta f(x_0)\big)\big(g(x_0)+\Delta g(x_0)\big)-f(x_0)g(x_0)}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)g(x_0)+f(x_0)\Delta g(x_0)+\Delta f(x_0)\Delta g(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}g(x_0)\cdot\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g(x_0)\cdot\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0)$.

Последний из пределов равен нулю, так как приращение $\Delta g(x_0)$ есть приращение непрерывной в точке $x_0$ функции, следовательно, бесконечно малая функция, а отношение $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ ограничено в окрестности этой точки.

в) Для вычисления производной от частного вычислим сначала приращения частного:

$$\Delta\frac{f}{g}=\frac{f(x_0+\Delta x)}{g(x_0+\Delta x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{f(x_0)+\Delta f(x_0)}{g(x_0)+\Delta g(x_0)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}=\frac{\Delta f(x_0)g(x_0)-f(x_0)\Delta g(x_0)}{g(x_0)\big(g(x_0)+\Delta g(x_0)\big)}$$

Тогда $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'\Big|_{x=x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\dfrac{f}{g}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}g(x_0)-f(x_0)\dfrac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0)\big(g(x_0)+\Delta g(x_0)\big)}=$

$=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$. ◄

**Следствие 1.** $\big(C\cdot f(x)\big)'=C\cdot f'(x)$.

► Вычислим сначала производную от постоянной функции: $(C)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}0=0$.

Тогда, применяя правило дифференцирования произведения, получим $\big(C\cdot f(x)\big)'=(C)'f(x)+Cf'(x)=Cf'(x)$. ◄

**Следствие 2.** *Из доказанной теоремы следуют соответствующие формулы для дифференциалов функций:*

$$\text{а)}\quad d(f+g)=df+dg,$$

$$\text{б)}\quad d(f\cdot g)=g\cdot df+f\cdot dg,$$

$$\text{в)}\quad d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g\cdot df-f\cdot dg}{g^2}.$$

**Замечание.** *Эту теорему с помощью метода математической индукции легко распространить на случай суммы и произведения любого конечного числа функций:* $(f_1+f_2+...+f_n)'=f_1'+f_2'+...f_n',$

$$(f_1\cdot f_2\cdot...\cdot f_n)'=f_1'\cdot f_2\cdot...\cdot f_n+f_1\cdot f_2'\cdot...\cdot f_n+...f_1\cdot f_2\cdot...\cdot f_n'.$$

## 2.2. Дифференцирование обратной функции

**Теорема 4.2.2.** *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и строго монотонна на промежутке* $[a,b]$ *и точка* $x_0\in(a,b)$ *такова, что существует* $f'(x_0)\neq 0$. *Тогда функция* $f^{-1}(y)$, *обратная функции* $f(x)$, *дифференцируема в точке* $y_0=f(x_0)$ *и* $\left(f^{-1}(y)\right)'|_{y=y_0}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

►Допустим для определенности, что функция $f(x)$ строго возрастает. Так как точка $x_0$ - внутренняя точка промежутка $[a,b]$, то существует отрезок $[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$, на котором функция $f(x)$ строго возрастает, следовательно, имеет обратную. Точка $y_0=f(x_0)$ будет внутренней точкой промежутка $\left[f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)\right]$, так как в силу монотонности функции $f(x)$ будет выполняться неравенство $f(x_0-\delta)<f(x_0)<f(x_0+\delta)$.

Возьмем приращение $\Delta y$ такое, чтобы $y_0+\Delta y\in\left[f(x_0-\delta),f(x_0+\delta)\right]$. Тогда $\Delta x=f^{-1}(y_0+\Delta y)-f^{-1}(y_0)\neq 0$, так как, в силу монотонности функции $f^{-1}(y)$ будет выполнено $f^{-1}(y_0+\Delta y)\neq f^{-1}(y_0)$. Кроме того, $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$, так как функция $f^{-1}(y)$ непрерывна в точке $y_0$.

Тогда можно написать $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{\Delta y/\Delta x}$ и, если существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$, то существует и $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}=\dfrac{1}{f'(x_0)}$. ◄

**Замечание.** *Доказанную формулу можно записать в виде*

$$f'(x_0)=\frac{1}{\left(f^{-1}(y)\right)'|_{y=f(x_0)}}.$$

## 2.3. Дифференцирование сложной функции

**Теорема 4.2.3.** *Пусть функция $f(t)$ дифференцируема в точке $t_0$ и функция $\varphi(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, такой что $\varphi(x_0)=t_0$. Тогда сложная функция $f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке $x_0$, причем*

$$\left(f(\varphi(x))\right)'|_{x=x_0}=f_t'(t_0)\cdot\varphi_x'(x_0)=f_t'(\varphi(x_0))\cdot\varphi_x'(x_0).$$

► При заданных условиях функция $f(t)$ будет определена в некоторой окрестности точки $t_0$ и непрерывна в этой точке. Аналогично, функция $\varphi(x)$ будет определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и непрерывна в ней. В гл3§4 было доказано, что тогда в окрестности точки $x_0$ будет определена сложная функция $f(\varphi(x))$. Возьмем приращение аргумента $\Delta x$ такое, чтобы $x_0+\Delta x$ принадлежало этой окрестности. Обозначим $\Delta t=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$ и отметим, что, так как функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке $x_0$, то $\Delta t\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Тогда, в силу дифференцируемости функции $f(t)$, можно написать $\Delta f(t_0)=f_t'(t_0)\Delta t+o(\Delta t)$, где $o(\Delta t)=\alpha(\Delta t)\cdot\Delta t,\quad \alpha(\Delta t)\xrightarrow[\Delta t\to 0]{}0$.

Деля последнее равенство на $\Delta x$ и переходя к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f_t'(t_0)\dfrac{\Delta t}{\Delta x}+\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta x}\right)=f_t'(t_0)\varphi_x'(x_0)$, так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta t}{\Delta x}=$ $=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\varphi_x'(x_0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\alpha(\Delta t)\cdot\dfrac{\Delta t}{\Delta x}\right)=0$. ◄

**Следствие. Инвариантность формы первого дифференциала**

*Форма записи дифференциала $df=f'(t)dt$ сохраняется, если аргумент $t$ является дифференцируемой функцией какого-нибудь другого аргумента.*

► Пусть $t=\varphi(x)$. Тогда по определению дифференциала

$$df=\left(f(\varphi(x))\right)'dx=f_t'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx.$$

Так как $\varphi'(x)dx=dt$, и $\varphi(x)=t$, то $df=f'(t)dt$. ◄

**Замечание.** *Необходимо понимать, что сохраняется только форма дифференциала $df=f'(t)dt$, но, если аргумент $t$ - независимая переменная, то $dt$ - приращение этого аргумента, а, если $t$ - функция, то $dt$ - это главная часть этого приращения.*

## 2.4. Таблица производных

Составим теперь таблицу для производных от простейших элементарных функций.

**1.** $(C)' = 0$,

**2.** $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

**3.** $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$,

**4.** $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$,

**5.** $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$,

**6.** $\left(e^x\right)' = e^x$,

**7.** $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$,

**8.** $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$,

**9.** $\left(\sin x\right)' = \cos x$,

**10.** $\left(\cos x\right)' = -\sin x$,

**11.** $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$,

**12.** $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

**13.** $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

**14.** $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

**15.** $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$,

**16.** $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$,

**17.** $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$,

**18.** $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$,

**19.** $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$,

**20.** $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

► Первая формула была получена в следствии 1 из теоремы 4.2.1.

Вторую формулу докажем, используя один из пределов, полученных в 5.3 главы 3.

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\left(x^{\alpha}\,\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}\right) = x^{\alpha}\lim_{\delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{x\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Формулы 3 и 4 являются частными случаями формулы 2.

Также, используя известные пределы, докажем пятую и седьмую формулы.

$$\left(a^x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x\Delta x\ln a}{\Delta x} = e^x\ln a.$$

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{x\ln a\cdot\Delta x} = \frac{1}{x\ln a}.$$

Формулы 6 и 8 являются частными случаями формул 5 и 7 при $a=e$.

Теперь докажем формулы 9 и 10.

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \cos x.$$

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\Delta x\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = -\sin x.$$

Формулы 11 и 12 получаются из правила дифференцирования частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Формулы 13-16 легко получить из правила дифференцирования обратной функции.

Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$. Обратной к ней функцией будет функция $x=\sin y,\quad y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому $(\arcsin x)'_x = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Последняя формула верна, если $y\neq\pm\frac{\pi}{2}$, т.е. если $x\neq\pm 1$.

Формулы 14-16 доказываются аналогично, и их доказательство предоставляем читателю.

Доказательство формул 17-20 также предоставляется читателю.◄

## 2.5. Логарифмическое дифференцирование

Рассмотрим прием, с помощью которого можно дифференцировать показательно-степенную функцию $(u(x))^{v(x)}$ и некоторые другие функции.

Обозначим $y=(u(x))^{v(x)}$. Так как эта функция определена при условии, что $u(x)>0$, то можно найти $\ln y$: $\ln y = v(x)\cdot\ln(u(x))$. Продифференцируем обе части последнего равенства по переменной $x$. Слева это будет производная от сложной функции: $\left(\ln y\right)'_x = \dfrac{y'}{y}$, справа – производная от произведения: $\left(v(x)\cdot\ln\left(u(x)\right)\right)' = v'\cdot\ln u + v\dfrac{u'}{u}$. Тогда $\dfrac{y'}{y} = v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}$, откуда $y' = y\cdot\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right) = u^v\cdot\left(v'\ln u + v\dfrac{u'}{u}\right)$.

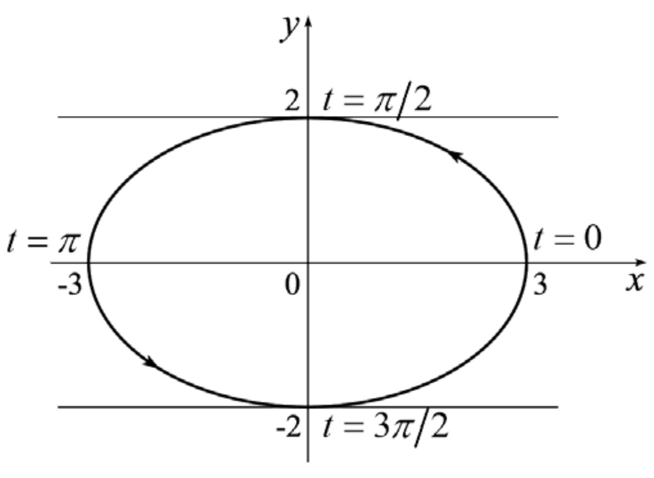
**Пример 1.** Вычислить производную от функции $\left(\sin x\right)^{\ln x}$.

☺ Положим $y = \left(\sin x\right)^{\ln x}$. Тогда $\ln y = \ln x\cdot\ln\left(\sin x\right)$. Дифференцируя обе части этого равенства, получим $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}\ln\left(\sin x\right) + \ln x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}$, откуда $y' = \left(\sin x\right)^{\ln x}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\sin x\right) + \ln x\cdot\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$. ☻

## 2.6. Дифференцирование функций, заданных параметрически

**Теорема 4.2.4.** *Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены на промежутке $\left[t_0-\delta, t_0+\delta\right]$, причем функция $x(t)$ непрерывна и строго монотонна, так что существует обратная функция $t = t(x)$, которая тоже непрерывна и строго монотонна. Допустим также, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$, причем $x'(t_0)\neq 0$. Тогда сложная функция $y = y\left(t(x)\right)$ дифференцируема по переменной $x$ в точке $x_0 = x(t_0)$, причем $y'_x(x_0) = \dfrac{y'_t(t_0)}{x'_t(t_0)}$.*

► По правилу дифференцирования сложной функции получим, что в точке $x_0$ выполняется равенство $\left(y\left(t(x)\right)\right)'_x = y'_t\cdot t'_x$. По формуле для производных взаимно обратных функций $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, откуда $\left(y\left(t(x)\right)\right)'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$. ◄




**Пример 2.** Найти точки на кривой, заданной уравнениями $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$, $t\in\left[0, 2\pi\right]$, в которых касательная будет параллельна оси абсцисс.

☺ Прямая параллельна оси абсцисс, если ее угловой коэффициент $k = 0$. Угловой коэффициент касательной равен производной функции $y\left(t(x)\right)$ по $x$:

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{2\cos t}{-3\sin t} = -\dfrac{2}{3}\operatorname{ctg} t$. Найдем значения $t$, при которых $y'_x = 0$. На промежутке $\left[0,2\pi\right]$ таких значений будет два: $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$ и $t_2 = \dfrac{3\pi}{2}$. Следовательно, на кривой будет две искомые точки $M_1(0,2)$ и $M_2(0,-2)$. ☻

**Замечание.** *Уравнения* $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t,\ t \in \left[0,2\pi\right]$ *задают две функции* $y = y(x)$*: первая соответствует* $t \in \left[0,\pi\right]$ *и вторая -* $t \in \left[\pi,2\pi\right]$. *На каждом из этих промежутков функция* $x(t)$ *монотонна и, следовательно, имеет обратную. Тогда теорема 4.2.4 применима.*

## §3 Производные и дифференциалы высших порядков

### 3.1. Производные высших порядков

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a,b)$ так, что в каждой точке этого промежутка существует ее производная $f'(x)$. Таким образом, эта производная сама является функцией аргумента $x$. Если эта функция дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$, то ее производную будем называть ***второй производной*** (или ***производной второго порядка***) от данной функции в точке $x_0$ и обозначать одним из следующих способов: $f''(x_0)$, $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $f^{(2)}(x_0)$, $f''_{xx}(x_0)$.

Таким образом, $f''(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}$.

