Ерусалимский Я.М., Чернявская И.А.

Алгебра и геометрия:
теория и практика

Ерусалимский Я.М., Чернявская И.А.
Алгебра и геометрия. Теория и практика

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Созданное в XVII веке трудами великих Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница и их предшественников (в первую очередь Пьером Ферма) дифференциальное и интегральное исчисление послужило математической основой для последовавшего бурного развития естественных наук и техники. Дифференциальные уравнения – обыкновенные и в частных производных, называемые уравнениями математической физики, стали основным инструментом моделирования физических и химических процессов и явлений, в том числе, таких как тепло и массоперенос, разнообразные колебательные и волновые процессы. Без уравнений математической физики, теория которых создана Леонардом Эйлером, Огюстеном Коши, Симеоном Пуассоном, Анри Пуанкаре, Рихардом Курантом, были бы невозможны тепло и радиофизика, теория маятников и гироскопов, вся гидро- и аэромеханика, нефтехимия, сейсморазведка, гидроакустика и многое другое.

Современный этап развития естественных наук, такие их разделы как квантовые физика и химия, механика композитов и полимеров, генетика и генная инженерия, нанотехнологии потребовали создания и развития адекватного математического аппарата и методов математического моделирования. Таковыми, в основном, являются алгебраические, геометрические и топологические методы.

Фундаментом для освоения этого аппарата является раздел «Алгебра и геометрия» курса математики для студентов естественнонаучных направлений подготовки. Настоящее пособие предназначено для изучения этого раздела. Оно представляет собой расширенную и дополненную часть учебника «Математика. Общий курс» (авт. Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М., изд-во «Лань», СПб., 2002). Этот учебник – победитель Всероссийского конкурса учебников нового поколения. С момента выхода в 2002 году он опубликован четырьмя изданиями общим тиражом 14 000 экземпляров. Это свидетельствует о том, что содержание учебника соответствует федеральным государственным образовательным стандартам, а стиль и уровень сложности изложения – студенческой аудитории, которой он адресован.

В чём состоит отличие этого учебного пособия от соответствующих частей учебника «Математика. Общий курс»? В нем появился новый раздел «Практикум по алгебре», добавлена глава, посвященная теории линейных операторов в эвклидовых пространствах. В ней введено понятие сопряженного оператора и изложена спектральная теория самосопряженных операторов. Включая в наше пособие эту главу, мы ориентировались на потребности физики (особенно теоретической), механики, химии, и современного материаловедения, включая нанотехнологии. Существенно переработана глава «Квадратичные формы». Она теперь называется «Билинейные и квадратичные формы». Из её нового названия следует, что изложение в ней начинается с теории билинейных форм, примером которых является скалярное произведение. Это позволило использовать самосопряженные операторы для изучения симметрических билинейных и квадратичных форм. Доказаны теоремы о диагонализируемости матрицы симметрической билинейной формы и приведении квадратичной формы к каноническому виду ортогональными преобразованиями. При этом мы сохранили и изложение метода выделения полных квадратов (метод Лагранжа), приводящего квадратичную форму к каноническому виду. Оставляя этот метод в пособии, мы руководствовались тем, что он не столь красив идейно, но конструктивен, т. е. применим всегда.

«Практикум по алгебре» мы адресуем в первую очередь тем читателям, которые осваивают курс математики самостоятельно – заочно (дистанционно) и лишен возможности консультироваться у преподавателя при возникновении проблем при решении задач и примеров.

Сказанное позволяет рекомендовать наше пособие не только бакалаврам естественнонаучных направлений подготовки: физикам, химикам, механикам, биологам, материаловедам, нанотехнологам, геологам, почвоведам, географам, но и магистрам, посвятившим себя углубленному изучению естественных наук.

У пособия два автора: Я.М. Ерусалимский и И.А. Чернявская. Первому принадлежит вся его теоретическая часть, за исключением общей теории поверхностей второго порядка. Эта глава и «Практикум по алгебре» написаны И.А. Чернявской. В течение многих лет авторы ведут курс алгебры и геометрии на факультете математики, механики и компьютерных наук и физическом факультете Ростовского государственного университета (ныне – Южный федеральный университет). Накопленный нами опыт преподавания математики будущим физикам и механикам позволил выработать баланс между строгостью изложения, присущей математикам, и утилитарным подходом, свойственным естествоиспытателям.

Мы считаем, что целей в изучении математики представителями естественных наук две:

- усвоение сведений, формул, методов;
- овладение «математическим методом мышления».

Не только наш опыт, но и научные достижения таких выдающихся физиков современности как А. Эйнштейн, Р. Фейнман, П.Л. Капица, Л.Д. Ландау, А.А. Сахаров свидетельствуют о правильности такого подхода и являются признанием особой роли математики в развитии естественных наук.

Благодарности:

- выдающимся математикам, понимавшим и чувствовавшим физику, многолетнее общение с которыми формировало и воспитывало нас, Заслуженным деятелям науки РФ, недавно ушедшим, – И.Б. Симоненко и В.И. Юдовичу;
- национальному проекту «Образование» и его приоритетной программе создания федеральных университетов за частичную грантовую поддержку;
- нашим многочисленным студентам – физикам и механикам, чьи вопросы, ошибки, заблуждения и достижения влияли на нас и на содержание этого пособия;
- нашим близким за терпение и понимание важности нашей работы;
- друг другу за многолетнее сотрудничество, нашедшее воплощение в этом пособии.

I

МЕТОД КООРДИНАТ

Как во всей математике, так и в аналитической геометрии существуют основные понятия, с которых все начинается. Основные понятия не определяются. Считается, что в каждом из нас существуют интуитивные представления о них. В этих интуитивных представлениях спрессован и исторический опыт человечества в области математических знаний. Такими основными понятиями для нас являются здесь точка, прямая, плоскость, множество.

Естественным образом возникают и производные от основных геометрических понятий — отрезок, луч, угол и т. п. Так, под отрезком понимают часть прямой, ограниченную двумя точками, или множество точек прямой, лежащих между двумя точками, называемыми концами отрезка.

Мы не будем здесь заниматься определениями этих простейших геометрических объектов, считая что все они нам известны.

1.1 Числовая прямая (ось). Координаты точек на оси. Направленные отрезки. Аналитическая геометрия на прямой

Определение 1.1. *Числовой прямой* ($\Leftrightarrow$ *осью*)[1] *называется прямая, на которой*

1. *отмечена точка, называемая началом (обычно обозначается "O");*
2. *отмечена единичная точка (обычно обозначается "E" или "1")* $E \neq O$;
3. *зафиксировано направление от начальной точки O к единичной E (на рисунке обозначается стрелкой);*
4. *введена длина отрезка OE (обозначается* $|OE|$*)* : $|OE| \stackrel{\text{def}}{=} 1$ [2].

---

[1]Запись $\Leftrightarrow$ здесь и далее обозначает синоним термина.

[2]Надпись над знаком равенства def означает — «введение по определению»: слева от знака $\stackrel{\text{def}}{=}$ — «определяемое», справа от знака $\stackrel{\text{def}}{=}$ — «определяющее».

Рис. 1.1.

Определение 1.2. *Направленным отрезком оси будем называть упорядоченную пару точек оси; направленный отрезок, отвечающий паре точек* $(A; B)$ *будем обозначать* $\overline{AB}$.

С направленным отрезком $\overline{AB}$ свяжем две числовые характеристики: длину и величину.

Определение 1.3. *Длиной направленного отрезка* $\overline{AB}$ *называют длину отрезка* AB *(вещественное число), измеренную с помощью масштабного отрезка* OE. *Длина направленного отрезка* $\overline{AB}$ *обозначается* $|\overline{AB}|$. *Очевидно, имеют место следующие свойства:*

1°. $|\overline{AB}| \geqslant 0 \quad \textit{и} \quad |\overline{AB}| = 0 \iff A = B;$

2°. $|\overline{AB}| = |\overline{BA}|;$

3°. *Если точка* C *лежит между точками* A *и* B, *то* $|\overline{AB}| = |\overline{AC}| + |\overline{CB}|$ *(аддитивное свойство длины).*

Определение 1.4. *Величиной направленного отрезка* $\overline{AB}$ *называют числовую характеристику, обозначаемую* $\mu(\overline{AB})$ *и определяемую следующим:*

$$\mu\left(\overline{AB}\right) = \begin{cases} 0, & \textit{если } A = B, \\ |\overline{AB}|, & \textit{если направление отрезка } \overline{AB} \\ & \textit{совпадает с направлением оси,} \\ -\left|\overline{AB}\right|, & \textit{если направление отрезка } \overline{AB} \\ & \textit{противоположно направлению оси.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Замечание. Направленный отрезок $\overline{AA}$ называют нулевым.

Имеют место свойства:

1°. $\mu(\overline{AB}) = 0 \iff A = B;$

2°. $\mu(\overline{AB}) = -\mu(\overline{BA})$ (антисимметричность величины);

3°. Для любых трех точек A, B, C оси $\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AC}) + \mu(\overline{CB})$ (аддитивное свойство величины).

Свойства 1° и 2° очевидны, докажем свойство 3°.

◀ Ясно, что когда какие-либо две из трех точек A, B, C или все три точки совпадают, свойство 3° выполнено. Осталось рассмотреть случай, когда все три точки различны. Возможное расположение трех различных точек на оси приведены на рисунке 1.2.

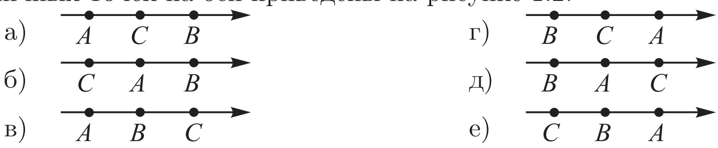


Рис. 1.2.

Рассмотрим случай а)

$$\mu(\overline{AB}) = |\overline{AB}| \overset{\text{адд. св-во длины}}{=} |\overline{AC}| + |\overline{CB}| = \mu(\overline{AC}) + \mu(\overline{CB}).$$

Рассмотрим случай б)

$$\begin{aligned} &\mu(\overline{CB}) \overset{\text{а)}}{=} \mu(|\overline{CA}|) + \mu(|\overline{AB}|), \\ &\mu(|\overline{AB}|) = \mu(|\overline{CB}|) - \mu(|\overline{CA}|) = \mu(|\overline{CB}|) + \mu(|\overline{AC}|) = \\ &\qquad = \mu(|\overline{AC}|) + \mu(|\overline{CB}|). \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются остальные случаи (проделайте это самостоятельно).▶[1]

Теперь можно определить фундаментальное понятие аналитической геометрии прямой — координату точки.

Определение 1.5. *Пусть M точка оси, координатой точки M на оси называется числовая характеристика, обозначаемая x_M и определяемая следующим*

$$x_M \overset{\text{def}}{=} \mu(\overline{OM}). \tag{1.2}$$

Ясно, что формула (1.2) задает взаимнооднозначное соответствие между множеством точек числовой прямой и множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Это и есть первый шаг на пути перевода языка геометрии на язык алгебры и математического анализа.

$\boxed{З}$ **1.1** **Расстояние между двумя точками на прямой. Длина отрезка.** Пусть на оси заданы две точки A, B своими координатами x_A и x_B. Требуется найти расстояние $\rho(A, B)$ между двумя этими точками.

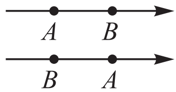
◀ Очевидно, имеет место формула

[1]Здесь и далее ◀ обозначает начало доказательства (определения, решения), а ▶ — конец.

$$\rho(A,B) = |\overline{AB}| = |x_A - x_B|. \tag{1.3}$$

Заметим, что $\rho(A,B) \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{AB}|$. В случае, когда $A = B$, формула (1.3) справедлива. Рассмотрим случай $A \neq B$. Он сводится к двум возможным расположениям точек A, B на оси:

а)
б)



Рассмотрим их отдельно.

а) $\rho(A,B) = |\overline{AB}| = \mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AO}) + \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OB}) - \mu(\overline{OA}) = x_B - x_A = |x_B - x_A|$.