Выведем формулу для второй производной функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 4.2.4 так, что для всех значений параметра из некоторого промежутка существует $y'_x$. Допустим также, что для значения параметра $t_0$ существуют $x''_{tt}$ и $y''_{tt}$. Тогда в некоторой окрестности точки $t_0$ функции $x = x(t)$ и $y'_x = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} = \varphi(t)$ являются параметрическим заданием функции $y'_x(t(x))$, которая является производной функции $y(t(x))$ по переменной $x$. По правилу дифференцирования такой функции получим

$$y''_{xx} = \left(\varphi(t(x))\right)'_x = \frac{\varphi'_t}{x'_t} = \frac{\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{\dfrac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^2}}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{\left(x'_t\right)^3}.$$

Аналогично, можно ввести производную от второй производной, которую будем называть ***третьей производной*** и обозначать $f^{(3)}(x)$, четвертую и т.д.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a,b)$ и имеет там производные $f'(x), f''(x),..., f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$- го порядка включительно. Если в точке $x_0 \in (a,b)$ функция $f^{(n-1)}(x)$ дифференцируема, то ее производную называют ***производной n-го порядка*** от функции $f(x)$ в точке $x_0$ и обозначают $f^{(n)}(x_0)$ или $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$.

Таким образом, $$f^{(n)}(x_0) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'\Big|_{x=x_0}.$$

Очевидно, что, если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные $n$-го порядка в некоторой точке, то $\left(C_1 f(x) + C_2 g(x)\right)^{(n)} = C_1 f^{(n)}(x) + C_2 g^{(n)}(x)$.

Приведем формулы для производных $n$-го порядка некоторых основных функций:

**1.** $\left(x^{\alpha}\right)^{(n)} = \alpha \cdot (\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

В частности, если $\alpha = m \in \mathbb{N}$, то $\left(x^m\right)^{(n)} = \begin{cases} m(m-1)...(m-n+1)x^{n-m}, & n < m, \\ m!, & n = m, \\ 0, & n > m. \end{cases}$

**2.** $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$.

**3.** $\left(\ln(a+x)\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(a+x)^n}$.

► Чтобы получить эту формулу, возьмем первую производную от логарифма $\left(\ln(a+x)\right)' = \dfrac{1}{a+x} = (a+x)^{-1}$, а затем докажем данную формулу с помощью метода математической индукции. ◄

**4.** $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $\quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

Эти формулы доказываются с помощью метода математической индукции.

**Теорема 4.3.1. (Формула Лейбница)**

*Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке $x$ производные $n$-го порядка. Тогда их произведение тоже имеет производную $n$-го порядка, причем*

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

**Замечания**

***1.*** *Здесь $C_n^k$ - биномиальные коэффициенты.*

***2.*** *Под производной нулевого порядка будем понимать саму функцию, т.е. $u^{(0)}(x) = u(x)$ и $v^{(0)}(x) = v(x)$.*

►Воспользуемся методом математической индукции.

При $n = 1$ биномиальные коэффициенты $C_1^0 = C_1^1 = 1$ и формула Лейбница дает равенство $(uv)' = uv' + u'v$, которое совпадает с правилом дифференцирования произведения.

Допустим, что формула верна для $n = m$, т.е. $(uv)^{(m)} = C_m^0 uv^{(m)} + C_m^1 u'v^{(m-1)} + \ldots + C_m^m u^{(m)} v$.

Докажем, что формула будет верна для $n = m + 1$.

$$(uv)^{(m+1)} = \left((uv)^{(m)}\right)' = \left(C_m^0 uv^{(m)} + C_m^1 u'v^{(m-1)} + \ldots + C_m^m u^{(m)} v\right)' =$$

$$= C_m^0 u'v^{(m)} + C_m^0 uv^{(m+1)} + C_m^1 u''v^{(m-1)} + C_m^1 u'v^{(m)} + \ldots + C_m^m u^{(m+1)} v + C_m^m u^{(m)} v' =$$

$$= C_m^0 uv^{(m+1)} + \left(C_m^0 + C_m^1\right) u'v^{(m)} + \ldots + \left(C_m^{m-1} + C_m^m\right) u^{(m)} v' + C_m^m u^{(m+1)} v =$$

$$= C_{m+1}^0 uv^{(m+1)} + C_{m+1}^1 u'v^{(m)} + \ldots + C_{m+1}^m u^{(m)} v' + C_{m+1}^{m+1} u^{(m+1)} v. \ ◄$$

**Замечание.** *Доказательство аналогично выводу формулы бинома Ньютона и использует свойства биномиальных коэффициентов.*

## 3.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на промежутке $(a,b)$. Ее дифференциал $df = f'(x)dx$, который мы будем называть первым дифференциалом функции, зависит от двух переменных $x$ и $dx = \Delta x$. Зафиксируем приращение аргумента $dx$, тогда первый дифференциал можно рассматривать как функцию от переменной $x$. Если эта функция дифференцируема по $x$, то можно говорить о величине $d^2 f(x) = d(df) = (f'(x)dx)' dx = f''(x)(dx)^2$, которую называют ***вторым дифференциалом*** функции $f(x)$ или ***дифференциалом второго порядка***. Очевидно, второй дифференциал существует, если функция имеет вторую производную.

Принято записывать $(dx)^2 = dx^2$, поэтому для второго дифференциала справедлива формула $d^2 f = f''(x)dx^2$.

Аналогично, положим $d^n f = d\left(d^{n-1} f\right)$. Тогда методом индукции легко получить $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$, где $dx^n = (dx)^n$.

Данные формулы справедливы только тогда, когда переменная $x$ является независимой переменной. Если переменная $x$ сама является функцией, то величина $dx$ будет дифференциалом этой функции, и ее нельзя считать константой. Следовательно,

$$d^2 f = d(df) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)\cdot dx + f'(x)d^2x = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

По сравнению с дифференциалом функции, где $x$ была независимой переменной, здесь появилось слагаемое $f'(x)d^2x$, в котором $d^2x$ - второй дифференциал функции $x = x(t)$, т.е. равен $d^2x = x''(t)dt^2$ и обращается в нуль только когда $x(t) = at + b$ (будет доказано в следствии 3 из теоремы 4.4.3 (Лагранжа)). Это означает, что форма второго дифференциала $d^2 f = f''(x)dx^2$ сохраняется для случая зависимой переменной, только если $x = at + b$.

## §4 Свойства дифференцируемых функций

### 4.1. Экстремумы

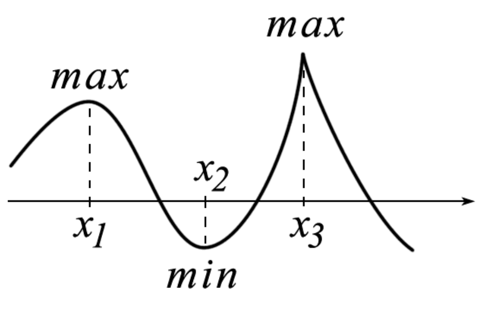
**Определение 4.4.1.** *Пусть функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ и некоторой ее окрестности $U(x_0)$, причем для всех значений $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \geq f(x)$. Тогда точку $x_0$ будем называть* ***точкой максимума*** *этой функции.*

*Аналогично, если функция $f(x)$ определена в точке $x_0$ и некоторой ее окрестности $U(x_0)$ и для всех значений $x \in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0) \leq f(x)$, то точку $x_0$ будем называть* ***точкой минимума*** *этой функции.*

*Точки максимума и минимума называют* ***точками экстремума*** *функции.*

**Замечание.** *Если в окрестности $\overset{o}{U}(x_0)$ выполняется одно из неравенств $f(x_0) > f(x)$ или $f(x_0) < f(x)$, то будем говорить, что в точке $x_0$ функция имеет* ***строгий максимум*** *или, соответственно,* ***минимум****.*

На рисунке справа точки $x_1$, $x_3$ являются точками строгого максимума, а точка $x_2$ - строгого минимума.

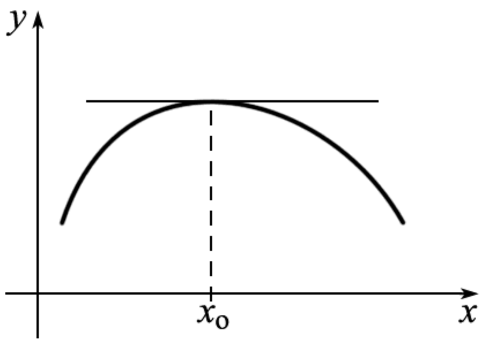


### 4.2. Теорема Ферма

**Теорема 4.4.1 (Ферма).** *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$, имеет экстремум в этой точке и дифференцируема в ней. Тогда $f'(x_0)=0$.*

► Пусть функция $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и в точке $x_0$ имеет максимум, т.е. для всех $x\in U(x_0)$ выполняется неравенство $f(x_0)\ge f(x)$. Тогда, если $x,x_0\in U(x_0)$ такие, что $x<x_0$, то будет справедливо неравенство $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$, а так как в точке $x_0$ существует конечная производная, то $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$.

Аналогично, если взять $x,x_0\in U(x_0)$ такие, что $x>x_0$, то будет выполнено неравенство $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ и, переходя к пределу при $x\to x_0+0$, получим $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$.




Неравенства $f'(x_0)\ge 0$ и $f'(x_0)\le 0$ означают, что $f'(x_0)=0$.

В случае минимума доказательство аналогично. ◄

### 4.3. Теорема Ролля

**Теорема 4.4.2 (Ролля).** *Пусть функция $f(x)$*

*а) непрерывна на отрезке $[a,b]$;*

*б) дифференцируема на интервале $(a,b)$;*

*в) принимает равные значения на концах промежутка, т.е. $f(a)=f(b)$.*

*Тогда на интервале $(a,b)$ существует хотя бы одна точка $c$ такая, что $f'(c)=0$.*

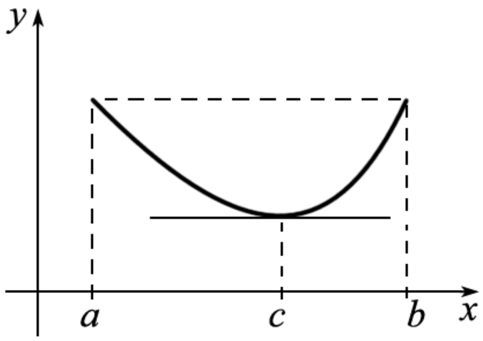
►По второй теореме Вейерштрасса (теорема 4.4.5) функция непрерывная на замкнутом промежутке достигает на этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значений. Обозначим их через $M$ и $m$, соответственно. Возможны два случая:

1) $M=m$. Тогда $f(x)=const$ и $f'(x)=0$ в любой точке промежутка $(a,b)$.

2) $M\ne m$. Тогда, так как значения функции на концах промежутка совпадают, то по крайней мере, одно из этих значений функция принимает во внутренней

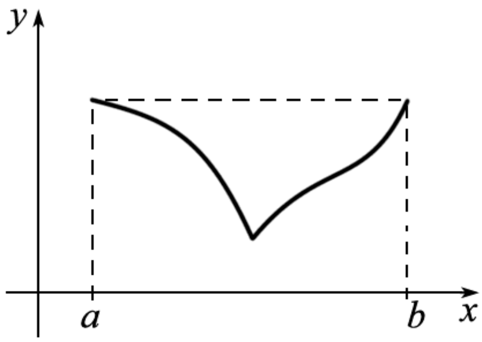
точке отрезка $[a,b]$. Обозначим эту точку через $c$. Тогда эта точка является точкой экстремума и по теореме Ферма $f'(c)=0$. ◄

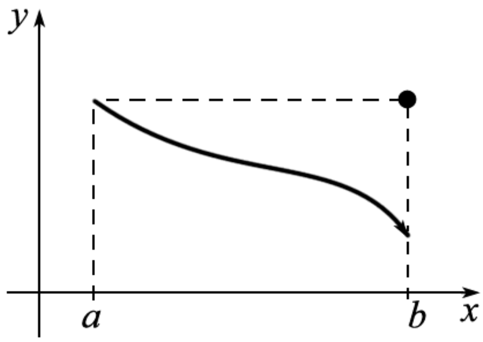
**Замечания**




***1.*** *Геометрически эта теорема означает, что, если функция непрерывна на отрезке, дифференцируема на интервале и принимает равные значения на концах этого отрезка, то на графике этой функции найдется по крайней мере одна точка, в которой касательная будет параллельна оси абсцисс.*

***2.*** *Все условия теоремы существенны. Примеры показывают, что, если убрать одно из условий, то может не существовать точки, в которой $f'(x)=0$. Некоторые из таких ситуацийизображены на рисунках:*




***3.*** *Если $f(a)=f(b)=0$, то теорему можно сформулировать следующим образом: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит, по крайней мере, один нуль производной этой функции.*

***4.*** *Теорема остается верной, если предположить, что существуют точки, в которых производная принимает бесконечное значение определенного знака.*

## 4.4. Теорема Лагранжа

**Теорема 4.4.3 (Лагранжа).** *Пусть функция $f(x)$*

*а) непрерывна на отрезке $[a,b]$;*

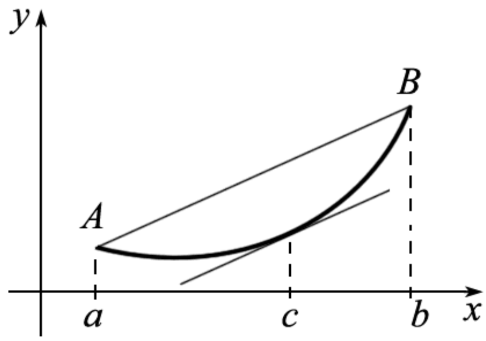
*б) дифференцируема на интервале $(a,b)$.*

*Тогда на интервале $(a,b)$ существует, по крайней мере, одна точка $c$, в которой выполняется равенство $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

► Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-\lambda x$. Эта функция будет непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $(a,b)$. Коэффициент $\lambda$

выберем так, чтобы $\varphi(a)=\varphi(b)$. Для этого должно быть $f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b$, т.е. $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Тогда функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять условиям теоремы Ролля (теорема 4.4.2) и будет существовать точка $c$, в которой $\varphi'(c)=0$. Так как $\varphi'(x)=f'(x)-\lambda$, то $f'(c)=\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.




◄

**Замечания**

***1.*** *Рассмотрим график функции, о которой говорится в теореме. Проведем отрезок, соединяющий концы этого графика – точки* $A(a,f(a))$ *и* $B(b,f(b))$. *Тогда частное* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *равно тангенсу угла наклона этого отрезка, а* $f'(c)$ *есть тангенс угла наклона касательной к графику функции, проведенной в точке* $M(c,f(c))$. *Геометрический смысл теоремы состоит в том, что на графике функции существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна хорде AB.*

***2.*** *Заключение теоремы Лагранжа иногда записывают в другом виде. Умножим обе части равенства* $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *на знаменатель. Получим* $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. *Далее введем величину* $\theta=\dfrac{c-a}{b-a}$. *Так как* $a<c<b$, *то* $0<\theta<1$. *Тогда* $c=a+\theta(b-a)$, $0<\theta<1$ *и заключение теоремы примет вид*

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

*Эту формулу принято называть* ***формулой конечных приращений.*** *Если положить* $a=x,\ b=x+\Delta x$, *то формула конечных приращений примет вид*

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.$$

**Следствие 1.** *Если функция* $f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a,b)$ *и во всех точках этого интервала* $f'(x)=0$, *то* $f(x)=const,\ x\in(a,b)$.

► Возьмем точки $x_0,x\in(a,b)$ и положим $\Delta x=x-x_0$, т.е. $x=x_0+\Delta x$. Тогда по формуле конечных приращений получим $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1$, откуда $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$. Это означает, что для любого $x\in(a,b)$ справедливо равенство $f(x)=f(x_0)=const$. ◄

**Следствие 2.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы на интервале $(a,b)$ и во всех точках этого интервала $f'(x)=g'(x)$, то $f(x)=g(x)+C$.*

► Доказательство следует из первого следствия, если его применить к функции $f(x)-g(x)$. ◄

**Следствие 3.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $(a,b)$ и во всех точках этого интервала $f'(x)=k$, где $k$ - константа, то $f(x)=kx+d$, $x\in[a,b]$.*

► Пусть $x\in(a,b)$. Тогда по формуле конечных приращений получим $f(x)-f(a)=k(x-a)$. Отсюда $f(x)=kx+d$, где $d=f(a)-ka$. ◄

Отсюда следует, что, если $f''(x)=0,\ x\in(a,b)$, то функция линейная: $f(x)=kx+d$.

**Следствие 4.** *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a,b)$ и дифференцируема в каждой точке этого интервала за исключением, быть может, точки $x_0\in(a,b)$. Тогда, если существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)=A$, то в точке $x_0$ существует левосторонняя производная $f'_-(x_0)=A$. Аналогично, если существует $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)=B$, то существует правосторонняя производная $f'_+(x_0)=B$.*

► Возьмем $a<x<x_0$ и применим теорему Лагранжа к данной функции на промежутке $[x,x_0]$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0+\theta(x-x_0))$. Если $x\to x_0$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x_0+\theta(x-x_0))=A$. Следовательно, существует и $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, который с одной стороны равен левосторонней производной функции в точке $x_0$, с другой стороны равен числу $A$. Таким образом, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)=f'_-(x_0)$.

Вторая часть следствия доказывается аналогично. ◄

Отсюда следует, что, если функция в точке $x_0$ имеет конечную производную $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)$, то выполняется равенство $\lim\limits_{x\to x_0-0} f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x)=f'(x_0)$, которое означает, что $f'(x)$ непрерывна в точке $x_0$. Следовательно, *если функция, дифференцируема на интервале, то ее производная не может иметь на этом интервале точек разрыва первого рода.*

**Упражнение.** Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ дифференцируема в произвольной окрестности нуля, но ее производная имеет в нуле разрыв второго рода.

**Следствие 5.** *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы при $x\geq x_0$ и выполняются условия $f(x_0)=g(x_0)$, $f'(x)>g'(x)$ при $x>x_0$, то $f(x)>g(x)$ при $x>x_0$.*

► Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-g(x)$. По условию $\varphi(x_0)=0$ и $\varphi'(x)>0$ при $x>x_0$. Тогда $\varphi(x)=\varphi(x)-\varphi(x_0)=\varphi'(x_0+\theta(x-x_0))(x-x_0)>0$ при $x>x_0$. ◄

**Пример 1.** Доказать, что $\ln(1+x)<x,\ \ x>0$.

☺ Положим $x_0=0$. Тогда $f(x)=x|_{x=0}=0$ и $g(x)=\ln(1+x)|_{x=0}=0$. Кроме того, $f'(x)=1>\dfrac{1}{1+x}=g'(x)$ при $x>0$, откуда следует требуемое неравенство. ☻

## 4.5. Теорема Коши

**Теорема 4.4.4 (Коши).** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и дифференцируемы на интервале $(a,b)$, причем $g'(x)\neq 0$ во всех точках этого интервала. Тогда на интервале $(a,b)$ найдется хотя бы одна точка $c$, в которой* $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

► Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-\lambda\cdot g(x)$, где множитель $\lambda$ выберем так, чтобы $\varphi(a)=\varphi(b)$, т.е. $f(a)-\lambda\cdot g(a)=f(b)-\lambda\cdot g(b)$. Отсюда получим $f(b)-f(a)=\lambda(g(b)-g(a))$. Если бы $g(b)=g(a)$, то по теореме 4.4.2 (Ролля) на интервале $(a,b)$ существовала бы точка $\xi$, в которой $g'(\xi)=0$, что противоречит условию теоремы. Тогда $g(b)-g(a)\neq 0$ и $\lambda=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Таким образом, функция $\varphi(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля и существует точка $c\in(a,b)$, в которой $\varphi'(c)=0$. Так как $\varphi'(x)=f'(x)-\lambda g'(x)$, то $f'(c)=\lambda g'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)$. Деля обе части последнего равенства на $g'(c)$, получим $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. ◄

**Замечания**

***1.*** *В теоремах Ролля, Лагранжа и Коши речь идет о значениях производной функции в некоторой точке, которая лежит внутри промежутка. Поэтому эти теоремы часто называют* ***теоремами о среднем****.*

***2.*** *Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, а теорема Лагранжа частным случаем теоремы Коши.*

***3.*** *Эти три теоремы часто называют* ***французскими****.*

## §5 Формула Тейлора

### 5.1. Многочлен Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и в этой точке имеет производную $n$-го порядка. Составим многочлен

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Этот многочлен будем называть ***многочленом Тейлора*** $n$-го порядка для функции $f(x)$ в точке $x_0$.

Очевидно, многочлен Тейлора удовлетворяет условиям:

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ \ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ ....,\ \ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),$$

поэтому его часто называют ***многочленом наилучшего приближения функции*** в точке $x_0$.

**Теорема 4.5.1.** *Если многочлен вида*

$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n$$

*удовлетворяет условиям*

$$P_n(x_0)=f(x_0),\ \ P_n'(x_0)=f'(x_0),\ \ ....,\ \ P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0),$$

*то его коэффициенты вычисляются по формулам*

$$a_k=\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},\ \ k=0,1,2,...,n.$$

► Найдем производные от данного многочлена:

$$P_n'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+...+na_n(x-x_0)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+...+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2},$$

$$P_n^{(k)}(x)=k!a_k+(k+1)k\cdot...\cdot 2a_{k+1}(x-x_0)+...+n(n-1)...(n-k+1)a_n(x-x_0)^{n-k},$$

$$P_n^{(n)}(x)=n!a_n.$$

Отсюда получим $P_n(x_0)=f(x_0)=a_0$, $P_n'(x_0)=f'(x_0)=a_1$, $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)=k!a_k$, $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)=n!a_n$, откуда получим требуемое. ◄

## 5.2. Формула Тейлора

Пусть $P_n(x)$ - многочлен Тейлора $n$ -го порядка для функции $f(x)$ в точке $x_0$. Обозначим $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. Тогда формулу

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

будем называть ***формулой Тейлора***, а величину $R_n(x)$ - ***остаточным членом*** этой формулы.

Получим два представления остаточного члена.

**Теорема 4.5.2.** *Пусть в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* $x_0$ *функция* $f(x)$ *имеет все производные до* $(n+1)$*-го порядка включительно. Тогда для всякого значения* $x \in U(x_0)$ *найдется точка* $\xi$*, лежащая между точками* $x$ *и* $x_0$ *такая, что* $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$*, где* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

► В силу условий, связывающих функцию с ее многочленом Тейлора, имеем $R_n(x_0)=R_n'(x_0)=...=R_n^{(n)}(x_0)=0$.

Введем функцию $g(x)=(x-x_0)^{n+1}$, которая удовлетворяет условиям $g(x_0)=g'(x_0)=...=g^{(n)}(x_0)=0$.

Рассмотрим теперь отношение $\dfrac{R_n(x)}{g(x)}$ на промежутке $[x_0,x_0+\delta]$, где $x_0+\delta \in U(x_0)$. Применяя теорему 4.4.4(Коши), получим $\dfrac{R_n(x)}{g(x)}=\dfrac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\dfrac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$, где $x_0<\xi_1<x$. Производя аналогичные выкладки с частным $\dfrac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}$, получим $\dfrac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\dfrac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{g'(\xi_1)-g'(x_0)}=\dfrac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}$, где $x_0<\xi_2<\xi_1$. Таким же образом, применяя далее теорему Коши, получим

$$\frac{R_n(x)}{g(x)}=\frac{R_n'(\xi_1)}{g'(\xi_1)}=\frac{R_n''(\xi_2)}{g''(\xi_2)}=...=\frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{g^{(n)}(\xi_n)}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)},$$

где $x_0<\xi<\xi_n<...<\xi_2<\xi_1<x$.

Но $R_n^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)$ и $g^{(n+1)}(x)=(n+1)!$, поэтому

$$R_n(x)=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{g^{(n+1)}(\xi)}g(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Аналогично рассматривается случай, когда $x\in[x_0-\delta,x_0]$. ◄

**Замечание.** *Остаточный член вида* $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *называют* ***остаточным членом в форме Лагранжа***.

**Теорема 4.5.3.** *Пусть существует* $f^{(n)}(x_0)$. *Тогда формула Тейлора будет иметь вид* $f(x)=P_n(x)+o\left((x-x_0)^n\right)$ *при* $x\to x_0$.

► Применяя теорему 4.4.4 (Коши) к функциям $R_n(x)$ и $g(x)=(x-x_0)^n$ на промежутке $[x_0,x_0+\delta]$, аналогично тому, как это было сделано в теореме 4.5.2, получим $\dfrac{R_n(x)}{g(x)}=\dfrac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1}-x_0)}$, где $x_0<\xi_{n-1}<...<\xi_1<x$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{R_n^{(n-1)}(\xi_{n-1})-R_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(\xi_{n-1}-x_0)}=\dfrac{1}{n!}R_n^{(n)}(x_0)=0$, так как $\xi_{n-1}\to x_0$ при $x\to x_0$. Следовательно, $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$. ◄

**Замечание.** *Такой вид остаточного члена* ***называется остаточным членом в форме Пеано.***

**Теорема 4.5.4.** *Пусть существует* $f^{(n)}(x_0)$ *и при* $x\to x_0$ *справедливо равенство* $f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$. *Тогда* $a_k=\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k=0,1,2,...,n$.

► Так как существует $f^{(n)}(x_0)$, то справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Таким образом,

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)=$$

$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Переходя к пределу при $x\to x_0$ в последнем равенстве, получим $a_0=f(x_0)$. Отбрасывая равные члены и сокращая это равенство на $x-x_0$, придем к равенству $a_1+a_2(x-x_0)+...+a_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right)=$

$$=\frac{f'(x_0)}{1!}+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right).$$

Опять устремляя $x \to x_0$, получим $a_1 = \dfrac{f'(x_0)}{1!}$ и, продолжая таким образом, получим $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$, $k = 0,1,2,\ldots,n$. ◄

**Замечание.** *Из этой теоремы следует, что представление функции в виде* $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$ *единственно.*

**Упражнение.** Докажите, что если функция $f(x)$ четная, то ее многочлен Тейлора в точке $x_0 = 0$ содержит только четные степени, а если $f(x)$ - нечетная, то этот же многочлен содержит только нечетные степени.

### 5.3. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора - Маклорена

Если $x_0 = 0$, то формула Тейлора называется ***формулой Маклорена***. Если функция имеет $f^{(n)}(0)$, то формула Маклорена имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o\left(x^n\right), \quad x \to 0.$$

Получим формулы Маклорена для основных элементарных функций.

**1)** $f(x) = e^x$.

Функция дифференцируема бесконечное число раз, причем производная $n$-го порядка равна $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$. Поэтому $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}(0) = 1$ и формула Маклорена имеет вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$.

**2)** $f(x) = \operatorname{sh} x$.

Эта функция также дифференцируема бесконечное число раз и

$$(\operatorname{sh} x)^{(n)} = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n - \textit{нечетное}, \\ \operatorname{sh} x, & n - \textit{четное}. \end{cases}$$

Поэтому $f(0) = f^{(2k)}(0) = 0$ и $f^{(2k-1)}(0) = 1$, $k \in \mathbb{N}$, и

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m-1}(x),$$

где $R_{2m-1}(x)=\dfrac{e^{\theta x}-e^{-\theta x}}{2(2m)!}x^{2m}=\dfrac{\operatorname{sh}(\theta x)}{(2m)!}x^{2m}$.