б) $\rho(A,B) = |\overline{AB}| = |\overline{BA}| \stackrel{\text{а)}}{=} x_A - x_B = |x_B - x_A|$. ►

$\boxed{З}$ **1.2** *(Величина направленного отрезка).* Направленный отрезок $\overline{AB}$ задан координатами точек A и B. Требуется найти величину направленного отрезка $\overline{AB}$.

◄ Очевидно, имеет место формула

$$\mu(\overline{AB}) \ = \ x_B - x_A. \tag{1.4}$$

$$\mu(\overline{AB}) = \mu(\overline{AO}) + \mu(\overline{OB}) = \mu(\overline{OB}) - \mu(\overline{OA}) = x_B - x_A. \ ►$$

1.2 Прямоугольные декартовы координаты на плоскости и в пространстве

Зафиксируем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси с общим началом $O : Ox$ и Oy. (см. рис. 1.3).

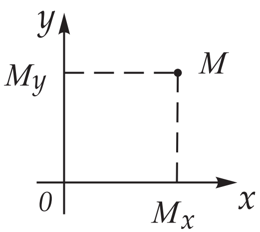


Рис. 1.3.

В этом случае говорят, что на плоскости задана (введена) декартова прямоугольная система координат xOy. Пусть M — произвольная точка плоскости. Поставим ей в соответствие точки M_x и M_y — ее ортогональные проекции на ось Ox и Oy соответственно. Абсциссой точки M называется координата x_{M_x} точки M_x на оси Ox, ординатой точки M называется координата y_{M_y} точки M_y на оси Oy.

Определение 1.6. *Координатами точки M на плоскости в системе координат xOy называется упорядоченная пара чисел — (абсцисса точки M, ордината точки M)* $(x_{M_x}; y_{M_y})$.

Замечание. Нижние индексы в обозначениях координат точки M обычно опускают и пишут $(x_M; y_M)$.

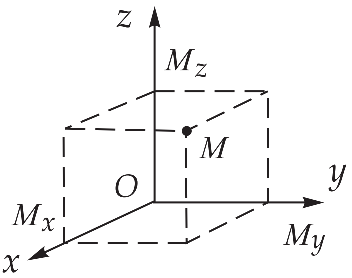


Рис. 1.4.

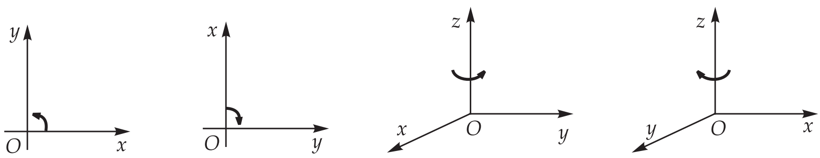
Декартовы прямоугольные координаты в пространстве вводятся тройкой попарно перпендикулярных осей с общим началом O: Ox; Oy; Oz (см. рис. 1.4).

Координата точки M в этом случае — упорядоченная тройка чисел $(x_M; y_M; z_M)$. Третья координата $z_M \overset{\text{def}}{=} z_{M_z}$ называется аппликатой точки.

Заметим, что на плоскости и пространстве существует два типа декартовых систем координат — так называемые «правые» и «левые». Приведем картинки, иллюстрирующие эти понятия.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать только правые системы.

$\boxed{З}$ **1.3** *(Расстояние между точками на плоскости и в пространстве).* Точки A, B заданы своими координатами. Требуется найти расстояние между точками.



а) правая система на плоскости

б) левая система на плоскости

в) правая система в пространстве

г) левая система в пространстве

◀ Ясно, что

$$\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \tag{1.5}$$

$$\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \tag{1.6}$$

Очевидно, что формулы (1.5) и (1.6) — плоский и пространственный варианты теоремы Пифагора. ▶

Замечание. Ясно, что формула (1.3) — частный случай формул (1.5) и (1.6), так как

$$|x_B - x_A| = \sqrt{(x_B - x_A)^2}.$$

1.3 Деление отрезка в заданном отношении

Рассмотрим две различные точки A, B (на прямой, плоскости или в пространстве) и прямую $l(A, B)$, проходящую через эти точки. Будем считать, что $l(A, B)$ — ось.

Определение 1.7. *Говорят, что точка* C $(\neq B) \in l(A, B)$ *делит отрезок* $\overline{AB}$ *в отношении* λ_C *равном*

$$\lambda_C = \frac{\mu(\overline{AC})}{\mu(\overline{CB})}. \qquad (1.7)$$

Замечание. Отношение $\mu(\overline{AC})/\mu(\overline{CB})$ не зависит от способа превращения $l(A, B)$ в ось.

$\boxed{\text{З}}$ **1.4** Точки A, B, C заданы своими координатами. Требуется найти выражение для λ_C.

◀ Рассмотрим случай, когда A, B, C — точки плоскости, и прямая $l(A, B)$ не параллельна ни одной из координатных осей (см. рис. 1.5).

Очевидно, точка C_x (C_y) делит отрезок $\overline{A_xB_x}$ $(\overline{A_yB_y})$ в том же отношении, что и точка C отрезок $\overline{AB}$, тогда

$$\lambda_C = \frac{\mu(\overline{A_xC_x})}{\mu(\overline{C_xB_x})} = \frac{\mu(\overline{A_yC_y})}{\mu(\overline{C_yB_y})}.$$

Учитывая формулу (1.4), получаем

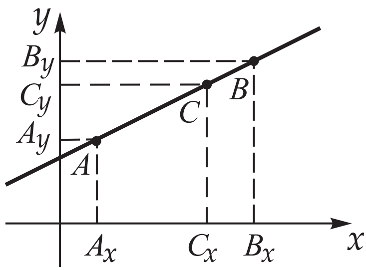


Рис. 1.5.

$$\lambda_C = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C}. \quad ▶ \qquad (1.8)$$

Замечания:

- В случае, когда $l(A, B)$ параллельна оси Oy (Ox) отношение $x_C - x_A/x_B - x_C$ $((y_C - y_A)/(y_B - y_C))$ вырождается в отношение $0/0$, а содержательным для определения λ_C становится только отношение $y_C - y_A/y_B - y_C$ $((x_C - x_A)/(x_B - x_C))$.

- Равенство $(x_C - x_A)/(x_B - x_C) = (y_C - y_A)/(y_B - y_C)$ можно рассматривать, как условие принадлежности точки C прямой $l(A, B)$.
- В пространственном случае соотношение (1.8) выглядит так:

$$\lambda_C = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \frac{z_C - z_A}{z_B - z_C}.$$

Отметим, что:

а) $\lambda_C = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad C = A$.

б) $\lambda_C > 0 \quad \Longleftrightarrow$ когда точка C лежит внутри отрезка AB.

в) $\lambda_C = 1 \quad \Longleftrightarrow$ когда точка C — середина отрезка AB.

г) $\lambda_C < 0 \quad \Longleftrightarrow$ когда точка C лежит вне отрезка AB.

д) $-1 < \lambda_C < 0 \quad \Longleftrightarrow$ когда точки C и B лежат по разные стороны от точки A.

е) $\lambda_C < -1 \quad \Longleftrightarrow$ когда точка C лежит вне отрезка AB по ту же сторону от A, что и точка B.

Резюмируя сказанное, график значений λ_C в зависимости от положения точки C на прямой $l(A, B)$ приведен на рис. 1.6.

Изучая поведение λ_C, мы обнаружили, что λ_C не бывает равным -1.

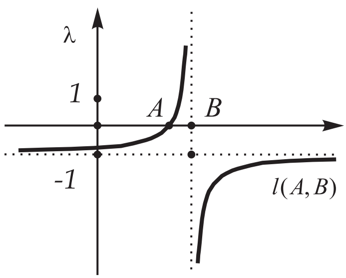


Рис. 1.6.

$\boxed{З}$ **1.5** Даны две точки A, B $A \neq B$ своими координатами и вещественное число $\lambda \neq -1$. Требуется найти координаты точки C на $l(A, B)$ такой, что $\lambda_C = \lambda$.

◀ Ясно, что координаты точки C должны удовлетворять соотношениям (1.8), поэтому будем рассматривать их, как систему уравнений с неизвестными x_C, y_c

$$\begin{cases} \dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_C} = \lambda; \\[2ex] \dfrac{y_C - y_A}{y_B - y_C} = \lambda. \end{cases}$$

Решая отдельно уравнения системы, получаем

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \qquad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}. \tag{1.9}$$

Ясно, что в пространственном случае получаем:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_C = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{1.9$'$}$$

Вывод: При любом $\lambda (\in \mathbb{R}) \neq -1$ задача 1.5 разрешима и имеет единственное решение, задаваемое формулами (1.9) или (1.9′).▶

Следствие из решения задачи 1.5

Координаты середины отрезка задаются формулами:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2}; \qquad y_c = \frac{y_A + y_B}{2}; \qquad y_c = \frac{z_A + z_B}{2};$$

Теперь мы готовы в качестве приложения рассмотреть *задачу о нахождении координат центра масс системы материальных точек.*

$\boxed{\text{З}}$ **1.6** При решении этой задачи будем исходить из двух физических предпосылок:

1) центр масс системы из двух точек M_1 и M_2 с массами m_1 и m_2 находится на отрезке $\overline{M_1M_2}$ и делит его в отношении $\lambda = \frac{m_2}{m_1}$;
2) центр масс системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ совпадает с центром масс системы из двух точек, одна из которых находится в центре масс системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ и имеет массу $m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1}$, а вторая — точка M_n с массой m_n.

◀ Из предпосылки 1 и формулы (1.9′) получаем, что координаты (x, y) центра масс системы из двух точек вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \frac{m_2}{m_1}x_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}; \\ y &= \frac{y_1 + \frac{m_2}{m_1}y_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}; \\ z &= \frac{z_1 + \frac{m_2}{m_1}z_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}; \end{aligned} \tag{1.10}$$

Формулы (1.10) позволяют сделать предположение, что в случае системы из n точек формулы координат центра масс имеют вид:

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n};$$
$$y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}; \qquad (1.11)$$
$$z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n};$$

Формулы (1.11) докажем по индукции, используя предпосылку 2.

Допустим, что для системы из $n-1$ точек формулы (1.11) справедливы и докажем, что тогда они справедливы и для n точек. Используя наше предположение и предпосылку 2, возьмем в качестве первой точки центр масс системы точек $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ с массами $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}$, а в качестве второй точки — точку M_n с массой m_n. По формуле (1.10) получим

$$x = \frac{(m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1})\frac{m_1x_1+\cdots+m_{n-1}x_{n-1}}{m_1+\cdots+m_{n-1}} + m_nx_n}{(m_1 + \cdots + m_{n-1}) + m_n} =$$
$$= \frac{m_1x_1 + \cdots + m_{n-1}x_{n-1} + m_nx_n}{m_1 + \cdots + m_n}.$$

Для координат y и z доказательство аналогично. ►

1.4 Полярные координаты на плоскости. Сферические и цилиндрические координаты в пространстве

1.4.1 Полярные координаты

Для определения положения точки на плоскости, кроме рассмотренной декартовой системы координат, применяется полярная система координат.

Пусть на плоскости зафиксирована точка O (называемая полюсом) и проходящая через нее ось OP (называемая полярной осью). Положение произвольной точки M на плоскости будем определять по отношению к полюсу и полярной оси.

Полярным радиусом точки M называют величину $\rho_M \stackrel{\text{def}}{=} |\overline{OM}|$.

Полярным углом φ_M называют угол φ_M между положительным направлением полярной оси и лучом, содержащим $\overline{OM}$ (направление вращения луча OP до совмещения с $\overline{OM}$ при измерении φ_M против часовой стрелки, см. рис. 1.7).

Замечание.

1) Ясно, что если $M = O$, то φ_M не определен (обычно $\varphi_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$).
2) $\rho_M \geqslant 0$ и $\rho_M = 0 \iff M = O$, $0 \leqslant \varphi_M < 2\pi$.