**3)** $f(x)=\operatorname{ch}x$.

Формула Маклорена для этой функции выводится аналогично предыдущей и имеет вид

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\operatorname{ch}(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

**4)** $f(x)=\sin x$.

Как было сказано в пункте 3.1, $(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\dfrac{\pi n}{2}\right)$, поэтому $f(0)=f^{(2k)}(0)=0$ и $f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1}$, $k\in\mathbb{N}$. Отсюда

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin(\theta x+\pi m)}{(2m)!}x^{2m}.$$

**5)** $f(x)=\cos x$.

Эта формула получается аналогично предыдущей и имеет вид

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+\frac{\cos\left(\theta x+\dfrac{(2m+1)\pi}{2}\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

**6)** $f(x)=\ln(1+x)$.

$\left(\ln(1+x)\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, поэтому $f(0)=0$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ и

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}.$$

**7)** $f(x)=(1+x)^\alpha$.

$\left((1+x)^\alpha\right)^{(n)}=\alpha\cdot(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Отсюда $f(0)=1$, $f'(0)=\alpha$, $f^{(k)}(0)=\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots(\alpha-k+1)$ и

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Функцию $(1+x)^{\alpha}$ будем называть ***биномом*** или ***биномиальной функцией***. Ясно, что формула бинома Ньютона получается из формулы Маклорена для биномиальной функции при $\alpha \in \mathbb{N}$.

Отметим частные случаи формулы Маклорена для биномиальной функции:

а) Если $\alpha = -1$, то формула примет вид

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + R_n(x).$$

б) Если в последней формуле заменить $x$ на $-x$, то получим

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_n(x).$$

**Замечания**

***1.*** *Во всех формулах остаточный член написан в форме Лагранжа, но его можно было бы написать в форме Пеано, например,*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right), \quad x \to 0.$$

***2.*** *В формулах для четных или нечетных функций степень $x$ у остаточного члена можно увеличить на 1. Например,*

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

*Это возможно, так как многочлен Маклорена для нечетной функции должен иметь только нечетные степени, следовательно, слагаемое со степенью $x^{2m}$ будет равно нулю.*

## §6 Правило Лопиталя

Докажем несколько теорем, которые объединяются под общим названием «***правило Лопиталя***» и которые позволяют находить пределы частного.

### 6.1. Неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$

**Теорема 4.6.1.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

*1) определены на промежутке* $[a,b]$*;*

*2)* $f(a)=g(a)=0$*;*

*3) существуют правосторонние производные* $f'(a)$ *и* $g'(a)$*, причем* $g'(a)\neq 0$.

*Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

► Так как существуют правосторонние производные функций $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x=a$, то для $x>a$ справедлива формула Тейлора при $n=1$, которая будет иметь вид:

$$f(x)=f'(a)(x-a)+o(x-a),\quad g(x)=g'(a)(x-a)+o(x-a).$$

Тогда $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(a)(x-a)+o(x-a)}{g'(a)(x-a)+o(x-a)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}{g'(a)+\dfrac{o(x-a)}{x-a}}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

◄

**Замечание.** *Аналогично можно доказать, что, если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *имеют* $n$ *производных в точке* $x=a$, $f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(n-1)}(a)=0$, $g(a)=g'(a)=\ldots=g^{(n-1)}(a)=0$ *и* $g^{(n)}(a)\neq 0$*, то* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}$.

**Теорема 4.6.2.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$

*1) определены на промежутке* $(a,b)$*;*

*2)* $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=0$*;*

*3) на промежутке* $(a,b)$ *существуют производные* $f'(x)$ *и* $g'(x)$*, причем* $g'(x)\neq 0$*;*

*4) существует* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ *(конечный или бесконечный).*

*Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

► Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, полагая $f(a)=g(a)=0$, и возьмем некоторое значение $x\in(a,b)$. Тогда на промежутке $[a,x]$ для данных функций выполнены все условия теоремы 4.4.4 (Коши) и $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$, где $a<c<x$.

Если $x\to a+0$, то и $c\to a+0$, поэтому $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to a+0}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}=A$. ◄

**Замечания**

***1.*** *Аналогично можно доказать, что при очевидных изменениях в условиях теоремы 4.6. 1 будет выполнено* $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$ *или* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(a)}{g'(a)}$, *а в теореме 4.6.2* $\lim\limits_{x\to a-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$ *или* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

***2.*** *Теорема 4.6.2 будет верна и в случае, если* $a=+\infty$ *или* $a=-\infty$. *Для доказательства нужно сделать замену переменной по формуле* $x=\dfrac{1}{t}$.

## 6.2. Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

**Теорема 4.6.3.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены и дифференцируемы на промежутке* $(a,+\infty)$, *причем* $g'(x)\neq 0$ *на этом промежутке. Допустим также, что* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\infty$ *и существует конечный* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

*Тогда существует* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$.

► Найдем $\sigma_1>a$ такое, чтобы $\forall x>\sigma_1$ выполнялись неравенства $|f(x)|>1$ и $|g(x)|>1$. Тогда $\forall x>\sigma_1$ будет $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$.

Затем возьмем некоторое число $\varepsilon>0$ и найдем $\sigma_2>a$ такое, чтобы $\forall x>\sigma_2$ было выполнено $A-\dfrac{\varepsilon}{2}<\dfrac{f'(x)}{g'(x)}<A+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

Тогда для всех $x>\sigma=\max(\sigma_1,\sigma_2)$ будут выполнены все вышеперечисленные условия.

Фиксируем некоторое число $x_0 > \sigma$ и возьмем $x > x_0$. Тогда на промежутке $[x_0, x]$ для данных функций выполнены условия теоремы 4.4.4 (Коши). Следовательно, существует число $c \in (x_0, x)$ такое, что $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Преобразуем левую часть этого равенства следующим образом: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \dfrac{f(x)}{g(x)} \cdot \dfrac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}$. Так как точка $x_0$ фиксирована, то будет выполнено $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x_0)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x_0)}{g(x)} = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}} = 1$, и тогда $\dfrac{1 - \dfrac{g(x_0)}{g(x)}}{1 - \dfrac{f(x_0)}{f(x)}} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда можно найти число $\sigma_0 > x_0$ такое, что если $x > \sigma_0$, то $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon/2}{|A| + \varepsilon/2}$. Теперь можно оценить частное $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Сначала преобразуем его следующим образом: $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot (1 + \alpha(x)) = \dfrac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)}$. Оценим полученную дробь при $x > \sigma_0$ сверху:

$$\frac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)} < \left(A + \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \alpha(x)) \le A + \frac{\varepsilon}{2} + \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\alpha(x)| < A + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = A + \varepsilon$$

и снизу:

$$\frac{f'(c)(1 + \alpha(x))}{g'(c)} > \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + \alpha(x)) > A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(A - \frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x) \ge$$

$$\ge A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(|A| + \frac{\varepsilon}{2}\right)|\alpha(x)| > A - \varepsilon.$$

Таким образом, по $\varepsilon > 0$ мы нашли $\sigma_0$ такое, что если $x > \sigma_0$, то выполняется неравенство $A - \varepsilon < \dfrac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$, что означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. ◄

**Замечания**

***1.*** *Теорема 4.6.3 верна и тогда, когда* $x \to -\infty$.

***2.*** *Теорема 4.6.3 верна и тогда, когда* $x \to a$, *где* $a$ *- конечная точка и когда* $A = +\infty$ *или* $A = -\infty$.

***3.*** *В теореме 4.6.3 можно потребовать только чтобы* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \infty$, *не накладывая такого же условия на функцию* $f(x)$. *Тогда, если существует конечный или определенного знака бесконечный* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *то существует*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A.$$

***4.*** *В теоремах §6 нельзя опустить условие существования* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Например,* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x}$ *нельзя вычислить с помощью правила Лопиталя, так как не существует* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. *Такой предел легко вычислить с помощью теории бесконечно малых функций:* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{\sin x}{x}}{1 + \dfrac{\sin x}{x}} = 1$.

## §7 Исследование функций с помощью пределов и производных

### 7.1. Исследование функции на монотонность

**Теорема 4.7.1.** *Пусть функция* $f(x)$ *дифференцируема на промежутке* $(a,b)$. *Тогда для того, чтобы* $f(x)$ *возрастала на всем промежутке, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \geq 0$, $x \in (a,b)$, *и для того, чтобы функция убывала на* $(a,b)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x) \leq 0$, $x \in (a,b)$.

► Необходимость. Пусть функция возрастает на $(a,b)$. Возьмем точку $x_0 \in (a,b)$ и приращение $\Delta x$ такое, чтобы $x_0 + \Delta x \in (a,b)$. Тогда, если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, так как числитель и знаменатель этой дроби неотрицательны, и, если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$, так как числитель и знаменатель неположительны. Следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

Достаточность. Пусть $f'(x) \geq 0$ на $(a,b)$. Возьмем два значения аргумента $x_1, x_2 \in (a,b)$, причем $x_1 < x_2$. Тогда на промежутке $[x_1, x_2]$ выполнены все условия теоремы 4.4.3 (Лагранжа) и $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, где $x_1 < c < x_2$. Так как $f'(c) \geq 0$ то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, следовательно, на промежутке $(a,b)$ функция $f(x)$ возрастает.

Аналогично рассматривается убывание функции. ◄

**Замечания**

***1.*** *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$, дифференцируема на $(a,b)$ и для всех $x \in (a,b)$ справедливо неравенство $f'(x) \geq 0$ $\left(f'(x) \leq 0\right)$, то функция возрастает (убывает) на $[a,b]$.*

***2.*** *Если в каждой точке $(a,b)$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$ $\left(f'(x) < 0\right)$, то функция строго возрастает (убывает) на $(a,b)$.*

Это условие является только необходимым условием строгой монотонности, например, функция $f(x) = x^3$ строго возрастает на всей вещественной оси, но ее производная в точке $x = 0$ обращается в нуль.

***3.*** *Теорема 4.7.1 остается верна, когда функция непрерывна на промежутке $(a,b)$, но в некоторых точках этого промежутка ее производная бесконечна, оставаясь при этом определенного знака. Например, функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ строго возрастает на всей вещественной оси, но не имеет конечной производной в точке $x = 0$.*

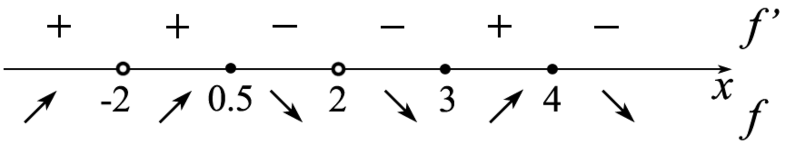
Из вышеизложенного следует, что для того, чтобы исследовать функцию на монотонность, нужно разделить область определения функции на части точками, где производная обращается в нуль или где она не существует (конечная). Такие точки называют ***критическими точками***. Точки, где производная равна нулю, называются ***стационарными точками***. Обращаем внимание читателя на то, что эти точки должны принадлежать области определения функции.

**Пример 1.** Исследовать на монотонность функцию $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt[3]{\left(x-3\right)^2}}{x^2-4}$.

☺ Область определения этой функции $D\left(f\right)=\left\{x\,|\,x\neq\pm2\right\}$. Найдем производную этой функции $f'\left(x\right)=\dfrac{-4x^2+18x-8}{3\sqrt[3]{x-3}\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{-4\left(x-4\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{3\sqrt[3]{x-3}\left(x^2-4\right)^2}$.

Критическими точками этой функции будут $x=4,\ x=\dfrac{1}{2}$ - стационарные точки, т.е. точки, где производная равна нулю, и $x=3$ - критическая точка, в которой не существует конечной производной. Точки $x=\pm2$ не являются критическими, так как не входят в область определения функции.

Изобразим на числовой оси область определения функции и все критические точки. Получим ряд промежутков, на каждом из которых исследуем производную на знак. По этому знаку определим направление монотонности функции.




Ответ: функция возрастает на каждом из промежутков $\left(-\infty,-2\right)$, $\left(-2,\frac{1}{2}\right]$, $\left[3,4\right]$ и убывает на каждом из промежутков $\left[\frac{1}{2},2\right)$, $\left(2,3\right]$, $\left[4,+\infty\right)$.

## 7.2. Экстремумы функции

Понятие экстремума было введено в §4. Там же была доказана теорема 4.4.1 (Ферма), которая дает необходимое условие экстремума дифференцируемой функции: *если функция дифференцируема в точке и имеет экстремум в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю*. Это условие является только необходимым, но не достаточным. Примером тому служит функция $f\left(x\right)=x^3$, производная которой равна нулю в точке $x=0$, но которая не имеет экстремума в этой точке.

**Теорема 4.7.2 (первое достаточное условие экстремума)**

*Пусть функция определена в точке* $x=x_0$ *и в некоторой ее окрестности* $\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right)$ *и возрастает на промежутке* $\left(x_0-\delta,x_0\right]$ *и убывает на промежутке* $\left[x_0,x_0+\delta\right)$, *то в точке* $x=x_0$ *функция имеет максимум.*

Аналогично, *если функция убывает на промежутке* $\left(x_0-\delta,x_0\right]$ *и возрастает на промежутке* $\left[x_0,x_0+\delta\right)$, *то в точке* $x=x_0$ *функция имеет минимум.*

► Допустим, что функция возрастает на промежутке $\left(x_0-\delta,x_0\right]$ и убывает на промежутке $\left[x_0,x_0+\delta\right)$.

Тогда, если $x \in (x_0 - \delta, x_0]$, то $f(x_0) \ge f(x)$, и, если $x \in [x_0, x_0 + \delta)$, то $f(x_0) \ge f(x)$, т.е. для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x_0) \ge f(x)$. Это означает, что точка $x = x_0$ является точкой максимума.

Вторая часть теоремы доказывается аналогично. ◄

**Следствие.** *Если функция непрерывна в точке* $x_0$ *и дифференцируема в* $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$ *- проколотой окрестности точки* $x_0$*, причем* $f'(x) \ge 0$ *на промежутке* $(x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f'(x) \le 0$ *на промежутке* $(x_0, x_0 + \delta)$*, то в точке* $x_0$ *функция имеет максимум.*

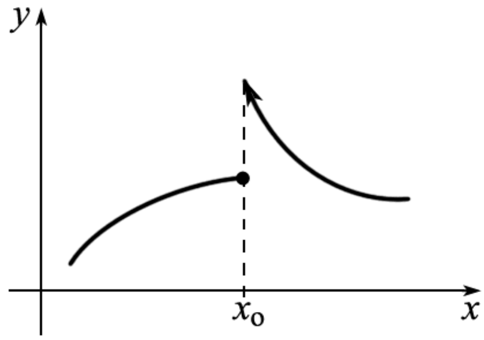
Аналогично, *функция непрерывная в точке* $x_0$ *и дифференцируемая в* $\overset{o}{U}_\delta(x_0)$*, имеет минимум в точке* $x_0$*, если* $f'(x) \le 0$ *на промежутке* $(x_0 - \delta, x_0)$ *и* $f'(x) \ge 0$ *на промежутке* $(x_0, x_0 + \delta)$.