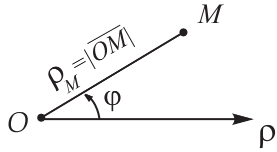


Рис. 1.7.

Пару чисел $(\rho_M; \varphi_M)$ называют *полярными координатами точки M*.

1.4.2 Связь между декартовыми и полярными координатами

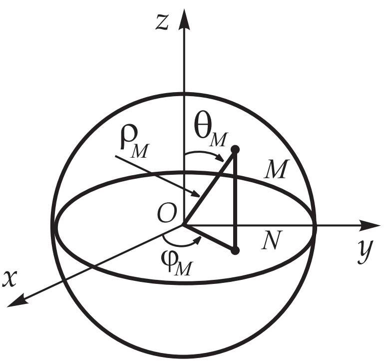


Рис. 1.8.

Пусть на плоскости введена декартова система координат xOy и полярная система координат с полюсом в точке O и полярной осью Ox. Тогда каждой точке M плоскости соответствуют ее декартовы и полярные координаты. Используя определение тригонометрических функций, получаем

$$\begin{cases} x_M = \rho_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_M \sin\varphi_M, \end{cases} \tag{1.12}$$

а, привлекая в рассмотрение и теорему Пифагора, получаем

$$\begin{cases} \rho_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}, \\ \sin\varphi_M = \dfrac{y_M}{\rho_M} = \dfrac{y_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}, \\ \cos\varphi_M = \dfrac{x_M}{\rho_M} = \dfrac{x_M}{\sqrt{x_M^2 + y_M^2}}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Соотношения (1.12) и (1.13) устанавливают связь между декартовыми и полярными координатами точки.

1.4.3 Сферические координаты

При введении сферических координат в пространстве рассматривают три взаимно перпендикулярные оси: Ox, Oy, Oz с общим началом.

Положение произвольной точки M, отличной от точки O, однозначно описывается заданием $\rho_M \overset{\text{def}}{=} |\overline{OM}|$ и двух углов φ_M и θ_M (см. рис. 1.8).

Углы θ_M и φ_M называют широтой и долготой соответственно.

Ясно, что

$$\begin{cases} x_M = \rho_m \sin\theta_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_m \sin\theta_M \sin\varphi_M, \\ z_M = \rho_m \cos\theta_M. \end{cases} \tag{1.14}$$

Замечание. В географии применяют несколько иное понятие широты.

1.4.4 Цилиндрические координаты

Для введения цилиндрической системы координат в пространстве рассмотрим декартову систему координат $Oxyz$ и в тройке координат точки M $(x_M; y_M; z_M)$ выделим первые две $(x_M; y_M)$, в которых перейдем к полярным ρ_M, φ_M, вводя полярную систему координат в плоскости Oxy, приняв O за полюс, а Ox за полярную ось. Таким образом, для точки M мы получили тройку чисел $(\rho_M; \varphi_M; z_M)$, называемую ее цилиндрическими координатами. Ясно, что

$$\begin{cases} x_M = \rho_M \cos\varphi_M, \\ y_M = \rho_M \sin\varphi_M, \\ z_M = z_M. \end{cases} \tag{1.15}$$

Замечание. В случае полярных, сферических и цилиндрических координат при совпадении точки M с точкой O обычно полагают $\varphi_0 = \theta_0 = 0$.

1.5. Преобразования координат

1.5.1 Параллельный перенос

Пусть на плоскости введено две декартовых системы координат xOy и $x'O'y'$ с параллельными и одинаково направленными осями и одинаковыми по длине единичными отрезками (см. рис. 1.9). Первую систему координат — xOy будем называть «старой», вторую — $x'O'y'$ будем называть «новой». Координаты точки в системе xOy будем называть «старыми», в системе $x'O'y'$ — «новыми». Положение «новой»

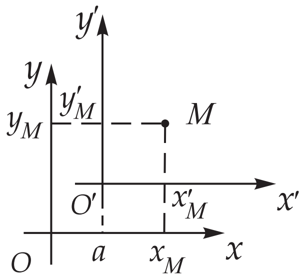


Рис. 1.9.

системы координат относительно «старой» однозначно определяется «старыми» координатами точки O'. Обозначим их (a, b).

О новой системе $x'O'y'$ говорят, что она получена из старой параллельным переносом в точку O'.

З **1.7** Установить связь между «старыми» и «новыми» координатами точки.

◀ Очевидно, справедливы формулы:

$$\begin{cases} x'_M = \ x_M - a, \\ y'_M = \ y_M - b \end{cases} \tag{1.16}$$

— выражение «новых» координат через «старые»;

$$\begin{cases} x_M = \ x'_M + a, \\ y_M = \ y'_M + b \end{cases} \tag{1.17}$$

— выражение «старых» координат через «новые». ▶

1.5.2 Поворот относительно начала

Пусть две системы декартовых координат — «старая» xOy и «новая» $x'Oy'$ имеют общее начало и одинаковые по длине единичные отрезки. Обозначим через α угол между положительными направлениями осей Ox и Ox' (вращение против часовой стрелки, см. рис. 1.10).

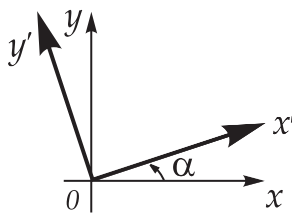


Рис. 1.10.

Говорят, что «новая» система координат получена из «старой» системы координат поворотом относительно начала на угол α.

Найдем, как связаны между собой «старые» и «новые» координаты точки. Для этого введем в рассмотрение две полярные системы координат: «старую» и «новую» с общим полюсом O и полярной осью Ox у «старой» и Ox' у «новой».

◀ Очевидно, «старые» и «новые» полярные координаты точки M связаны формулами:

$$\rho'_M = \rho_M, \qquad \varphi'_M = \varphi_M - \alpha.$$

Тогда, вспоминая связь между декартовыми и полярными координатами (1.12), получаем

$$\begin{aligned}
x'_M &= \rho'_M \cdot \cos\varphi'_M = \\
&= \rho_M \cos(\varphi_M - \alpha) = \rho_M(\cos\varphi_M \cdot \cos\alpha + \sin\varphi_M \cdot \sin\alpha) = \\
&= \rho_M \cos\varphi_M \cos\alpha + \rho_M \sin\varphi_M \sin\alpha = x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha. \\
y'_M &= \rho'_M \cdot \sin\varphi'_M = \\
&= \rho_M \sin(\varphi_M - \alpha) = \rho_M(\sin\varphi_M \cdot \cos\alpha - \cos\varphi_M \cdot \sin\alpha) = \\
&= \rho_M \sin\varphi_M \cos\alpha - \rho_M \cos\varphi_M \sin\alpha = -x_M \sin\alpha + y_M \cos\alpha.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили

$$\begin{cases} x'_M = x_M \cos\alpha + y_M \sin\alpha, \\ y'_M = -x_M \sin\alpha + y_M \cos\alpha \end{cases} \tag{1.18}$$

— выражение «новых» координат через «старые» при повороте относительно начала координат на угол α.

Учитывая, что «старая» система координат получается из «новой» поворотом на угол $-\alpha$, из формул (1.18) получаем

$$\begin{cases} x_M = \ x'_M \cos\alpha - y'_M \sin\alpha, \\ y_M = \ x'_M \sin\alpha + y'_M \cos\alpha \end{cases} \tag{1.19}$$

— выражение «старых» координат через «новые» при повороте относительно начала на угол α. ▶

1.5.3 Общее преобразование декартовых координат

Пусть на плоскости введены две декартовых системы координат xOy и $x'O'y'$ с одинаковыми по длине единичными отрезками. Положение «новой» системы координат однозначно определяется «старыми» координатами точки O' и углом α между положительными направлениями осей Ox и $O'x'$.

Какова связь между «старыми» и «новыми» координатами точки? Введем еще одну «промежуточную» систему координат $x''O'y''$, полученную из «старой» параллельным переносом начала в точку O'. Ясно, что «новая» система получается из «промежуточной» поворотом на угол α. Используем соотношения (1.18) и (1.16):

$$\begin{cases} x'_M = \ x''_M \cos\alpha + y''_M \sin\alpha, \\ y'_M = \ -x''_M \sin\alpha + y''_M \cos\alpha; \end{cases} \tag{1.20}$$

$$\begin{cases} x''_M = x_M - a, \\ y''_M = y_M - b. \end{cases} \tag{1.21}$$

Из (1.20) и (1.21) получаем

$$\begin{cases} x'_M = (x_M - a)\cos\alpha + (y_M - b)\sin\alpha, \\ y'_M = -(x_M - a)\sin\alpha + (y_M - b)\cos\alpha; \end{cases} \tag{1.22}$$

— выражение «новых» декартовых координат через «старые» при общем преобразовании декартовых координат.

1.6 Понятие об уравнениях линий и поверхностей

В этом пункте мы будем говорить об уравнениях линий и поверхностей на плоскости и в пространстве. При этом будем считать, что понятия «линия» и «поверхность» для нас первичны и необсуждаемы.

Пусть на координатной плоскости xOy задана линия L (например, окружность радиуса r (> 0) с центром в точке $C(x_C, y_C)$ может быть задана следующим: «Множество точек плоскости, находящихся от точки C на расстоянии, равном r»).

Определение 1.8. *Уравнение*

$$F(x, y) = 0 \tag{1.23}$$

называется общим уравнением линии L, если выполнено два условия:

а) Для любого решения $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ уравнения (1.23) точка $M(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ принадлежит линии L.

б) Для любой точки $M(x_M, y_M) \in L$ пара чисел (x_M, y_M) является решением уравнения (1.23).

П 1.1 Очевидно, $(x-2)^2 + (y+3)^2 - 16 = 0$ является общим уравнением окружности радиуса 4 с центром с точке $C(2, -3)$.

Если уравнение (1.23) удается разрешить относительно одной из переменных, т. е. привести к виду:

$$y = f(x) \tag{1.24}$$

или

$$x = g(y), \tag{1.25}$$

то такие уравнения называют явными.

Замечание. Ясно, что явное уравнение линии легко преобразуется в общее $y - f(x) = 0$ или $x - g(y) = 0$.

? Всегда ли можно от общего уравнения линии перейти к явному?

Определение 1.9. *Пусть $T \subset \mathbb{R}$ и пусть на множестве T задано две функции $x(t)$ и $y(t)$. Пара функций*

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in T \tag{1.26}$$

называется параметрическими уравнениями линии L, если выполнено два условия:

1) *для любого $t_0 \in T$ точка с координатами $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ принадлежит L;*
2) *для любой точки $M(x_M, y_M) \in L$ существует хотя бы одно значение параметра $t_M \in T$ такое, что $x_M = x(t_M)$, $y_M = y(t_M)$.*

$\boxed{\text{П}}$ **1.2**

$$\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = 2\cos t, \end{cases} \qquad t \in [0; 2\pi)$$

— параметрические уравнения окружности радиуса 2 с центром в начале координат.

Замечание. Пусть $y = f(x)$, $x \in X$ — явное уравнение линии L, тогда

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \qquad x \in X$$

— параметрические уравнения линии L.

Мы ничего не сказали о поверхностях и их уравнениях, так как во всем этом полная аналогия с линией на плоскости, только нужно перейти в пространство, т. е.

$F(x, y, z) = 0$ — общее уравнение поверхности;

$x = f(y, z)$ или $y = g(x, z)$ или $z = r(x, y)$ — явные уравнения поверхности;

$$\begin{cases} x = & x(t), \\ y = & y(t), \\ z = & z(t), \end{cases} \qquad t \in T$$

— параметрические уравнения.

Контрольные вопросы и задания

1. Чем характеризуется направленный отрезок оси?

2. Справедливо ли утверждение: «Направленные отрезки равны тогда и только тогда, когда их величины равны»?

3. Что такое аддитивное свойство величины направленного отрезка?

4. Почему отношение, в котором точка C делит отрезок AB, не зависит от направления оси, на которой лежат точки A, B, C?

5. Какие системы координат на плоскости и в пространстве вам известны? Какие из них применяются в географии, геодезии, астрономии?

6. Что такое общее уравнение линии (поверхности)? Всегда ли возможен переход от общего уравнения к явному; параметрическому?

II

ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе буду выведены различные уравнения прямой на плоскости. Их «различный внешний вид» и различные названия связаны с различными геометрическими способами задания прямой. Каждое уравнение сориентировано на решение задач определенного типа. Общим с математической точки зрения всех полученных уравнений является то, что все они являются уравнениями первой степени ($\leftrightarrow$ уравнениями первого порядка). Важнейшей теоремой этой главы является теорема о том, что любое уравнение первой степени $Ax+By+C=0$, $A^2+B^2\neq 0$ является уравнением прямой на плоскости. Таким образом, множество линий на плоскости, уравнения которых — уравнения первой степени, и множество прямых на плоскости совпадают. Поэтому прямые называют линиями первого порядка.

2.1 Векторы и их координаты Простейшие понятия

В этом параграфе мы напоминаем, что такое вектор и его координаты.

Определение 2.1. *Вектором плоскости (пространства) называют направленный отрезок ($\Leftrightarrow$ упорядоченную пару точек) плоскости (пространства).*

Вектор, заданный упорядоченной парой точек A, B будем обозначать $\overrightarrow{AB}$. Точка A называется началом вектора, точка B — концом вектора.

Ясно, что вектор характеризуется длиной ($\Leftrightarrow$ расстоянием между началом и концом вектора) и направлением. Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ будем называть равными, если их длины равны и они одинаково направлены.

Длиной вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и обозначают $|\overrightarrow{AB}|$. Длина вектора на плоскости вычисляется по формуле

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}. \tag{2.1}$$

Координатами вектора называют координаты конца вектора, когда начало его — начало координат, т. е. если $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, то координаты вектора $\vec{a}$: $(x_A, y_A) \overset{\text{def}}{=} (x_{\vec{a}}, y_{\vec{a}})$.

Очевидно, что

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_{\vec{a}}^2 + y_{\vec{a}}^2}. \tag{2.2}$$

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, то

$$x_{\vec{a}} = x_B - x_A, \qquad y_{\vec{a}} = y_B - y_A \tag{2.3}$$

— выражение координат вектора через координаты начала и конца.

2.2 Уравнение прямой с угловым коэффициентом

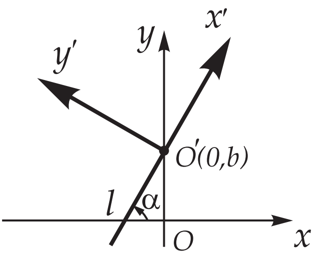


Рис. 2.1.

Положение прямой l, не параллельной оси ординат, однозначно определяется точкой пересечения этой прямой с осью ординат и углом, который образует эта прямая с положительным направлением оси Ox. Обозначим координаты точки пересечения прямой l с осью ординат $(0, b)$, а угол $\widehat{lOx}$ — α (см. рис. 2.1).

Введем на плоскости «новую» систему координат $x'O'y'$, полученную из «старой» переносом начала в точку $(0, b)$ и поворотом на угол α. Пусть M произвольная точка плоскости, обозначим ее «старые» координаты (x, y), а «новые» — (x', y'). В «новой» системе координат прямая l совпадает с осью $O'x'$ и, значит, точка $M \in l \Leftrightarrow y' = 0$. Последнее и является уравнением прямой l в новых координатах. Подставим в уравнение $y' = 0$ выражение y' через «старые» координаты по формуле (1.22), тогда

$$-x \sin\alpha + (y - b)\cos\alpha = 0.$$

Разделив обе части равенства на $\cos\alpha$ $(x \neq 0)$, получим

$$y = x \operatorname{tg}\alpha + b.$$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha$ через k, уравнение прямой l примет вид:

$$y = kx + b \tag{2.4}$$

итак, мы доказали теорему:

Теорема 2.1. *Уравнение*

$$y \;=\; kx \;+\; b$$

является уравнением прямой линии, проходящей через точку $(0, b)$ *и наклоненной к положительному направлению оси* Ox *под углом, тангенс которого равен* k.

Уравнение (2.4) называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, k называют угловым коэффициентом прямой.

$\boxed{\text{З}}$ **2.1** Даны прямые

$$l_1 : y = k_1x + b_1 \qquad \text{и} \qquad l_2 : y = k_2x + b_2.$$

Требуется найти угол между ними.

◀

$$\operatorname{tg}\widehat{l_1l_2} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \tag{2.5}$$

Обозначения и их смысл см. на рис. 2.2. ▶

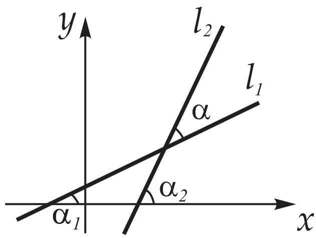


Рис. 2.2.

Следствие 2.1 (Условие совпадения прямых). Две прямые $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$.

Следствие 2.2 (Условие параллельности прямых). Две прямые $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.

Следствие 2.3 (Условие перпендикулярности прямых). Две прямые $l_1 : y = k_1x + b_1$ и $l_2 : y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1 \cdot k_2 \;=\; -1$.

Действительно, прямые перпендикулярны $\Longleftrightarrow \widehat{l_1l_2} = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \operatorname{tg}\widehat{l_1l_2}$ не существует $\overset{(2.5)}{\Longleftrightarrow} 1 + k_1 \cdot k_2 = 0 \Longleftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

2.3 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный угловой коэффициент

$\boxed{З}$ **2.2** Дано: k — угловой коэффициент прямой l и точка $M(x_M, y_M) \in l$. Требуется найти уравнение прямой l.

◀ Уравнение прямой l с угловым коэффициентом k имеет вид

$y = kx + b$, определим в нем b, исходя из условия, что $M \in l$. Значит, $y_M = kx_M + b$, тогда $b = y_M - kx_M$. Подставляя это значение в исходное уравнение прямой l, получаем

$$\begin{aligned} y = kx \ + \ (y_M - kx_M) \qquad &\text{или} \\ y - y_M \ = \ k(x - x_M). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Полученное уравнение называют уравнением прямой с заданным угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.

2.4 Уравнение прямой, проходящей через две точки

$\boxed{З}$ **2.3** Дано: $(x_1, y_1) \in l$, $(x_2, y_2) \in l$. Требуется найти уравнение прямой l.

◀ Будем считать, что l не вертикальная прямая, тогда у нее есть уравнение с угловым коэффициентом $y = kx+b$. Так как точки (x_1, y_1) и $(x_2, y_2) \in l$, то имеем два верных равенства:

$$\begin{cases} y_2 = kx_2 + b, \\ y_1 = kx_1 + b. \end{cases}$$

Вычитая из первого второе, получаем $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (прямая l не вертикальная $\Longleftrightarrow$ $x_2 - x_1 \neq 0$). Подставляя выражение для k в (2.6), получаем

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,(x - x_1)\,,$$

и если $y_2 - y_1 \neq 0$ ($\Leftrightarrow$ l — не горизонтальная прямая), то

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2.7}$$

— уравнение прямой, проходящей через две точки. ▶

Замечание. Уравнение (2.7) не описывает вертикальные ($x_2 - x_1 = 0$) и горизонтальные ($y_2 - y_1 = 0$) прямые. Если «разрешить» в (2.7) обращаться в ноль знаменателям при условии одновременного обращения в ноль числителя, то мы получаем в случае вертикальной прямой $x - x_1 = 0$ или $x = x_1$ (— искомая вертикаль), а в случае горизонтальной прямой $y - y_1 = 0$ или $y = y_1$ (— искомая горизонталь).

$\boxed{З}$ **2.4** $A(1,1)$, $B(-1,0)$, $C(2,1)$ — вершины треугольника. Найти уравнение высоты, проходящей через вершину A.

◀ Составим уравнение прямой, проходящей через точки B и C

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y}{1} \implies k = \frac{1}{3} \implies \begin{pmatrix}\text{по условию}\\ \text{перпендикулярности}\end{pmatrix} \implies k_1 = -3,$$

где k_1 — угловой коэффициент высоты;

Составим уравнение высоты как прямой, имеющей угловой коэффициент k_1 и проходящей через точку A (уравнение (2.6))

$$(y-1) = -3(x-1); \quad \iff \quad y = -3x + 4. \qquad ▶$$

2.5 Уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющий заданный направляющий вектор

Определение 2.2. *Направляющим вектором прямой называется любой ненулевой вектор, параллельный прямой.*

Очевидно, положение прямой определяется заданием точки, принадлежащей этой прямой и направляющего вектора прямой.

$\boxed{З}$ **2.5** Дано: $\vec{l} = (a, b)$ — направляющий вектор прямой l;
$M(x_1, y_1) \in l$.

Требуется составить уравнение l.

◀ Ясно, что точка $M_1(x_1 + a, y_1 + b) \in l$. Составим уравнение прямой, проходящей через точки M_1 и M_2 : (см. рис. 2.7))

$$\frac{x - x_1}{(x_1 + a) - x_1} = \frac{y - y_1}{(y_1 + b) - y_1}.$$

Преобразовав знаменатели, получим

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} \tag{2.8}$$

— уравнение прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор. ▶

2.6 Уравнение прямой в отрезках на осях

Пусть прямая l не проходит через начало координат и пересекает координатные оси в точках $A(a,0)$, $B(0,b)$. Составим уравнение l как уравнение прямой, проходящей через две точки

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}.$$

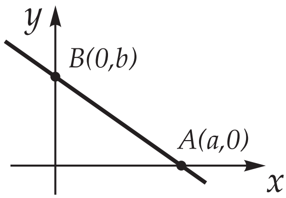


Рис. 2.3.

Преобразуем полученное уравнение:

$$-\frac{x}{a} + 1 = \frac{y}{b} \quad \text{или} \tag{2.9}$$
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Полученное уравнение называется уравнением в отрезках на осях.

$\boxed{З}$ **2.6** Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $y = 2x-3$ и координатными осями.

◀ Преобразуем уравнение прямой к виду (2.10)

$$2x - y = 3 \quad \Longleftrightarrow \tag{2.10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x}{3/2} + \frac{y}{-3} = 1; \qquad a = \frac{3}{2}; \quad b = -3. \tag{2.11}$$

Тогда площадь искомого треугольника равна

$$\frac{1}{2}\cdot|a|\cdot|b| = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \frac{9}{4}. \qquad ▶$$

2.7 Параметрические уравнения прямой

Вернемся к уравнению (2.8)

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}.$$

Обозначим через t ($\in \mathbb{R}$) значение отношений в равенстве (2.8). Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{a} = t, \\ \dfrac{y - y_1}{b} = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} x = x_1 + at, \\ y = y_1 + bt, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2.12}$$

Уравнения (2.12) называются *параметрическими уравнениями прямой.*

Придавая в (2.12) параметру t конкретные значения, мы будем получать координаты точек, лежащих на прямой.

З 2.7 На прямой $l : y = 2x - 1$, найти точки, находящиеся от точки $(1, 1)$ на расстоянии, равном 1.

◀ Очевидно, что когда $|\vec{l}| = 1$ ($\vec{l}$ — направляющий вектор прямой l), геометрический смысл параметра в (2.12) — уклонение точки $(x(t), y(t))$ от точки (x_1, y_1).

Для прямой l найдем направляющий вектор, преобразовав уравнение $y = 2x - 1$ к виду (2.8)

$$\frac{x - 0}{1/2} = \frac{y - (-1)}{1}; \qquad \text{значит} \qquad \vec{l} = \left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

Рассмотрим вектор $\vec{l_1} = \dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$; $|\vec{l}| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; $\vec{l_1} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$.
Составим параметрические уравнения l относительно точки $(1, 1)$.

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{5} t, \\ y = 1 + \dfrac{2\sqrt{5}}{5} t. \end{cases}$$

Полагая $t = \pm 1$, получим точки:

$$(1 + \sqrt{5}/5; 1 + 2\sqrt{5}/5); \quad (1 - \sqrt{5}/5; 1 - 2\sqrt{5}/5). \qquad ▶$$

2.8 Нормальное уравнение прямой

Ясно, что положение прямой на плоскости однозначно определяется указанием расстояния ρ от начала координат до прямой ($p \geqslant 0$) и углом φ, который образует вектор, перпендикулярный к прямой, с положительным направлением оси Ox (см. рис. 2.4).