Доказательство очевидно следует из теоремы 4.7.2 и критерия монотонности функции.

**Замечания**

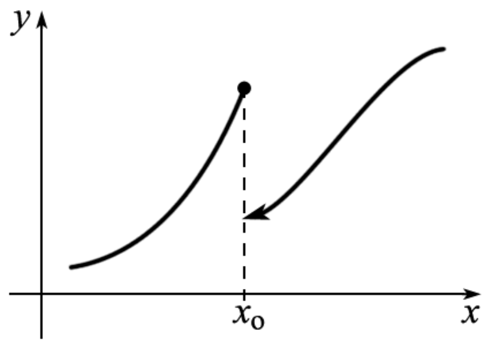
***1.*** *Если в теореме 4.7.2 или следствии предположить строгую монотонность функции, то получим строгий экстремум.*

***2.*** *Если отказаться от условия непрерывности функции в точке* $x_0$*, то теорема перестает быть верной. Пример такой функции изображен на рисунке.*




***3.*** *Условия, сформулированные в теореме (следствии), являются только достаточными, но не являются необходимыми.*

**Пример 2.** На рисунке изображен график функции, которая в точке $x_0$ имеет экстремум (максимум), но характер монотонности при переходе через эту точку не меняется.



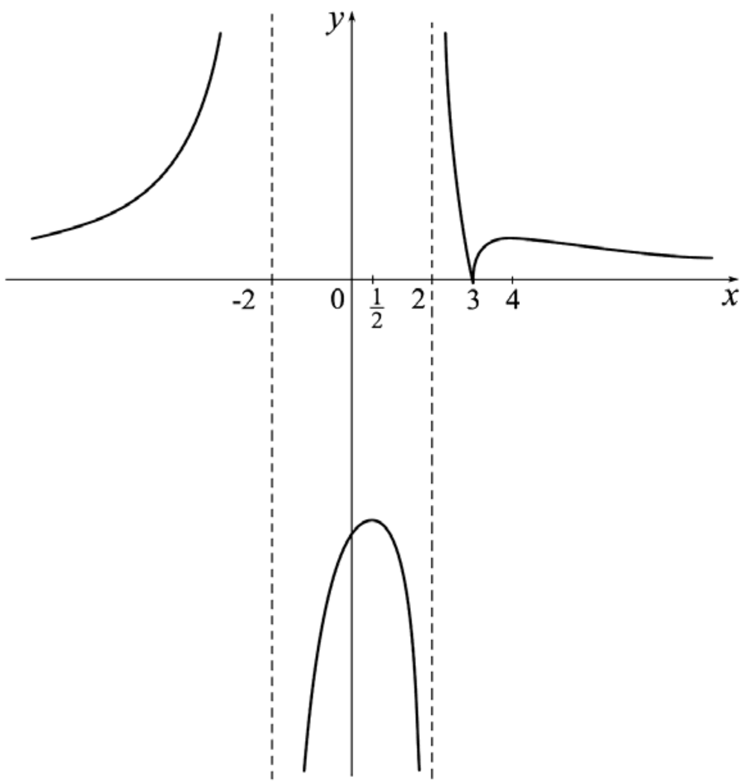

**Пример 3.** Функция $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \cos\dfrac{1}{x}\right), & x \ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ будет иметь минимум в точке $x = 0$, так как $f(x) \ge 0$, но знак ее производной, равной

$2x\left(2+\cos\frac{1}{x}\right)+\sin\frac{1}{x}$, в достаточно малой окрестности нуля будет определяться слагаемым $\sin\frac{1}{x}$ и, следовательно, будет меняться бесконечное число раз.

**4.** *Если $f'(x)\geq 0$ на промежутке $(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)\leq 0$ на промежутке $(x_0, x_0+\delta)$, то будем говорить, что в точке $x_0$ производная $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-» и наоборот, если $f'(x)\leq 0$ на промежутке $(x_0-\delta, x_0)$ и $f'(x)\geq 0$ на промежутке $(x_0, x_0+\delta)$, то будем говорить, что в точке $x_0$ производная меняет знак с «-» на «+».*

Очевидно, что точки, в которых производная может менять знак, – это критические точки функции, поэтому для исследования функции на экстремум находят критические точки и смотрят, как меняется знак производной.

Вернемся к примеру 1. В точке $x=\frac{1}{2}$ производная меняет знак с «+» на «-», следовательно, в этой точке функция имеет максимум. Отметим, что эта точка является стационарной, т.е. производная в ней равна нулю, поэтому касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Такой экстремум будем называть ***гладким.***




В точке $x=3$ производная меняет знак с «-» на «+», поэтому в этой точке функция имеет минимум, но производная в этой точке бесконечна, т.е. касательная к графику параллельна оси ординат. График функции приведен справа.

Экстремумы подобного рода (т.е. в точках, где не существует конечной производной) будем называть ***острыми***.

**Теорема 4.7.3 (Второе достаточное условие экстремума)**

*Пусть $x_0$ - стационарная точка функции $f(x)$ и пусть существует $f''(x_0)$. Тогда*

*а) если $f''(x_0)>0$, то $x_0$ - точка строгого минимума функции, и,*

*б) если $f''(x_0)<0$, то $x_0$ - точка строгого максимума функции.*

► Если в точке $x_0$ существует $f''(x_0)$, то можно написать формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right), \quad x \to x_0.$$

Так как $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то последнее равенство можно переписать в виде $f(x) = f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \left(1 + \alpha(x)\right)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Найдем $\delta > 0$ такое, чтобы для всех $x \in U_\delta(x_0)$ выполнялось неравенство $|\alpha(x)| < \frac{1}{2}$, тогда для этих значений $x$ будет верно $1 + \alpha(x) > 0$ и, таким образом, знак разности $f(x) - f(x_0)$ будет совпадать со знаком $f''(x_0)$. Следовательно, если $f''(x_0) > 0$, то $f(x) > f(x_0)$, и $x_0$ - точка минимума, и, если $f''(x_0) < 0$, то $f(x) < f(x_0)$, и $x_0$ - точка максимума. ◄

**Замечание.** *Аналогично можно доказать, что, если существует* $f^{(n)}(x_0)$ *и* $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, *но* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, *то,*

*a) если $n$ - нечетное, то точка $x_0$ не является экстремумом, и,*

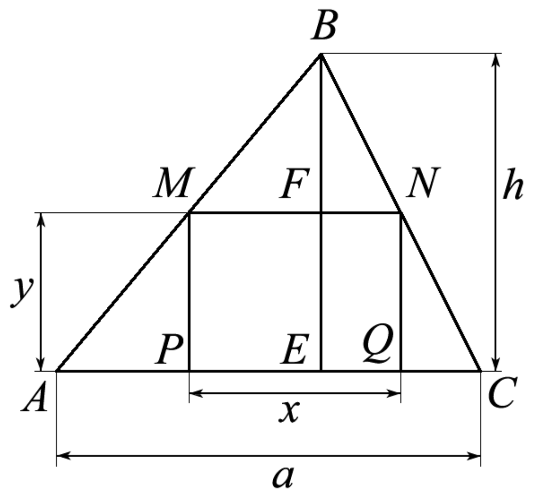
*b) если $n$ - четное, то в точке $x_0$ функция имеет экстремум, причем, если $f^{(n)}(x_0) > 0$, то минимум, и, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то максимум.*

## 7.3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция задана на промежутке $[a,b]$ и непрерывна на нем. Тогда, согласно второй теореме Вейерштрасса (теорема 4.4.5), она достигает там своего наибольшего и наименьшего значений. Очевидно, что эти значения могут не совпадать с экстремальными значениями. Поэтому экстремальные значения часто называют ***локальными экстремумами*** функции, т.е. ***локальным максимумом*** или ***локальным минимумом***.

Часто возникают задачи, в которых нужно найти наибольшее и (или) наименьшее значения функции на некотором промежутке. Если этот промежуток замкнутый, функция на нем непрерывна, имеет конечную или бесконечную производную и промежуток можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых производная сохраняет постоянный знак, то пользуются следующим правилом нахождения наибольшего и наименьшего значений функции: Находим критические точки функции на этом промежутке, вычисляем значения функции в критических точках и на концах этого промежутка. Тогда самое большое из вычисленных значений будет наибольшим, а самое маленькое – наименьшим значениями функции на этом промежутке.

**Пример 4.** В треугольник с основанием $a$ и высотой $h$ вписан прямоугольник так, что основание прямоугольника лежит на основании треугольника, а две его другие вершины лежат на боковых сторонах треугольника. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади.




☺ Пусть $PQ = x$, $MP = y$. Тогда площадь прямоугольника $S = xy$. Из подобия треугольников $ABC$ и $MBN$ получим пропорцию $\frac{AC}{MN} = \frac{BE}{BF}$ или $\frac{a}{x} = \frac{h}{h-y}$, откуда можно выразить $x$: $x = \frac{a(h-y)}{h}$.

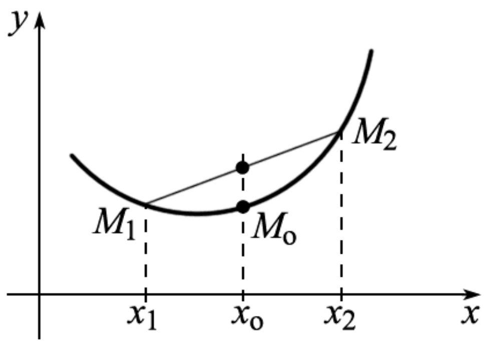
Тогда площадь прямоугольника будет задана, как функция аргумента $y$: $S(y) = \frac{a}{h}(h-y)y$, заданная на отрезке $y \in [0,h]$. Найдем производную этой функции $S'(y) = \frac{a}{h}(h-2y)$.

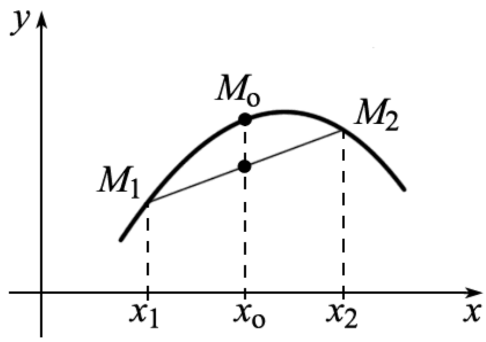
На промежутке $[0,h]$ существует одна стационарная точка функции $y = \frac{h}{2}$, в которой значение функции равно $\frac{ah}{4}$. Значения функции на концах промежутка $S(0) = S(h) = 0$. Следовательно, наибольшее значение функции равно $\frac{ah}{4}$, когда высота прямоугольника $y = \frac{h}{2}$, а длина его основания равна $x = \frac{a}{2}$. ☻

### 7.4. Выпуклость и вогнутость. Точки перегиба

**Определение 4.7.1.** *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a,b)$. Будем говорить, что она **выпукла вниз (выпукла)** на этом промежутке, если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполнено неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$ и **выпукла вверх (вогнута)**, если для любых $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполнено неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$.*

Рассмотрим график функции $f(x)$ на промежутке $(a,b)$. Возьмем две точки на этом графике с абсциссами $x_1$ и $x_2$. Тогда $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$ - значение функции в точке $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, которая является серединой отрезка $[x_1,x_2]$, а $\frac{1}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)$ - ордината середины хорды, соединяющей точки графика $M_1(x_1,f(x_1))$ и $M_2(x_2,f(x_2))$. Таким образом, выпуклость функции вниз означает, что для любых точек $M_1$ и $M_2$, лежащих на графике функции, середина хорды $M_1M_2$ будет лежать не ниже точки графика $M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2},f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right)$, а выпуклость вверх означает, что середина этой хорды лежит не выше точки $M_0$.




Если в определении выпуклости поставить строгие неравенства, то говорят о ***строгой выпуклости***.

**Теорема 4.7.4 (Достаточное условие выпуклости)**

*Пусть на $(a,b)$ существует $f''(x)$. Тогда, если $f''(x)\geq 0,\ x\in(a,b)$, то на этом промежутке функции выпукла вниз, и, если $f''(x)\leq 0,\ x\in(a,b)$, то функция выпукла вверх.*

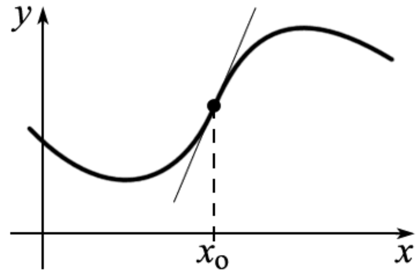
► Пусть $f''(x)\geq 0,\ x\in(a,b)$. Возьмем $x_1,x_2\in(a,b)$ и предположим, что $x_1<x_2$. Обозначим $x_0=\frac{x_1+x_2}{2}$ и $h=x_0-x_1=x_2-x_0$. Тогда по формуле Тейлора

$$f(x_1)=f(x_0)-\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(c_1)}{2!}h^2,\quad c_1\in(x_1,x_0)\ \text{ и}$$

$$f(x_2)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}h+\frac{f''(c_2)}{2!}h^2,\quad c_2\in(x_0,x_2).$$

Складывая эти равенства, получим $f(x_1)+f(x_2)=2f(x_0)+\frac{h^2}{2}\left(f''(c_1)+f''(c_2)\right)$. Так как вторая производная функции в любой точке промежутка неотрицательна, то $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f(x_0)$, а это означает, что функция выпукла вниз. ◄

**Замечание.** *Если* $f''(x)>0$ $\left(f''(x)<0\right)$ *на* $(a,b)$, *то функция строго выпукла. Это условие является только достаточным.*




**Определение 4.7.2.** *Пусть в точке* $x_0$ *функция имеет первую производную (конечную или бесконечную). Тогда, если при переходе через эту точку функция меняет направление выпуклости, то точка* $x_0$ *называется* ***точкой перегиба***.