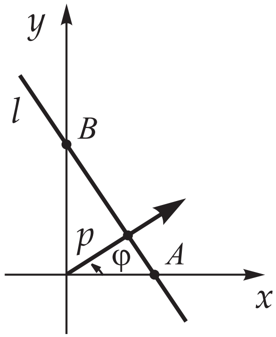


Рис. 2.4.

Очевидно, точки A и B, отмеченные на чертеже, имеют координаты $\left(\frac{p}{\cos\varphi}; 0\right)$; $\left(\frac{p}{\sin\varphi}; 0\right)$ соответственно. Составим уравнение l в отрезках на осях

$$\frac{x}{\frac{p}{\cos\varphi}} + \frac{y}{\frac{p}{\sin\varphi}} = 1 \qquad \text{или}$$

$$x\cos\varphi \ + y\sin\varphi \ - p; = 0, \ p \geqslant 0. \qquad (2.13)$$

Это уравнение называется нормальным уравнением прямой.

$\boxed{З}$ **2.8** *(Задача о нахождении расстояния от точки до прямой).* Дана прямая l и $M(x_M, y_M) \notin l$. Требуется найти $\rho(M, l)$ — расстояние от точки M до прямой l.

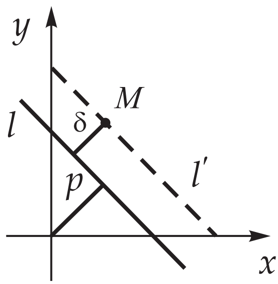


Рис. 2.5.

◀ Составим нормальное уравнение прямой l : $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ и составим нормальное уравнение параллельной прямой l', проходящей через точку M :

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi - (p \pm \delta) = 0. \qquad (2.14)$$

(При расположении M, указанном на рис. 2.5, в скобке стоит $p + \delta$). Подставляя координаты точки M в (2.14), получим верное равенство:

$$x_M\cos\varphi \ + \ y_M\sin\varphi \ - \ (p \pm \delta) \ = \ 0,$$

откуда получаем $\delta = |x_M\cos\varphi + y_M\sin\varphi - p|$.

Таким образом, мы вывели формулу для нахождения расстояния от точки до прямой

$$\rho(M, l) \ = \ |x_M\cos\varphi + y_M\sin\varphi - p| \quad ▶ \qquad (2.15)$$

Решая задачу о расстоянии от точки до прямой, мы фактически доказали теорему:

Теорема 2.2. *Прямая, заданная нормальным уравнением, разбивает плоскость на 3 части:*
собственно прямую $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$ *и две полуплоскости, в одной из которых* $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p > 0$, *в другой* $x\cos\varphi + y\sin\varphi - p < 0$.

Замечание. Вектор $\vec{n}$ с координатами $(p\cos\varphi, p\sin\varphi)$ перпендикулярен прямой $l : x\cos\varphi + y\sin\varphi - p = 0$. Он называется вектором нормали. Вектор $\vec{n_0} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — единичный вектор нормали $(|\vec{n_0}| = 1)$.

2.9 Общее уравнение прямой

Рассмотрим линейное уравнение переменных $x,\ y$:

$$Ax + By + C = 0; \quad A, B, C \in \mathbb{R}; \quad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{2.16}$$

Все уравнения прямых, которые мы рассматривали до этого, приводятся к виду (2.16).

Покажем, что уравнение вида (2.16) задает прямую. Возможны два случая:

а) $B \neq 0$, но тогда уравнение (2.16) приводится к виду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{A}$, а это уравнение прямой (с угловым коэффициентом);

б) $B = 0$, но так как $A^2 + B^2 \neq 0$, то $A \neq 0$, значит $x = -\frac{C}{A}$. Мы получили уравнение вертикальной прямой, проходящей через точку $\left(-\frac{C}{A}; 0\right)$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$ называют общим уравнением прямой.

2.9.1 Свойства общего уравнения прямой. Геометрический смысл коэффициентов

1°. Общее уравнение прямой определено с точностью до отличного от нуля постоянного множителя.

Следствие из 1°. Необходимым и достаточным условием совпадения прямых $l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$ является пропорциональность всех коэффициентов:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{2.17}$$

2°. Прямая $Ax+By+C=0$ проходит через начало координат тогда и только тогда, когда $C=0$.

3°. $B=0 \Longleftrightarrow l$ — вертикальная прямая, $A=0 \Longleftrightarrow l$ — горизонтальная прямая.

4°. Вектор $\vec{n}=(A,B)$ является вектором нормали к прямой $Ax+By+C=0$.

Докажем свойство 4°. ◀ Переход от уравнения l: $Ax+By+C=0$ к нормальному уравнению осуществляется умножением на нормирующий множитель $\dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}$:

$$\left(\frac{-\operatorname{sign} C\cdot A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)x+\left(\frac{-\operatorname{sign} C\cdot B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)y-\frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Вектор $\vec{n}_1=\left(-\operatorname{sign} C\cdot\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},-\operatorname{sign} C\cdot\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ является единичным вектором нормали к прямой l (см. § 2.8 «Нормальное уравнение прямой»), а значит и вектор (A,B) ортогонален l. ▶

2.9.2 Теорема о разделении плоскости на полуплоскости общим уравнением прямой

> **Теорема 2.3.** *Прямая* $Ax+By+C=0$ *разделяет плоскость на две полуплоскости, в одной из которых* $Ax+By+C>0$, *а в другой* — $Ax+By+C<0$.

◀ Так как переход от общего уравнения к нормальному осуществляется умножением на постоянный, отличный от нуля, множитель, то следует вспомнить теорему о разделении плоскости на полуплоскости нормальным уравнением. При этом, если $\dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}>0$, то «знаки» полуплоскостей такие же, как и для нормального уравнения, и если $\dfrac{-\operatorname{sign} C}{\sqrt{A^2+B^2}}<0$, то знаки полуплоскостей противоположны знакам полуплоскостей для нормального уравнения. ▶

2.9.3 Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Имеют место следующие соотношения:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ — условие параллельности прямых;} \quad (2.18)$$

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \text{ — условие перпендикулярности прямых.} \quad (2.19)$$

► $l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Longleftrightarrow (\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

Здесь $(\vec{n}_1, \vec{n}_2)$ — скалярное произведение векторов $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними. В декартовых прямоугольных координатах скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат векторов.

2.9.4 Теорема об «устойчивости» общего уравнения относительно преобразования координат

> **Теорема 2.4.** *При общем преобразовании декартовых координат прямая переходит в прямую.*

◄ Рассмотрим прямую $l : Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 \neq 0$. Общее преобразование декартовых координат:

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b \end{cases}$$

В координатах $x'O'y'$ имеем уравнение прямой l

$A(x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a) + B(x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b) + C = 0$ или $A'x' + B'y' + C' = 0$, где:

$A' = A\cos\alpha + B\sin\alpha, B' = -A\sin\alpha + B\cos\alpha$, $C' = Aa + Bb + C$.

Найдем

$$(A')^2 + (B')^2 = (A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (-A\sin\alpha + B\cos\alpha)^2 =$$

$$= A^2\cos^2\alpha + B^2\sin^2\alpha + A^2\sin^2 + B^2\cos^2\alpha = A^2 + B^2 \neq 0,$$

т. е. мы опять получили общее уравнение прямой. ►

2.9.5 Пучок прямых

Ясно, что уравнения

$$\begin{aligned}&\lambda(A_1x+B_1y+C_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2)=0,\\&\lambda,\mu\in\mathbb{R},\qquad \lambda^2+\mu^2\neq 0\end{aligned} \tag{2.20}$$

задают множество прямых, проходящих через точку пересечения прямых $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ в случае их пересечения и множество прямых, параллельных им, когда $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ параллельны.

Уравнение (2.20) называется уравнением пучка прямых.

Замечание. Мы закончили изучать уравнения прямой на плоскости. Их оказалось много: общее, с угловым коэффициентом, нормальное и т. д. При решении задач на эту тему важно выработать:

1. Умение легко переходить от одного уравнения к другому.
2. Ощущение, какое из уравнений полезно и необходимо использовать в конкретной ситуации.

2.10 Линейная и кусочно-линейная интерполяция

Во многих практических задачах бывает необходимым по отдельным экспериментальным данным попытаться «восстановить» неизвестную функциональную зависимость между переменными (или как-то приблизиться к ней). При этом возникает так называемая интерполяционная задача.

Пусть для неизвестной функции $y=f(x)$, $x\in X$ известны ее значения $f(x_i)$ в точках $x_i\in X$; $x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_n$. Требуется построить функцию $g(x)$, $x\in X$ из заданного класса функций, удовлетворяющую условиям

$$g(x_i)\ =\ f(x_i)\qquad i=0,1,\ldots,n.$$

При этом желательно, чтобы эта функция была достаточно «близка» к функции f на всем множестве X.

Линейная интерполяция. Если узлов интерполяции ($\Leftrightarrow x_i$) два, то естественным классом интерполирующих функций являются прямые. Ясно, что решение задачи о линейной интерполяции задается формулами

$$\begin{cases}x=x_0(1-t)+x_1t,\\ y=y_0(1-t)+y_1t,\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R},$$

при этом, когда t пробегает отрезок $[0,1]$, x пробегает отрезок $[x_0, x_1]$, а y — $[y_0, y_1]$.

Кусочно-линейная интерполяция. Когда узлов интерполяции больше двух и рассматриваются ломаные, составленные из отрезков прямых, то говорят о кусочно-линейной интерполяции. Параметрическое уравнение, задающее интерполяционную функцию на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, выглядит так

$$\begin{cases} x(t) = x_{i-1}(1-t_i) + x_i t_i, \\ y(t) = y_{i-1}(1-t_i) + y_i t_i, \end{cases} \qquad t_i \in [0;1].$$

Контрольные вопросы и задания

1. Назовите различные способы задания прямой. Приведите примеры.
2. Перейдите от уравнения прямой в общем виде к нормальному виду уравнения прямой.
3. Почему прямая, параллельная оси Oy, не может быть задана уравнением с угловым коэффициентом?
4. Сформулируйте условия совпадения, параллельности, перпендикулярности прямых в терминах различных уравнений прямых.
5. Рассматривая биссектрису как множество точек, равноудаленных от сторон угла, составить уравнения прямых, делящих пополам углы между прямыми l_1 и l_2 и проходящих черех точку пересечения прямых l_1 и l_2.
6. Для прямой $y = -2x + 3$ составьте другие ее уравнения.
7. Сформулируйте различия между линейной и кусочно-линейной интерполяцией.

III

КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

3.1. Канонические уравнения

В этом параграфе мы получим канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы, т. е. такие уравнения, которые получаются при специальном выборе системы координат.

3.1.1 Эллипс

Определение 3.1. *Эллипсом называют множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая чем расстояние между фокусами.*

Будем считать, что фокусы F_1 и F_2 имеют координаты $(c, 0)$ и $(-c, 0)$ соответственно $(c \geqslant 0)$. $M(x, y)$ — произвольная точка эллипса $\mathcal{E}$, $r_1 = \rho(M, F_1)$, $r_2 = \rho(M, F_2)$.

Из определения эллипса имеем

$$r_1 \; + \; r_2 \; = \; 2a, \qquad a > c \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Ясно, что

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \tag{3.2}$$

Подставляя в (3.1), получаем

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \qquad \text{или}$$
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Возводя обе части в квадрат (т. к. они неотрицательны), получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{3.3}$$

Возводя еще раз обе части в квадрат $(a^2 - cx \geqslant 0)$, получаем

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

Обозначим $b^2 = a^2 - c^2$ $(b > 0)$, тогда мы имеем

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{3.4}$$

Разделим обе части в (3.4) на a^2b^2 :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.5}$$

Полученное уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

Проанализируем полученное уравнение.