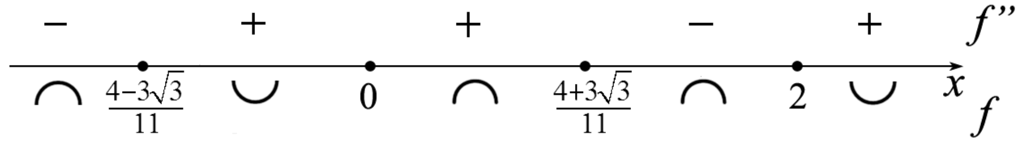
**Теорема 4.7.5.** *Пусть функция в точке* $x_0$ *имеет первую производную (конечную или бесконечную), и при переходе через эту точку ее вторая производная меняет знак. Тогда точка* $x_0$ *- точка перегиба функции.*

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 4.7.4.

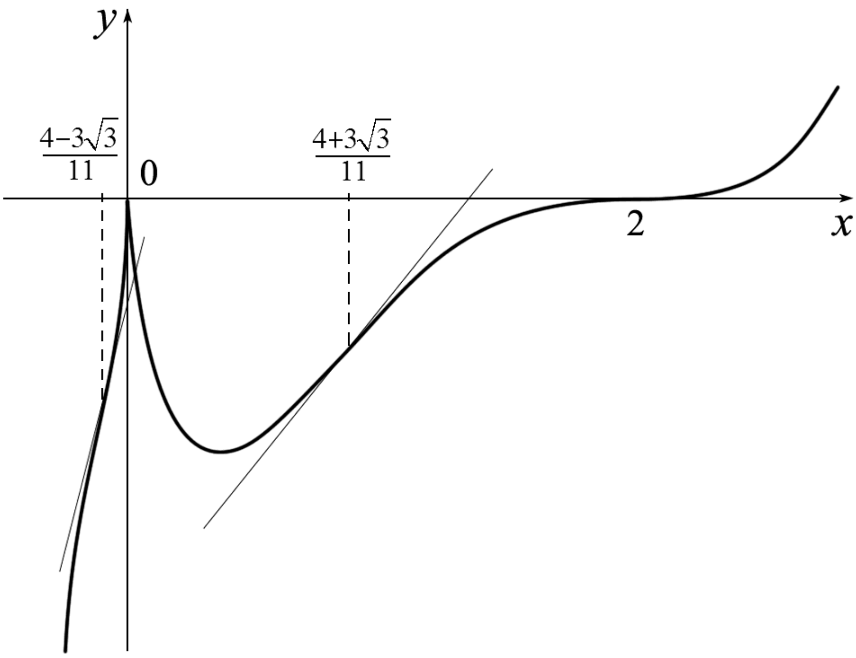
**Замечание.** *Очевидно, точки перегиба нужно искать в тех точках области определения функции, где существует первая производная и где вторая производная обращается в нуль или не существует.*

**Пример 5.** Исследовать функцию $f(x)=(x-2)^3\sqrt[3]{x^2}$ на выпуклость и точки перегиба.

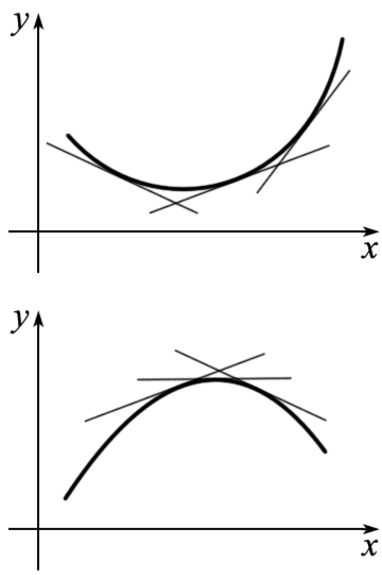
☺ Первая производная этой функции равна $f'(x)=\dfrac{(x-2)^2(11x-4)}{3\sqrt[3]{x}}$, а вторая $f''(x)=\dfrac{(x-2)\left(88x^2-64x-8\right)}{9\sqrt[3]{x^4}}$. Отметим на числовой оси точки, в которых можно ожидать перегиб функции: $x_1=0,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\dfrac{4\pm3\sqrt{3}}{11}$ и знак второй производной на полученных промежутках.




Получим: функция выпукла вверх на каждом из промежутков $\left(-\infty,\dfrac{4-3\sqrt{3}}{11}\right),\left(\dfrac{4+3\sqrt{3}}{11},2\right)$ и выпукла вниз на каждом из промежутков $\left(\dfrac{4-3\sqrt{3}}{11},0\right),\left(0,\dfrac{4+3\sqrt{3}}{11}\right)$, $(2,+\infty)$. Точками перегиба будут $x=2$ и $x=\dfrac{4\pm3\sqrt{3}}{11}$. Примерный вид графика данной функции представлен на рисунке. ☻




В заключение приведем свойство выпуклой функции, которое для дифференцируемой функции можно положить определением выпуклости.




**Теорема 4.7.6.** *Пусть функция дважды дифференцируема на промежутке* $(a,b)$ *и* $f''(x)\geq 0$. *Тогда на этом промежутке график функции лежит не ниже касательной, проведенной к этому графику в любой точке с абсциссой на данном промежутке.*

► Пусть $x_0$ - абсцисса точки графика, в которой проведена касательная. Тогда уравнение этой касательной будет $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.
Представим функцию по формуле Тейлора в виде
$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$, где $c$ лежит между $x$ и $x_0$. Тогда
$f(x)-\big(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\big)=f(x)-y_{кас}=$
$=\dfrac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2\geq 0$. А это означает, что точки графика функции лежат не ниже соответствующих точек касательной. ◄

Аналогично, *если* $f''(x)\leq 0$, *то точки графика будут лежать не выше соответствующих точек касательной.*

**Замечания**

***1.*** *Можно доказать, что, если функция имеет на промежутке первую конечную производную, то для ее выпуклости вверх необходимо и достаточно, чтобы ее график лежал над ее касательной, проведенной в любой точке этого* *промежутка (или на ней). Аналогично, для выпуклости вниз необходимо и достаточно, чтобы график лежал под такой касательной. (доказательство см. в [1], т.1)*

***2.** Из определения точки перегиба следует, что в точке перегиба существует касательная к графику функции и график лежит по разные стороны от этой касательной.*

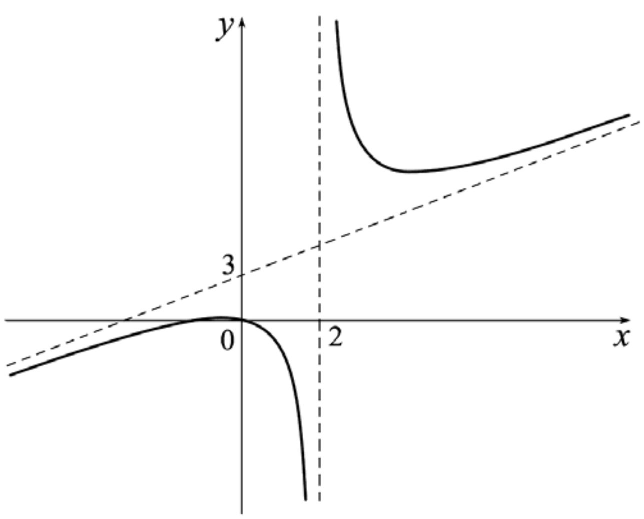
### 7.5. Асимптоты графика функции

**Определение 4.7.3.** *Пусть функция $f(x)$ определена при $|x|>\sigma$. Прямая $y=kx+b$ называется **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$, если $f(x)=kx+b+o(1)$, $x\to\infty$.*

**Определение 4.7.4.** *Прямая $x=x_0$ называется **вертикальной асимптотой** функции $f(x)$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.*

**Пример 6.** Найдем асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x-2}$.

☺ Выделяя из дроби целую часть, получим $f(x)=x+3+\dfrac{6}{x-2}$. Так как $\dfrac{6}{x-2}\to 0$ при $x\to\infty$, то прямая $y=x+3$ будет наклонной асимптотой графика данной функции.




Далее, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x}{x-2}=\infty$, поэтому вертикальная прямая $x=2$ будет вертикальной асимптотой графика этой функции. ☻

Для нахождения коэффициентов $k$ и $b$ в уравнении асимптоты можно получить формулы. Для этого сначала равенство $f(x)=kx+b+o(1)$ разделим на $x$ и устремим $x$ к бесконечности. Тогда получим

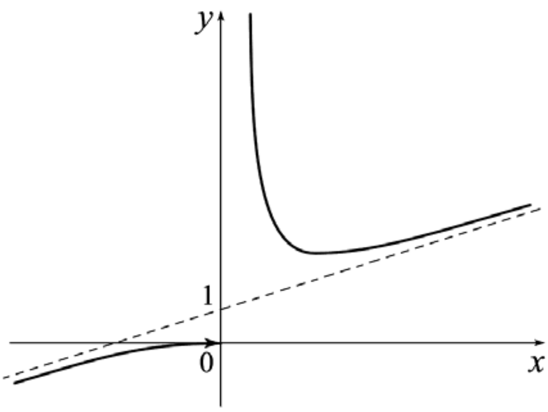
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Теперь перейдем к пределу в разности $f(x)-kx=b+o(1)$. Получим

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Очень часто указанные пределы не существуют, но существуют односторонние пределы. Тогда говорят о наклонной асимптоте на $+\infty$ или $-\infty$, или об односторонней вертикальной асимптоте.

**Пример 7.** Найти асимптоты графика функции $f(x) = xe^{1/x}$.




☺ Сначала найдем ее наклонные асимптоты. Используя формулу Тейлора, представим функцию в виде $f(x) = xe^{1/x} = x\left(1 + \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 1 + o(1)$.

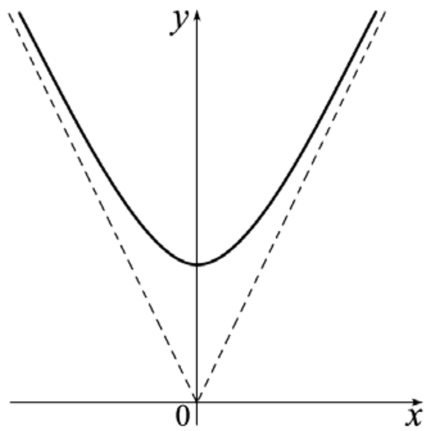
Следовательно, прямая $y = x + 1$ будет наклонной асимптотой нашей функции.

Вертикальные асимптоты следует искать там, где функция имеет разрыв, т.е. в нашем случае в точке $x = 0$. С помощью правила Лопиталя найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\left(xe^{1/x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{1/x} = \begin{cases} +\infty, & x \to 0+0, \\ 0, & x \to 0-0. \end{cases}$$

Следовательно, прямая $x = 0$ является правосторонней асимптотой графика нашей функции. ☻

**Пример 8.** Найти асимптоты графика функции $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} + \sqrt{x^2 - x + 2}$.




☺ Функция определена на всей вещественной оси и не имеет точек разрыва. Поэтому вертикальных асимптот нет.

Для нахождения наклонных асимптот используем формулу Тейлора:

$$f(x) = |x|\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} + |x|\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} =$$

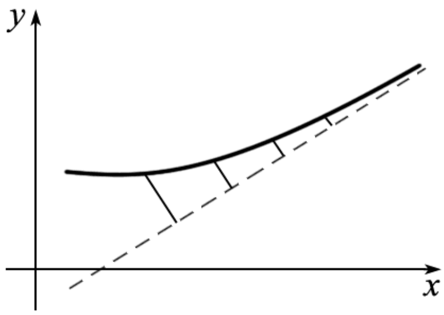
$$= |x|\left(\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right) = |x|\left(2 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$= 2|x| + o(1)$. Это означает, что функция имеет две наклонные асимптоты $y = 2x$, если $x \to +\infty$ и $y = -2x$, если $x \to -\infty$. ☻

Если угловой коэффициент наклонной асимптоты равен нулю, то получается ***горизонтальная асимптота***, которую мы будем считать частным случаем наклонной. В этой ситуации достаточно сразу искать $b = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$, если он конечен.

Например, функция, рассмотренная в примере 1, $f(x) = \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x^2 - 4}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, так как $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x(x^2-4)} = 0$ и

$$b = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-3)^2}}{x^2-4} = 0.$$




Очевидно, что асимптоты графика функции характеризуются следующим свойством: Расстояние от точки $M(x_M, y_M)$, лежащей на графике до асимптоты стремится к нулю при условии, что точка графика уходит в бесконечность, т.е. $\sqrt{x_M^2 + y_M^2} \to \infty$.

## 7.6. Исследование функции и построение графика

Изучение поведения функции целесообразно проводить по следующему плану:

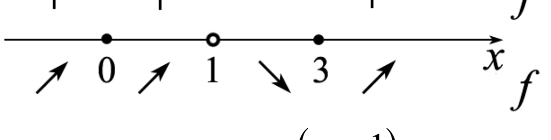
1. Найти область определения функции и ее точки разрыва.
2. Отметить такие свойства, как четность, нечетность, периодичность (если они есть).
3. Вычислить первую производную и найти промежутки возрастания и убывания функции, а также ее экстремумы.
4. Найти вторую производную и исследовать функцию на выпуклость. Найти точки перегиба функции.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Если надо, найти дополнительные точки, например, точки пересечения графика с координатными осями.
7. Построить график.

**Пример 9.** Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

☺ 1) Область определения этой функции $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Точка $x = 1$ - точка разрыва функции.

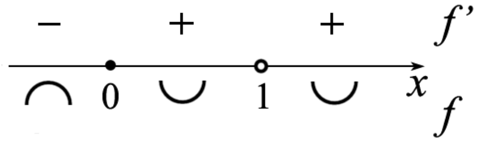
2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы. Для этого найдем производную: $f'(x) = \dfrac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$ и исследуем ее знак.