1. Так как уравнение содержит только четные степени x и y, то вместе с точкой $M(x, y) \in \mathcal{E}$, точки $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$, $M_3(-x, -y)$ также принадлежат эллипсу. Из этого следует, что координатные оси являются осями симметрии канонического эллипса, а начало координат – центром симметрии.

2. Из уравнения (3.5) следует, что $x^2/a^2 \leqslant 1$ и $y^2/b^2 \leqslant 1$. Значит, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$. Это означает, что канонический эллипс — ограниченная кривая, расположенная внутри прямоугольника: $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$.

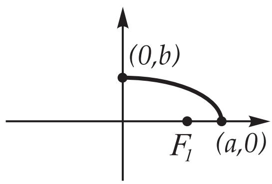


Рис. 3.1.

3. Чтобы изобразить канонический эллипс, рассмотрим только его часть, лежащую в первом квадранте. В нем уравнение эллипса можно разрешить относительно y : $y = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$. Ясно, что когда x пробегает множество $[0; a]$, y убывает от b до 0 (см. рис. 3.1).

Все «остальное» для канонического эллипса можно дорисовать из соображений симметрии.

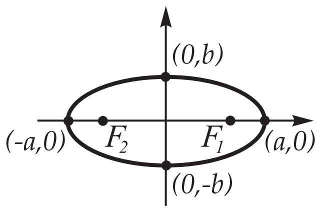


Рис. 3.2.

Числа a, b называют полуосями эллипса (a — большой, b — малой).

Введем в рассмотрение эксцентриситет e — характеристику, определенную следующим:

$$e \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{a}.$$

Ясно, что $0 \leqslant e < 1$. При $e = 0$ ($\Longleftrightarrow c = 0,\ b = a$) эллипс вырождается в окружность радиуса a, чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше малая полуось (эллипс «сплющивается»). Таким образом, эксцентриситет характеризует «меру сплющенности» эллипса.

Оказывается, что у эллипса существует второе геометрическое определение. Рассмотрим две вертикальные прямые $d_1 : x = \frac{a}{e}$ и $d_2 : x = -\frac{a}{e}$. Их называют директрисами эллипса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ (см. рис. 3.3). Справедлива

Теорема 3.1. *Отношение расстояния от точки эллипса до ближайшего фокуса к расстоянию от точки эллипса до ближайшей директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету эллипса, т. е.*

$$\frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, d_1)} = e, \quad \textit{если ближайший фокус равен } F_1; \tag{3.6}$$

$$\frac{\rho(M, F_2)}{\rho(M, d_2)} = e, \quad \textit{если ближайший фокус равен } F_2. \tag{3.7}$$

◀ Рассмотрим произвольную точку M эллипса, лежащую в правой полуплоскости (см. рис. 3.3).

Ясно, что

$$\rho(M, d_1) = \frac{a}{e} - x = \frac{a - ex}{e}. \tag{3.8}$$

Из (3.3) следует

$$\rho(M, F_1) = r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - ex. \tag{3.9}$$

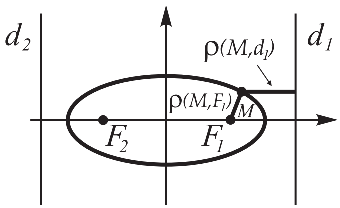


Рис. 3.3.

Подставляя (3.8) и (3.9) в (3.6), получаем

$$\frac{\rho(M, F1)}{\rho(M, d_1)} = e.$$

Аналогично доказывается соотношение (3.7). ▶

Касательная к плоской кривой. Прежде чем заниматься касательной к эллипсу, нам нужно понять, что такое касательная к плоской кривой L, проведенная через точку $M_0(x_0, y_0) \in L$.

Возьмем на L две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ и рассмотрим прямую, проходящую через эти две точки (такую прямую называют секущей). Устремим точку M_1 вдоль L к точке M_0. Если можно говорить о предельном положении секущей, то ее предельное положение называется касательной к кривой L в точке M_0.

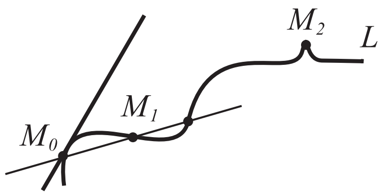


Рис. 3.4.

На рисунке 3.4 указана точка M_0 кривой L, в которой можно говорить о касательной, и точка M_2, в которой нет касательной.

Замечание. Из рисунка видно, что касательная может пересекать кривую.

Касательная к эллипсу. Пусть

$$\mathcal{E} \ : \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— канонический эллипс, $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$.

Возьмем точку $M_1(x_1, y_1) \in \mathcal{E}$ и составим уравнение секущей:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Приведем его к виду $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0); \qquad k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Так как точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1) принадлежат эллипсу, то

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

— верные равенства, вычитая из первого второе, получим

$$\frac{x_1^2 - x_0^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_0^2}{b^2} = 0.$$

Применяя формулы «разности квадратов» и преобразуя, получаем

$$k = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -\frac{b^2(x_1 + x_0)}{a_2(y_1 + y_0)}.$$

Ясно, что когда точка $M_1(x_1, y_1)$ движется по эллипсу к точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет место: $x_1 \to x_0$; $y_1 \to y_0$. Значит

$$k = -\frac{b^2}{a^2}\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}.$$

Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$ примет вид

$$y - y_0 = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x - x_0).$$

Преобразуя, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{x_0(x-x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y-y_0)}{b^2} = 0;\\
&\frac{xx_0}{a^2} - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 0;\\
&\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \overset{M_0\in\mathcal{E}}{=} 1.
\end{aligned}$$

Окончательно

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \tag{3.10}$$

— уравнение касательной к эллипсу в точке (x_0, y_0).

Зададимся теперь вопросом: «Каковы условия, при которых прямая $l : Ax + By + C = 0$ касается эллипса $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$?»

Оказывается, справедлива

Теорема 3.2. *Прямая $Ax+By+C = 0$ касается эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ тогда и только тогда, когда*

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2. \tag{3.11}$$

◀ Пусть $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ — точка касания прямой $l : Ax + By + C = 0$ и эллипса. Составим уравнение касательной

$$l_1 : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

По нашему предположению прямые l и l_1 совпадают, но по условию совпадения

$$\frac{A}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{B}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{C}{-1}.$$

Отсюда

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C}; \qquad y_0 = -\frac{Bb^2}{C}.$$

Вспомним еще раз, что $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \qquad \text{получаем} \qquad \frac{A^2a^2}{C^2} + \frac{B^2b^2}{C^2} = 1, \qquad \text{или}$$

$$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2.$$

Итак, мы показали, что если прямая касается эллипса, то условие (3.11) выполнено.

Покажем теперь обратное. Пусть выполнено условие (3.11). Рассмотрим точку (x_0, y_0), где

$$x_0 = -\frac{Aa^2}{C}; \qquad y_0 = -\frac{Bb^2}{C}.$$

Из условия (3.11) следует, что точка $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$. Составим уравнение касательной

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Подставляя в него выражения для x_0 и y_0, получим

$$-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y = 1,$$

или, приводя к общему знаменателю,

$$Ax + By + C = 0.$$

Мы получили, что исходная прямая является касательной к эллипсу. ►

3.1.2 Гипербола

Определение 3.2. *Гипербола — множество точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.*

Выберем систему координат так же, как и при выводе уравнения эллипса. Пусть $M(x, y)$ — точка гиперболы G, по определению гиперболы

$$r_2 - r_1 = \pm 2a \qquad 0 < a < c$$
$$r_1 = \rho(M, F_1), \qquad r_2 = \rho(M, F_2),$$

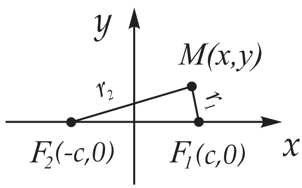


Рис. 3.5.

или

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} \ = \ \pm 2a - \ \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

возводя в квадрат получим

$$(x+c)^2 = 4a^2 \mp 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2;$$
$$a^2 - xc \ = \ \pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

возводя еще раз в квадрат, получам

$$x^2c^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2;$$
$$x^2(c^2-a^2) - a^2y^2 \ = \ a^2(c^2-a^2).$$

Обозначим $b^2 = c^2 - a^2, \ b > 0$, тогда получаем

$$x^2b^2 \ - \ a^2y^2 \ = \ a^2b^2.$$

Разделим обе части на a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} \ - \ \frac{y^2}{b^2} \ = \ 1. \qquad (3.12)$$

Мы получили каноническое уравнение гиперболы. Проанализируем полученное уравнение.

1. Так как уравнение содержит только четные степени x и y, то вместе с точкой $M(x,y) \in G$ точки $M_1(-x,-y)$, $M_2(-x,y)$, $M_3(x,-y)$ принадлежат гиперболе. Из этого следует, что оси координат являются ее осями симметрии, и начало координат — центром симметрии.

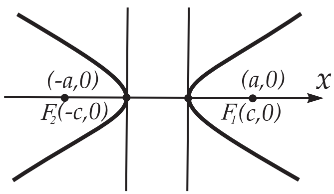


Рис. 3.6.

2. Из канонического уравнения гиперболы получаем, что

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2 = b^2(x^2-a^2). \qquad (3.13)$$

Так как левая часть (3.13) неотрицательна, то $x^2 - a^2 \geqslant 0$ или $x^2 \geqslant a^2$ или $|x| \geqslant a$, т. е. гипербола располагается вне вертикальной полосы $|x| < a$ (см. рис. 3.6) и чем больше x по модулю, тем больше и y по модулю.

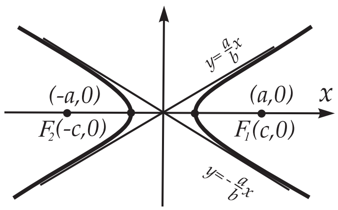


Рис. 3.7.

3. Преобразуем (3.13), считая, что y находится в первом квадранте

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2\left(1-\frac{a^2}{x^2}\right)} = \frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}; \tag{3.14}$$

Из (3.14) следует, что чем больше x, тем ближе соответствующая ветвь гиперболы к прямой $y = \frac{b}{a}x$, оставаясь ниже ее. Эта прямая называется асимптотой гиперболы. Тем самым мы установили, что у гиперболы имеются при $|x| \longrightarrow \infty$ асимптоты

$$y = \frac{b}{a}x, \qquad y = -\frac{b}{a}x. \tag{3.15}$$

Анализ канонического уравнения гиперболы позволяет теперь представить себе форму гиперболы (см. рис. 3.7).

Так как каноническая гипербола $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ пересекает ось Ox в точках $(a, 0)$ и $(-a, 0)$ и не пересекает оси Oy, параметр a называется вещественной полуосью гиперболы, а b — мнимой полуосью.

Также, как и для эллипса, вводится эксцентриситет $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$ и директрисы $x = \pm\frac{a}{e}$.

Теорема 3.3. *Отношение расстояния от точки гиперболы до фокуса к расстоянию от точки гиперболы до ближайшей к фокусу директрисы есть величина постоянная, равная эксцентриситету гиперболы, т. е.*

$$\frac{\rho(M, F_1)}{\rho(M, d_1)} = e \tag{3.16}$$

и

$$\frac{\rho(M, F_2)}{\rho(M, d_2)} = e. \tag{3.16$'$}$$

Касательная к гиперболе. Нетрудно показать (аналогия с эллипсом), что уравнение касательной к гиперболе G: $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ в точке $M_0(x_0, y_0) \in G$ имеет вид

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1, \tag{3.17}$$

условие касания прямой $l : Ax+By+C = 0$ и гиперболы $G : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ имеет вид

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2. \tag{3.18}$$

Замечание. В курсе элементарной математики гиперболой называлась кривая, заданная уравнением $y = k/x$. Покажем, что в случае $a = b$ мы можем от канонического уравнения прийти к уравнению $y = \frac{k}{x}$ $(x \neq 0)$.