Функция возрастает на промежутке $(-\infty, 1)$ и на промежутке $[3, +\infty)$, и убывает на промежутке $(1, 3]$. В точке $x = 3$ функция имеет минимум, причем $f(3) = \dfrac{27}{8}$.

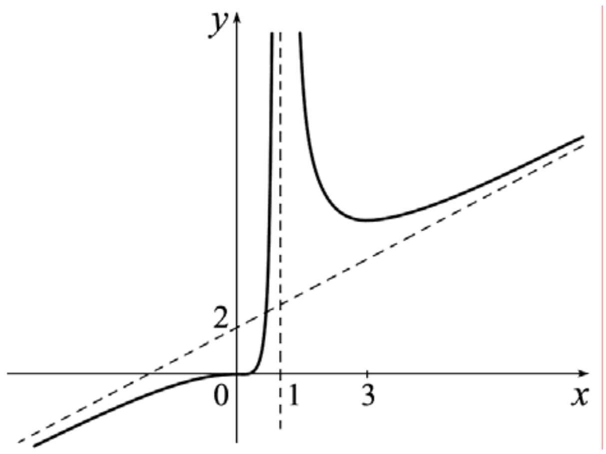
4) Исследуем выпуклость этой функции. Найдем ее вторую производную: $f''(x)=\dfrac{6x}{(x-1)^4}$ и исследуем ее знак.




Функция выпукла вверх на промежутке $(-\infty,0)$ и выпукла вниз на каждом из промежутков $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Точка $x=0$ - точка перегиба функции и $f(0)=0$.

5) Найдем асимптоты графика функции. Сначала возьмем точку разрыва функции и найдем предел функции при $x$, стремящемся к этой точке: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=+\infty$, следовательно, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой графика. Для нахождения наклонной асимптоты выделим целую часть из дроби $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}=x+2+\dfrac{3x+2}{(x-1)^2}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{(x-1)^2}=0$, то прямая $y=x+2$ является наклонной асимптотой.

6) Теперь можно построить график функции. ☻

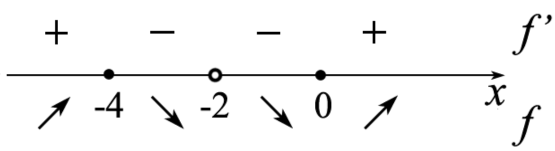



**Пример 10.** Исследовать функцию $f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+2}}$.

☺ 1) Область определения этой функции $D(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$. Точка $x=-2$ является точкой разрыва этой функции.

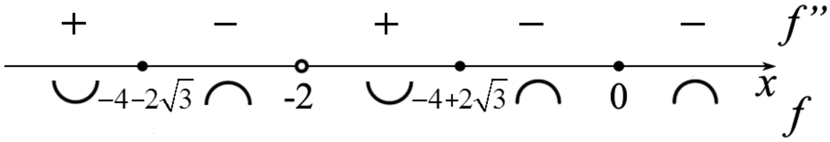
2) Функция не является ни четной, ни нечетной.

3) Исследуем функцию на монотонность и экстремумы. Найдем производную: $f'(x)=\dfrac{x+4}{3\sqrt[3]{x(x+2)^4}}$ и исследуем ее знак.




Функция возрастает на промежутке $(-\infty,-4]$ и на промежутке $[0,+\infty)$, и убывает на промежутке $[-4,-2)$ и на промежутке $(-2,0]$. Точка $x=-4$ - точка максимума, причем $f(-4)=-2$, а точка $x=0$ - точка острого минимума. $f(0)=0$.

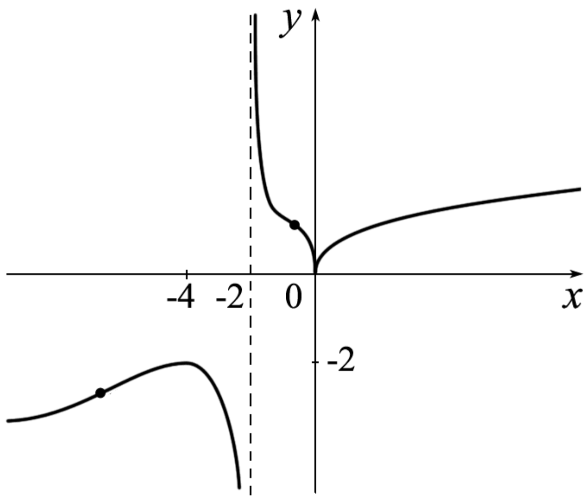
4) Исследуем функцию на выпуклость. Найдем вторую производную. $f''(x)=\dfrac{-2\left(x+4-2\sqrt{3}\right)\left(x+4+2\sqrt{3}\right)}{9\sqrt[3]{x^4(x+2)^7}}$ и исследуем ее знак




Функция выпукла вниз на промежутке $\left(-\infty,-4-2\sqrt{3}\right)$ и на промежутке $\left(-2,-4+2\sqrt{3}\right)$, и выпукла вверх на каждом из промежутков $\left(-4-2\sqrt{3},-2\right),\left(-4+2\sqrt{3},0\right)$ и $(0,+\infty)$. Точки $x=-4\pm2\sqrt{3}$ являются точками перегиба. $f\left(-4+2\sqrt{3}\right)\approx0{,}6$ и $f\left(-4-2\sqrt{3}\right)\approx-2{,}1$.

5) Прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой графика, так как $\lim\limits_{x\to-2}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+2}}=\infty$. Для удобства построения графика, найдем односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to-2-0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+2}}=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to-2+0}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+2}}=+\infty$. Наклонных асимптот нет, так как $f(x)\sim\sqrt[3]{x}$ при $x\to\infty$.

6) Построим график (отмечены точки перегиба). ☻




**Пример 11.** Построить кривую, заданную параметрически:

$$x(t)=\frac{t^2}{t+1},\quad y(t)=\frac{t^2-t+9}{t-1}.$$

☺1) Кривая определена при $t\neq\pm1$, т.е. состоит из трех ветвей: для $t\in(-\infty,-1)$, для $t\in(-1,1)$ и для $t\in(1,+\infty)$.

2) Найдем сначала асимптоты кривой.

$x\to-\infty$, $y\to-5{,}5$ при $t\to-1-0$, и $x\to+\infty$, $y\to-5{,}5$ при $t\to-1+0$, следовательно, прямая $y=-5{,}5$ является горизонтальной асимптотой.

Аналогично, если $t\to1-0$, то $x\to\dfrac{1}{2}$, $y\to-\infty$, и, если $t\to1+0$, то $x\to\dfrac{1}{2}$, $y\to+\infty$, следовательно, прямая $x=\dfrac{1}{2}$ является вертикальной асимптотой.

Обе переменные $x$ и $y$ стремятся к бесконечности только при $t \to \infty$. Поэтому параметры наклонной асимптоты найдем при $t \to \infty$: $k = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{(t^2 - t + 9)(t+1)}{(t-1)t^2} = 1$ и

$b = \lim\limits_{t\to\infty}\left(y(t) - kx(t)\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t^2 - t + 9}{t-1} - \frac{t^2}{t+1}\right) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{t^2 + 8t + 9}{t^2 - 1}\right) = 1$. Отсюда, прямая $y = x + 1$ - наклонная асимптота кривой.

3) Найдем производные от функций $x(t)$ и $y(t)$ по переменной $t$: $x'(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}$ и $y'(t) = \frac{(t-4)(t+2)}{(t-1)^2}$, и две первые производные от $y$ по $x$:

$y'_x = \frac{(t-4)(t+1)^2}{t(t-1)^2}$, при $t \neq -2$ и $y''_{xx} = \frac{(t+1)^3(16t-4)}{t^3(t+2)(t-1)^3}$.

Исследуем функции $x(t)$ и $y(t)$ на монотонность.

$$\begin{array}{ccccccccc} & + & & - & & - & & + & x'(t) \\ \nearrow & & -2 & \searrow & -1 & \searrow & 0 & \nearrow & t \\ & & & & & & & & x(t) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & + & & - & & - & & + & y'(t) \\ \nearrow & & -2 & \searrow & 1 & \searrow & 4 & \nearrow & t \\ & & & & & & & & y(t) \end{array}$$

Так как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяют функцию $y(x)$ на тех промежутках изменения переменной $t$, где $x(t)$ монотонна, то можно сказать, что в нашем случае мы имеем три функции: $y_1(x)$ при $t \in (-\infty, -2]$, $y_2(x)$ при $t \in [-2, -1) \cup (-1, 0]$ и $y_3(x)$ при $t \in [0, +\infty)$.

Найдем некоторые точки, лежащие на кривой: $M_1\left(x(-2) = -4,\ y(-2) = -5\right)$; $M_2\left(x(0) = 0,\ y(0) = -9\right)$, $M_3\left(x\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20},\ y\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{11}{4}\right)$, $M_4\left(x(4) = \frac{16}{5},\ y(4) = 7\right)$.

Теперь составим сводную таблицу изменения параметров искомой кривой

| $t$ | $x(t)$ | $y(t)$ |
|---|---|---|
| $(-\infty, -2)$ | $x(t)$ возрастает от $-\infty$ до $-4$ | $y(t)$ возрастает от $-\infty$ до $-5$ |
| $(-2, -1)$ | $x(t)$ убывает от $-4$ до $-\infty$ | $y(t)$ убывает от $-5$ до $-5{,}5$ |
| $(-1, 0)$ | $x(t)$ убывает от $+\infty$ до $0$ | $y(t)$ убывает от $-5{,}5$ до $-9$ |
| $(0, 1)$ | $x(t)$ возрастает от $0$ до $1/2$ | $y(t)$ убывает от $-9$ до $-\infty$ |
| $(1, 4)$ | $x(t)$ возрастает от $1/2$ до $16/5$ | $y(t)$ убывает от $+\infty$ до $7$ |
| $(4, +\infty)$ | $x(t)$ возрастает от $16/5$ до $+\infty$ | $y(t)$ возрастает от $7$ до $+\infty$ |

При $t=4$ производная $y'_x=0$ и меняет знак с «-» на «+», поэтому соответствующая точка кривой является точкой минимума.

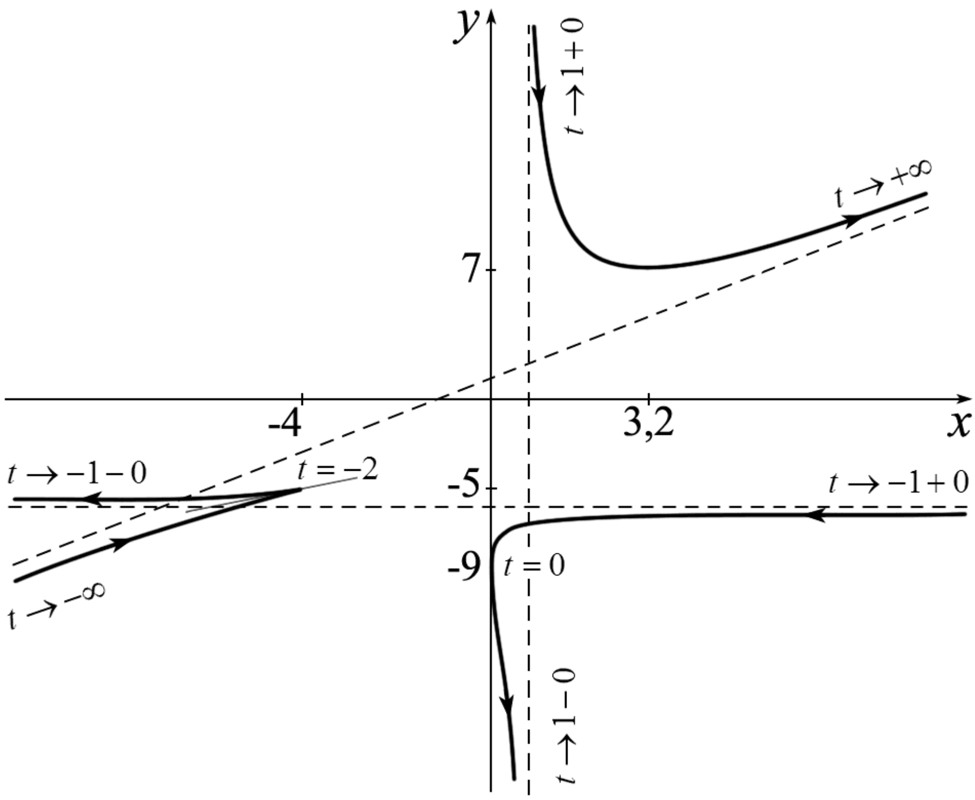
При $t=0$ производная $y'_x=\infty$, поэтому найдем $x'_y=\dfrac{t(t-1)^2}{(t-4)(t+1)^2}$, $t\neq-2$. В точке $t=0$ эта производная равна нулю и меняет знак с «-» на «+», поэтому эта часть кривой, рассматриваемая как функция $x=x(y)$, имеет минимум в соответствующей точке.

При $t=-2$ производной $y'_x$ не существует, но существуют ее предельные значения справа и слева, равные $1/3$.

4). Исследуем на знак вторую производную $y''_{xx}$:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | $y''_{xx}$ |
| | $-2$ | | $-1$ | | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $1$ | | $t$ |
| $\frown$ | | $\smile$ | | $\frown$ | | $\smile$ | | $\frown$ | | $\smile$ | $y(x)$ |

На промежутках $(-\infty,-2)$, $(-1,0)$ и $\left(1/4,1\right)$ кривая выпукла вверх, на промежутках $(-2,-1)$, $\left(0,1/4\right)$ и $(1,+\infty)$ кривая выпукла вниз. При $t=1/4$ вторая производная $y''_{xx}$ равна нулю и меняет знак, следовательно, в соответствующей точке кривая имеет перегиб. Строим график функции. ☻



## §8 Векторная функция скалярного аргумента

### 8.1. Определения

**Определение 4.8.1.** Если каждому значению $t \in G$, где $G \subset \mathbb{R}$, ставится в соответствие вектор $\vec{r}(t)$ трехмерного пространства, то будем говорить, что на множестве $G$ задана ***векторная функция*** $\vec{r}(t)$ ***скалярного аргумента*** $t$ или ***вектор-функция*** $\vec{r}(t)$.

Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то задание векторной функции $\vec{r}(t)$ равносильно заданию трех координатных функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$. Это можно записать в виде $\vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$ или, используя координатные орты, $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

Если $z(t) = 0,\ t \in G$, то функцию $\vec{r}(t)$ называют ***двумерной***.

Будем считать, что начало вектора $\vec{r}(t)$ находится в начале координат, т.е. векторы $\vec{r}(t)$ являются радиус-векторами. Тогда множество концов этих векторов называют ***годографом*** вектор-функции.

Символом $\left|\vec{r}(t)\right|$ будем обозначать длину вектора $\vec{r}(t)$, т.е.

$$\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}.$$

### 8.2. Предел и непрерывность

**Определение 4.8.2.** *Вектор* $\vec{a}$ *называют* ***пределом*** *вектор-функции* $\vec{r}(t)$ *при* $t \to t_0$, *если* $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| = 0$.

Записывать этот факт будем следующим образом $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$.

**Теорема 4.8.1.** *Вектор* $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$ *тогда и только тогда будет пределом вектор-функции* $\vec{r}(t)$ *при* $t \to t_0$, *когда* $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_1$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_2$, $z(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_3$.

► Пусть $\vec{a} = \lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$, т.е. $\lim\limits_{t \to t_0} \left|\vec{r}(t) - \vec{a}\right| = 0$. Тогда $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_1$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_2$, $z(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} a_3$ так как

$$\left|x(t) - a_1\right| \le \sqrt{\left(x(t) - a_1\right)^2 + \left(y(t) - a_2\right)^2 + \left(z(t) - a_3\right)^2},$$

$$\left|y(t) - a_2\right| \le \sqrt{\left(x(t) - a_1\right)^2 + \left(y(t) - a_2\right)^2 + \left(z(t) - a_3\right)^2},$$

$$\left|z(t) - a_3\right| \le \sqrt{\left(x(t) - a_1\right)^2 + \left(y(t) - a_2\right)^2 + \left(z(t) - a_3\right)^2}.$$

Обратно, если $x(t)\xrightarrow[t\to t_0]{} a_1$, $y(t)\xrightarrow[t\to t_0]{} a_2$, $z(t)\xrightarrow[t\to t_0]{} a_3$, то $\left|\vec r(t)-\vec a\right|=\sqrt{\left(x(t)-a_1\right)^2+\left(y(t)-a_2\right)^2+\left(z(t)-a_3\right)^2}\underset{t\to t_0}{\to}0$. ◄

Очевидно, что для векторной функции выполнено утверждение: *для того чтобы вектор $\vec a$ был пределом вектор-функции $\left|\vec r(t)\right|$ при $t\to t_0$ необходимо и достаточно, чтобы вектор-функцию можно было представить в виде $\vec r(t)=\vec a+\vec\gamma(t)$, где $\vec\gamma(t)\underset{t\to t_0}{\to}\vec 0$.*

**Свойства пределов вектор-функции**

**Свойство 1**. *Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec r(t)\right|=\left|\vec a\right|$.*

Доказательство следует из неравенства $\left|\left|\vec r(t)\right|-\left|\vec a\right|\right|\le\left|\vec r(t)-\vec a\right|$.

**Свойство 2.** *Равенство $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec 0$ равносильно равенству $\lim\limits_{t\to t_0}\left|\vec r(t)\right|=0$.*

В одну сторону это свойство следует из свойства 1, а в обратную из определения предела вектор-функции.

**Свойство 3**. *Если $\vec r(t)$ - векторная функция, а $f(t)$ - скалярная функция аргумента $t\in G$, причем $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r(t)=\vec a$ и $\lim\limits_{t\to t_0}f(t)=A$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\left(f(t)\cdot\vec r(t)\right)=A\cdot\vec a$.*

► По критерию того, что число $A$ является пределом функции $f(t)$, получим $f(t)=A+\beta(t)$, где $\beta(t)\to 0$ при $t\to t_0$.

Аналогично, $\vec r(t)=\vec a+\vec\gamma(t)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}\vec\gamma(t)=\vec 0$. Тогда

$$f(t)\cdot\vec r(t)=\left(A+\beta(t)\right)\left(\vec a+\vec\gamma(t)\right)=A\cdot\vec a+\left(\beta(t)\vec a+A\vec\gamma(t)+\beta(t)\vec\gamma(t)\right),$$

причем $\left|\beta(t)\vec a+A\vec\gamma(t)+\beta(t)\vec\gamma(t)\right|\le\left|\beta(t)\right|\left|\vec a\right|+\left|A\right|\left|\vec\gamma(t)\right|+\left|\beta(t)\right|\left|\vec\gamma(t)\right|$,

так как каждая компонента правой части стремится к нулю, то $\beta(t)\vec a+A\vec\gamma(t)+\beta(t)\vec\gamma(t)\to\vec 0$, следовательно, $A\cdot\vec a=\lim\limits_{t\to t_0}\left(f(t)\cdot\vec r(t)\right)$. ◄

**Свойство 4.** *Если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_1(t)=\vec a_1$ и $\lim\limits_{t\to t_0}\vec r_2(t)=\vec a_2$, то*

*а)* $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec r_1(t)+\vec r_2(t)\right)=\vec a_1+\vec a_2$*;*

*б)* $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec r_1(t)\cdot\vec r_2(t)\right)=\vec a_1\cdot\vec a_2$*;*

*в)* $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec r_1(t)\times\vec r_2(t)\right)=\vec a_1\times\vec a_2$.

► Формула а) очевидно следует из того, что по условию можно записать $\vec r_1(t)=\vec a_1+\vec\gamma_1(t)$ и $\vec r_2(t)=\vec a_2+\vec\gamma_2(t)$, где $\lim\limits_{t\to t_0}\vec\gamma_1(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\vec\gamma_2(t)=\vec 0$.

Для доказательства формулы б) используем эти же представления векторных функций и свойства скалярного произведения:

$\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)-\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=\left(\vec{a}_1+\vec{\gamma}_1(t)\right)\left(\vec{a}_2+\vec{\gamma}_2(t)\right)-\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2=$
$=\vec{a}_1\cdot\vec{\gamma}_2(t)+\vec{a}_2\cdot\vec{\gamma}_1(t)+\vec{\gamma}_1(t)\cdot\vec{\gamma}_2(t)$

Так как выполнено неравенство $\left|\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right|\le|\vec{a}||\vec{b}|$, то правая часть разности стремится к нулю.

Формула в) доказывается аналогично, так как $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|\le|\vec{a}||\vec{b}|$. ◄

**Определение 4.8.3.** *Вектор-функцию $\vec{r}(t)$ будем называть* ***непрерывной*** *в точке $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$.*

Пусть дана вектор-функция $\vec{r}(t)$, определенная в некоторой окрестности точки $t=t_0$. Разность $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)$ будем называть ***приращением вектор-функции*** $\vec{r}(t)$ в точке $t=t_0$.

Очевидно, что *вектор-функция непрерывна в точке $t=t_0$ тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{0}$.

Очевидно также, что *непрерывность векторной функции в точке $t=t_0$ равносильна непрерывности в этой точке координатных функций* $x(t),\ y(t),\ z(t)$.

## 8.3. Производная и дифференциал

**Определение 4.8.4.** $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$*, если он существует, называют* ***производной вектор-функции*** $\vec{r}(t)$ *в точке $t=t_0$ и обозначают $\vec{r}'(t_0)$, $\dot{\vec{r}}(t_0)$, или* $\dfrac{d\vec{r}(t_0)}{dt}$.

Таким образом, $\vec{r}'(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$.

Из свойств пределов следует, что $\vec{r}'(t_0)=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)$.

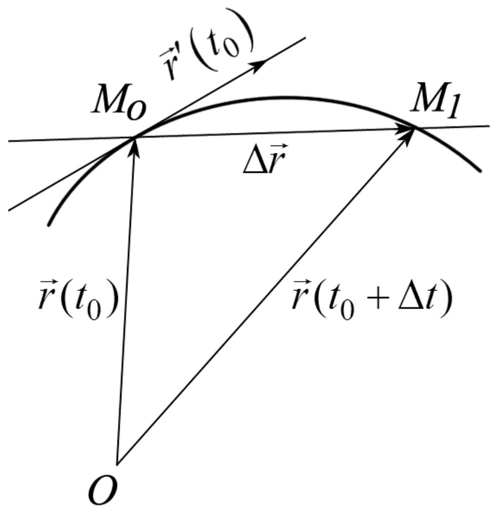
Из определения производной получим $\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}'(t_0)\Delta t+\vec{\gamma}(\Delta t)\Delta t$, где $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\vec{\gamma}(\Delta t)=\vec{0}$. Отсюда следует *непрерывность векторной функции в каждой точке, где эта функция имеет производную.*

Произведение $\vec{r}'(t_0)\Delta t$ будем называть ***дифференциалом векторной функции***, а функцию, имеющую дифференциал, - ***дифференцируемой***.

Выясним геометрический смысл производной векторной функции.

Пусть $\vec{r}(t)$ векторная функция, дифференцируемая в точке $t=t_0$, причем $\vec{r}'(t_0)\ne\vec{0}$. На годографе функции $\vec{r}(t)$ построим точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и $M_1(x_1,y_1,z_1)$, где $x_0=x(t_0),y_0=y(t_0),z_0=z(t_0)$ и $x_1=x(t_0+\Delta t)$, $y_1=y(t_0+\Delta t)$, $z_1=z(t_0+\Delta t)$. Тогда прямая $M_0M_1$ называется ***секущей***, а вектор

$\Delta\vec{r}(t_0)=\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)=\overrightarrow{M_0M_1}$ - ***вектором секущей***. Если $\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$, то в некоторой окрестности точки $t=t_0$ вектор $\Delta\vec{r}(t_0)\neq\vec{0}$ и отношение $\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\neq\vec{0}$. Тогда параметрическое уравнение секущей можно записать в виде $\vec{r}(\lambda)=\vec{r}(t_0)+\dfrac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t}\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}$.




При $\Delta t\to 0$ точка $M_1$ будет перемещаться по кривой и стремиться к точке $M_0$. При этом секущая будет поворачиваться и стремится занять предельное положение, которое мы будем называть ***касательным***. Таким образом, если существует $\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$, то, переходя к пределу в уравнении секущей, получим уравнение касательной $\vec{r}(\lambda)=\vec{r}(t_0)+\vec{r}'(t_0)\lambda,\quad \lambda\in\mathbb{R}$ или в канонической форме

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\vec{r}'(t_0)$ *- вектор касательной к годографу функции* $\vec{r}(t)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *и, что этот вектор существует, если* $\vec{r}'(t_0)\neq\vec{0}$.

**Замечание**. *Иногда под понятием «касательная» понимается касательный вектор. Так как график обычной функции можно понимать, как кривую, заданную параметрически (где в качесве параметра берется* $x$*), то при таком подходе, то при таком подходе функция не будет иметь касательную в точках, где ее производная бесконечна, но знак этой бесконечности не определен.*

**Теорема 4.8.2.** *Если функции* $\vec{r}_1(t)$, $\vec{r}_2(t)$ *и* $f(t)$ *имеют производные в точке* $t$, *то в этой точке справедливы формулы*

$$а)\ (\vec{r}_1+\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'+\vec{r}_2{}';$$

$$б)\ (f\cdot\vec{r})'=f'\cdot\vec{r}+f\cdot\vec{r}';$$

$$в)\ (\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\cdot\vec{r}_2+\vec{r}_1\cdot\vec{r}_2{}';$$

$$г)\ (\vec{r}_1\times\vec{r}_2)'=\vec{r}_1{}'\times\vec{r}_2+\vec{r}_1\times\vec{r}_2{}'.$$

Доказательство теоремы легко следует из определения производной и свойств скалярного и векторного произведений, и предоставляются читателю.

## ЛИТЕРАТУРА

**[1]** Г.М.Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 1-3, Лань, 2009.

**[2]** А.М.Тер-Крикоров, М.И.Шабунин, Курс математического анализа, Физматлит, 2003.

**[3]** Л.Д.Кудрявцев, Курс математического анализа, т.1-3, Дрофа, 2006.

**[4]** Л.Д.Кудрявцев, Математический анализ, т.1-3, М.: Высшая школа, 1989.

**[5]** У. Рудин, Основы математического анализа, Лань, 2004.

**[6]** В.И.Смирнов, Курс высшей математики, т. 1, Дрофа, 2003.

**[7]** Б.Гелбаум, Дж,Олмстед, Контрпримеры в анализе, ЛКИ, 2007.

**[8]** И.А.Виноградова, С.Н. Олехник и др. Задачи и упражнения по математическому анализу, кн.1-2, Дрофа, 2004.

**[9]** Л.Д.Кудрявцев, А.Д.Кутасов и др. Сборник задач по математическому анализу, т. 1-3, 2003.

**[10]** Б.П.Демидович, Сборник задач и упражнений по математическому анализу, АСТ, 2009.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена Программа развития государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики» на 2009–2018 годы.

---

## КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор

В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине "Высшая математика" и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению "Прикладная математика и информатика". Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 8 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом. Область научных интересов профессора Качалова А.П. – современные методы теории дифракции.

Татьяна Васильевна Родина
Екатерина Станиславовна Трифанова

Курс лекций по математическому анализу - I
(для направления «Прикладная математика и информатика»)
Учебное пособие

В авторской редакции
Дизайн Е.С. Трифанова
Верстка Т.В. Родина, Е.С. Трифанова
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати 18.03.2010
Заказ № 2207
Тираж 100
Отпечатано на ризографе

**Редакционно-издательский отдел**
Санкт-Петербургского государственного
университета информационных технологий,
механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49