◀ Совершим поворот плоскости относительно начала координат на угол $-\pi/4$. По формулам (1.19) получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'), \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y'). \end{cases} \tag{3.19}$$

Подставляя (3.19) в каноническое уравнение гиперболы при условии, что $b = a$, получаем

$$\begin{aligned} &\frac{(x'+y')^2}{2} - \frac{(x'-y')^2}{2} = a^2 \quad \Longleftrightarrow \\ &4x'y' = 2a^2 \quad \Longrightarrow \\ &y' = \frac{a^2}{2x'} = \frac{k}{x'} \quad \left(x' \neq 0,\ k = \frac{a^2}{2}\right). \end{aligned}$$ ▶

3.1.3 Парабола

Определение 3.3. *Пусть на плоскости дана прямая d (директриса) и точка F (фокус) вне ее. Параболой $\mathcal{P}$ называется множество точек плоскости, для которых расстояние до фокуса равно расстоянию до директрисы, т. е.*

$$M \in \mathcal{P} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)} = 1.$$

Замечание. Таким образом, мы определили параболу, как кривую с единичным эксцентриситетом.

Составим уравнение параболы, когда директриса и фокус расположены, как изображено на рисунке 3.8.

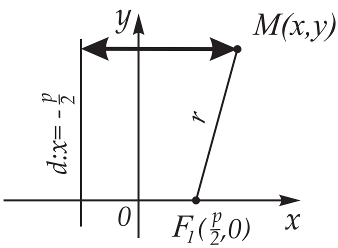


Рис. 3.8.

Пусть $M(x,y) \in \mathcal{P}$, тогда $\rho(M,F) = \sqrt{(x-p/2)^2 + y^2}$; $\rho(M,d) = x + \frac{p}{2}$. Из определения параболы имеем:

$$\begin{aligned} &\left(x + \frac{p}{2}\right) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} \quad \Longleftrightarrow \\ &\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad (3.20) \\ &y^2 = 2px \qquad (3.21) \end{aligned}$$

— каноническое уравнение параболы.

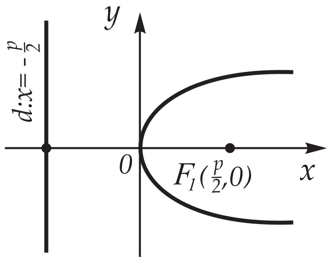


Рис. 3.9.

Отметим, что это привычная нам из элементарной математики парабола, у которой x и y поменялись местами (см. рис. 3.9).

Касательная к параболе. Нетрудно доказать (аналогия с эллипсом), что уравнение касательной к параболе $\mathcal{P}$: $y^2 = 2px$ в точке $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ имеет вид

$$yy_0 \;=\; p(x + x_0), \qquad (3.22)$$

а условие касания прямой l: $Ax + By + C = 0$ и параболы $\mathcal{P}$: $y^2 = 2px$ имеет вид

$$B^2 p \;=\; 2AC. \qquad (3.23)$$

Оптическое свойство параболы. Сейчас мы докажем, что парабола обладает замечательным оптическим свойством:

Точечный источник света, помещенный в фокус параболы, отражаясь от нее (считаем, что в каждой точке параболы находится плоское зеркало, касательное к ней), образует пучок света, параллельный оси симметрии параболы.

◀ Пусть $\mathcal{P}\;:\;y^2 = 2px$; $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$.

Уравнение касательной (зеркала) имеет вид l: $yy_0 = p(x + x_0)$.

Составим уравнение светового луча l_1 из точки F в точку M :

$$\frac{x - x_0}{\frac{p}{2} - x_0} \;=\; \frac{y - y_0}{-y_0}.$$

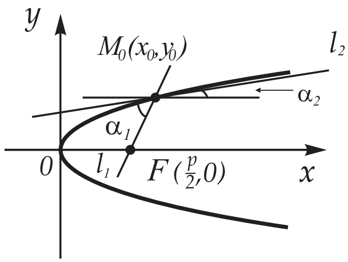


Рис. 3.10.

Преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{\left(x - \frac{p}{2}\right) - \left(x_0 - \frac{p}{2}\right)}{\frac{p}{2} - x_0} = -\frac{y}{y_0} + 1 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$l\;:\quad \frac{x - \frac{p}{2}}{x_0 - \frac{p}{2}} \;=\; \frac{y}{y_0}.$$

Уравнение горизонтальной прямой l_2, проходящей через точку M_0, имеет вид l_2: $y = y_0$.

Покажем, что для пары прямых l_1 и l_2 и зеркала l выполнен закон отражения: $\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2 \iff \operatorname{tg}\,\alpha_1 = \operatorname{tg}\,\alpha_2$.

$\operatorname{tg}\,\alpha_2 = k$, где k — угловой коэффициент l, т. е. $k = \frac{p}{y_0}$.

$\operatorname{tg}\,\alpha_1$ по формуле (2.5) равен

$$\frac{k_1 - k}{1 + k_1 k}, \quad \text{где} \quad k_1 = \frac{y_0}{x_0 - \frac{p}{2}},$$

тогда

$$\operatorname{tg}\,\alpha_1 = \frac{\frac{y_0}{x_0 - p/2} - \frac{p}{y_0}}{1 + \frac{y_0 p}{(x_0 - p/2)y_0}} = \frac{y_0^2 - p x_0 + \frac{p^2}{2}}{x_0 y_0 - \frac{p}{2}y_0 + y_0 p} \overset{y_0^2 = 2px_0}{=}$$
$$= \frac{p x_0 + \frac{p^2}{2}}{x_0 y_0 + \frac{p}{2} y_0} = \frac{p}{y_0}.$$

Таким образом, мы доказали, что $\operatorname{tg}\,\alpha_1 = \operatorname{tg}\,\alpha_2$. ▶

3.2. Общая теория кривых второго порядка

Заметим, что канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы оказались уравнениями второй степени от переменных x, y.

Рассмотрим теперь общее алгебраическое уравнение второго порядка:

$$F(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{3.24}$$

где A, B, C не равны нулю одновременно, т. е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Выясним, при каких условиях кривая (3.24) имеет начало координат центром симметрии.

Теорема 3.4. *Для того, чтобы начало координат являлось центром симметрии кривой второго порядка $F(x, y) = 0$, необходимо и достаточно, чтобы в ее уравнении отсутствовали слагаемые первой степени* ($D = E = 0$).

◀ Достаточность очевидна, т.к. если $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F$, то $F(x_0, y_0) = F(-x_0, -y_0)$.

Докажем необходимость. Заметим, что точки (x_0, y_0) и $(-x_0, -y_0)$ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат (ее уравнение — $y = k_0 x$). Тогда $y_0 = k_0 x_0$, подставляя $k_0 x_0$ в $F(x_0, y_0) = 0$ вместо y_0, получаем:

$$Ax_0^2 + 2Bk_0x_0^2 + Ck_0^2x_0^2 + 2Dx_0 + 2Ek_0x_0 + F = 0;$$
$$x_0^2(A + 2Bk_0 + Ck_0^2) + x_0(2D + 2k_0E) + F = 0.$$

Последнее уравнение вместе с корнем x_0 имеет и корень $-x_0$ только в случае, когда

$$2D + 2k_0E = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D + k_0E = 0.$$

Меняя положение точки $M(x_0, y_0)$ на кривой, мы меняем k_0. Последнее соотношение для центрально-симметричной кривой должно выполняться для всех значений k_0, но это возможно, только тогда, когда

$$D = E = 0. \quad \blacktriangleright$$

Совершим параллельный перенос в «гипотетический» центр кривой второго порядка

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b; \end{cases}$$

$$A(x'+a)^2 + 2B(y'+b)(x'+a) + C(y'+b)^2 + 2D(x'+a) + \\ +2E(y'+b) + F = 0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$A(x')^2 + 2Bx'y' + C(y')^2 + \\ +(2Aa + 2Bb + 2D)x' + (2Ba + 2Cb + 2E)y' + \\ +(Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + F) = 0.$$

Таким образом, координаты «гипотетического» центра должны удовлетворять равенствам:

$$\begin{cases} Aa + Bb + D = 0 \\ Ba + Cb + E = 0, \end{cases}$$

т. е. должны являться решениями системы уравнений

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ Bx + Cy + E = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Множество решений каждого из уравнений системы (3.25) — прямая линия, а две прямые на плоскости либо пересекаются в одной точке (центр кривой второго порядка), либо совпадают (прямая центров), либо не пересекаются (нецентральная кривая). Вспоминая условия параллельности и совпадения прямых, получаем:

1) $\frac{A}{B} \neq \frac{B}{C} \Longleftrightarrow AC - B^2 \neq 0$ — кривая имеет единственную точку, являющуюся центром симметрии, координаты которой (a, b) — единственное решение системы (3.25).

2) $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{D}{E}$ — кривая имеет прямую центров; ее уравнение — любое из уравнений системы (3.25).

3) $\frac{A}{B} = \frac{B}{C} \neq \frac{D}{E}$ — кривая не имеет центра.

Замечание. Попутно мы показали, что при параллельном переносе группа слагаемых второй степени в уравнении кривой второго порядка не меняется.

Изучим теперь влияние поворота координатных осей на уравнение кривой второго порядка.

Выполним поворот на угол α, тогда

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \\ y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим правые части формул поворота в уравнение кривой второго порядка

$$\begin{aligned}&A(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)^2 + 2B(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha)(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) + \\ &+C(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha)^2 + 2D(x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha) + \\ &+2E(x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha) + F = 0 \quad \Longleftrightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)x_1^2 + \\ &+(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha)y_1^2 + \\ &+(-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha)x_1y_1 + \\ &+(2D\cos\alpha + 2E\sin\alpha)x_1 + (-2D\sin\alpha + 2E\cos\alpha)y_1 + F = 0,\end{aligned}$$

Мы показали, что при повороте координат свободный член в уравнении кривых второго порядка не меняется.

$\boxed{З}$ **3.1** При повороте на какой угол α в уравнении кривой второго порядка пропадет произведение переменных?

◀ Это происходит при

$$\begin{aligned}&-2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 0 \iff \\ &-A\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha + C\sin 2\alpha = 0. \\ &(C - A)\sin 2\alpha + 2B\cos 2\alpha = 0, \\ &\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}; \quad (A \neq C) \qquad (3.26)\end{aligned}$$

Выполнив поворот на α, удовлетворяющий (3.26) получаем

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + 2D_1x_1 + 2Ey_1 + F = 0. \qquad (3.27)$$

Такое преобразование называется приведением к главным осям.

Определение 3.4.

- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет эллиптический тип, если* A_1 *и* C_1 *в* (3.27) *отличны от нуля и имеют одинаковый знак, т. е.* $A_1C_1 > 0$.
- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет гиперболический тип, если* A_1 *и* C_1 *в* (3.27) *отличны от нуля и имеют разные знаки, т. е.* $A_1C_1 < 0$.
- *Будем говорить, что кривая второго порядка имеет параболический тип, если* $A_1 = 0$, $C_1 \neq 0$ *или* $A_1 \neq 0$, $C_1 = 0$ ($\Leftrightarrow$ $A_1C_1 = 0$, $A_1^2 + C_1^2 > 0$).

Рассмотрим эти случаи отдельно.

Эллиптический и гиперболический тип. Покажем, что в этом случае имеем дело с кривой, имеющий центр. Составим систему (3.25)

$$\begin{cases} A_1x + D_1 = 0, \\ C_1y + E_1 = 0; \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{D_1}{A_1}, \\ y = -\dfrac{E_1}{C_1}. \end{cases}$$

Как видно, система совместна и имеет единственное решение. Выполним параллельный перенос в точку $\left(-\frac{D_1}{A_1}; -\frac{E_1}{C_1}\right)$

$$A_1x^2 + C_1y^2 + F_1 = 0.$$

Эллиптический тип. Преобразуем уравнение кривой к виду $A_1x^2 + C_1y^2 = -F_1$ и если A_1 и C_1 меньше нуля, умножим обе части на -1. Тогда уравнение приводится к виду

$$|A_1|x^2 + |C_1|y^2 = (-\operatorname{sign} A)F_1.$$

Если $(-\operatorname{sign} A)F_1 > 0$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0)$$

и мы имеем дело с эллипсом;

если $F_1 = 0$, то уравнение кривой второго порядка примет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \qquad (a, b > 0).$$

Ясно, что ему удовлетворяет только одна точка $(0, 0)$;

если $(-\operatorname{sign} A_1)F_1 < 0$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad a, b > 0,$$

которому не удовлетворяют координаты ни одной из точек плоскости. В этом случае говорят, что мы получили мнимый эллипс.

Гиперболический тип. В случае, когда $F_1 \neq 0$, уравнение приводится к одному из двух видов:

$$\text{а)} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a, b > 0);$$
$$\text{б)} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \qquad (a, b > 0).$$

В обоих случаях мы имеем дело с гиперболой (в случае (б) оси координат поменялись ролями).

Если $F_1 = 0$, то уравнение приводится к виду:

$$m^2x^2 - n^2y^2 = 0 (m, n > 0), \text{или } (mx - ny)(mx + ny) = 0.$$

Ясно, что ему удовлетворяют точки, координаты которых обращают в ноль хотя бы одну из скобок. Каждая скобка задает прямую, проходящую через начало координат, т. е. в этом случае мы получили пару пересекающихся прямых.

Параболический тип. Рассмотрим два случая:

$$A_1x^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0 \qquad \text{или}$$
$$C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0.$$

Второй случай получается из первого переменой «ролей» у x и y, поэтому будем рассматривать только первый случай.

Составим систему уравнений (3.25) для нахождения центра:

$$\begin{cases} A_1x + D_1 = 0 \\ \qquad\ E_1 = 0. \end{cases}$$

Если $E_1 \neq 0$, то эта система не имеет решений, и если $E_1 = 0$, то прямая $x = -\frac{D_1}{A_1}$ является прямой центров. Рассмотрим эти случаи отдельно.

- $E_1 \neq 0$, тогда уравнение кривой второго порядка можно разрешить относительно y :

$$y = ax^2 + bx + c,$$

т. е. мы имеем дело с параболой.

- $E_1 = 0$, тогда уравнение кривой второго порядка не содержит y

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Известно, что если $\mathcal{D} = b^2 - 4ac > 0$, то левая часть разлагается на множители

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Мы получили пару вертикальных прямых $x = x_1$ и $x = x_2$.

Если $\mathcal{D} = 0$, то

$$a(x - x_1)^2 = 0$$

— две совпавшие вертикальные прямые $x = x_1$.

Если $\mathcal{D} < 0$, то $ax^2 + bx + c$ не обращается в ноль и значит кривая второго порядка представляет собой пустое множество (как и в случае мнимого эллипса).

Контрольные вопросы и задания

1. Отправляясь от определения эллипса (определение 3.1), мы получили его каноническое уравнение. Докажите самостоятельно, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3.25), то точка принадлежит эллипсу с фокусами $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.

2. Чем отличается определение касательной к кривой в данной точке от известного вам из школьной геометрии определения касательной к окружности? Почему потребовался новый подход к понятию «касательная»?

3. Отправляясь от определения гиперболы (определение 3.2), мы получили ее каноническое уравнение. Докажите самостоятельно, что если координаты точки удовлетворяют уравнению (3.12), то точка принадлежит гиперболе с фокусами $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.

4. Найдите угол между асимптотами гиперболы $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$.

5. Может ли касательная к гиперболе быть параллельна её асимптоте?

6. Докажите самостоятельно оптическое свойство эллипса:

   «Световые лучи, исходящие их одного фокуса, после зеркального отражения от эллипса проходят через другой фокус.»

   Какие практические применения этого свойства можно предложить (или известны вам)?

7. Докажите, что парабола не имеет асимптот.

8. Найдите координаты факуса параболы $y = x^2 + bx + c$.

IV

АЛГЕБРА МАТРИЦ

4.1. Понятие о матрице

Матрица — удобный способ организации данных во многих задачах.

$\boxed{\text{П}}$ **4.1** Чоу Дж. [Chow G. G (1960). Statistical demand functions for automobiles old their use for forecastiory. In the Demand for Duruble Goods. A C. Harberger (ed.). University of Chicago Press.] приводит данные средней продажной цены подержанных автомобилей в зависимости от срока предыдущей эксплуатации. Итоговые данные по годам сводятся в таблицу:

Продолжительность эксплуатации (годы)	1950	1951	1952
1	1881	2120	2445
2	1521	1676	1825
3	1261	1397	1484
4	1054	1144	1218

Можно упростить запись этой таблицы:

$$\begin{pmatrix} 1881 & 2120 & 2245 \\ 1512 & 1676 & 1825 \\ 1261 & 1397 & 1484 \\ 1054 & 1144 & 1218 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Содержательное значение любого числа в этой таблице (матрице) однозначно определяется его позицией, т. е. указанием номера строки и столбца, в котором это число находится. Так, например, число 1397, стоящее в 3–ей строке 2–ом столбце, — средняя цена (в долларах) подержанного автомобиля со сроком предыдущей эксплуатации 3 года в 1951 году.

Определение 4.1. *Матрицей размера $n \times m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ называют прямоугольную таблицу чисел, содержащую n строк и m стоблцов.*

Запись такой таблицы обычно заключают в круглые скобки (в примере 4.1 приведена матрица 4×3).

Для обозначения матриц используют обычно заглавные буквы латинского алфавита (A, B и т. п.). Если нужно указать размеры матрицы, то пишут $A_{n\times m}$. Для обозначения позиций элементов, образующих матрицу, применяют двойную индексацию — ij, где i — номер строки, j — номер столбца. Элемент матрицы A, стоящий в позиции ij, обозначают a_{ij} или A_{ij} или $(A)_{ij}$ или $A(i,j)$.
$(a_{ij})\,{}_{i=1}^{n}{}_{j=1}^{m}$ — возможное обозначение для матрицы размера $n \times m$ с элементами a_{ij} ($(A_{ij})_{n\times m}$, $(a_{ij})_{n\times m}$, (a_{ij})) — другие возможные обозначения матрицы).

$\boxed{\text{П}}$ **4.2** Если A — матрица примера 4.1, то $a_{13} = 2245$, $a_{42} = 1144$, $a_{23} = 1825$.

Матрица размера $1 \times m$ называется матрицей–строкой длины m. Матрица размера $n \times 1$ называется матрицей–столбцом высоты n.

Определение 4.2. *Две матрицы одинаковых размеров называют равными и пишут $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.*

Ясно, что

1) $A = A$;

2) $(A = B) \iff B = A$;

3) $(A = B)\&(B = C) \implies A = C$.

В случае, когда $n = m$, матрица называется квадратной порядка n, если $n \neq m$, матрица называется прямоугольной.

Определение 4.3. *Нуль–матрицей размера $n \times m$ называется матрица, обозначаемая $O_{n\times m}$ (или просто O), определенная следующим $O_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 0$.*

Определение 4.4. *Противоположной к матрице A называется матрица тех же размеров, обозначаемая $-A$, определенная следующим образом:*

$$(-A)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} -A_{ij}. \tag{4.2}$$

4.2. Сумма матриц и умножение матрицы на число

Определение 4.5. *Суммой матриц A и B одинаковых размеров (!) называется матрица, обозначаемая $A+B$, имеющая те же размеры, что и матрицы-слагаемые и определяемая следующим*

$$(A+B)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} + B_{ij}, \tag{4.3}$$

т. е. матрицы складываются поэлементно.

$\boxed{\text{П}}$ **4.3** Если

$$B = \begin{pmatrix} 562 & 407 & 251 \\ 320 & 252 & 189 \\ 215 & 160 & 145 \\ 162 & 130 & 105 \end{pmatrix}$$

— матрица средних цен на подержанные велосипеды в 1950–1953 гг. (в долларах), а A — матрица средних цен на автомобили , то

$$A+B = \begin{pmatrix} 2443 & 1527 & 2496 \\ 1832 & 1928 & 2014 \\ 1476 & 1557 & 1629 \\ 1216 & 1274 & 1323 \end{pmatrix}$$

— матрица средних цен комплекта «автомобиль-велосипед».

Теорема 4.1. *Сложение матриц обладает следующими свойствами:*

1°. $A+B=B+A$ *— коммутативность;*

2°. $(A+B)+C=A+(B+C)\stackrel{\text{def}}{=}A+B+C$ *— ассоциативность;*

3°. $A+0=0+A=A$;

4°. $A+(-A)=(-A)+A=0$.

Множество с бинарной операцией, обладающее свойствами 1–4°, называется коммутативной (абелевой) группой.

Бинарной операцией, заданной на множестве X, называется отображение, действующее из множества упорядоченных пар элементов X (оно обозначается $X \times X$) в X.

Примеры множеств с бинарной операцией:

1) $X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, бинарная операция — сложение;
2) $X = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, бинарная операция — умножение.

Пример некоммутативной бинарной операции:

3) Пусть $X = \mathbb{N}$. Определим бинарную операцию $\uparrow$ следующим:

$$m \uparrow n \stackrel{\text{def}}{=} m^n.$$

Ясно, что $\uparrow$ — некоммутативная операция, так как:

$$8 = 2 \uparrow 3 \neq 3 \uparrow 2 = 9.$$

Если операция $\odot$ некоммутативна, то в определении группы свойство 4° заменяется на 4°′ $\forall x \in X\ \exists (-x)$ и $(-x)$, такие, что

$$x \odot (-x) \ = \ (-x) \odot x \ = \ 0.$$

Элемент, обозначаемый 0, называют нейтральным, а элемент $(-x)$ противоположным или обратным, $(-x)$ —левым обратным, $(-x)$ — правым обратным.

Здесь и далее знаки $\forall$ и $\exists$ можно считать стенографическими: $\forall$ — «для любого», $\exists$ — «существует».

Теорема 4.2. *Если G — группа относительно операции $\odot$, то уравнения $x \odot a = b$ и $a \odot x = b$ разрешимы при любых a и $b \in G$ и их решения имеют вид: $x = b \odot (-a)$ и $x = (-a) \odot b$ соответственно.*

◀ Непосредственная подстановка доказывает теорему (используется ассоциативность групповой операции). ▶

Обозначим через $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ множество матриц размера $n \times m$ с вещественными элементами, тогда Теорема 4.1 может быть сформулирована иначе:

Теорема 4.1.′ *Множество $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ относительно операции + образует коммутативную группу.*

Знак суммы и правила «обращения» с ним. Пусть $\{a_i\}_{i=1}^n$ — конечная числовая последовательность, обозначим через

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \stackrel{\text{def}}{=} a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \tag{4.4}$$

i называют индексом суммирования, 1 и n — нижним и верхним пределами суммирования.

Очевидно, имеют место свойства:

1°. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ — значение суммы не зависит от обозначения индекса суммирования.

2°. Для любого целого α имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1-\alpha}^{n-\alpha} a_{i+\alpha}.$$

Пусть $(a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, обозначим через $\left\{s^j\right\}_{j=1}^m$ последовательность, определенную следующим:

$$s^j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij},$$

тогда

$$\sum_{j=1}^{m} s^j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

называется повторной суммой. Можно определить еще одну повторную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}.$$

При этом справедливо:

3°. $\sum\limits_{j=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$, так как и левое выражение и правое выражение — сумма всех элементов матрицы (a_{ij}). Это правило называют правилом изменения порядка суммирования по прямоугольнику, и оно позволяет определить так называемую двойную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Замечание. Если мы суммируем не по прямоугольнику, то изменение порядка суммирования не такое простое.

П 4.4

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Мы хотим найти сумму элементов квадратной матрицы, попавших в верхний треугольник.

Ясно, что

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} a_{ij}. \qquad \blacktriangleright$$

Иногда индекс суммирования пробегает не все значения подряд, например

$$\sum_{i=1}^{2n} a_{2i} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n};$$
$$\sum_{i=0}^{2n-1} a_{2i+1} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1};$$

4°. $\sum_{i=1}^{n} ba_i = b\sum_{i=1}^{n} a_i$ — правило вынесения постояного множителя за знак суммы.

5°. $\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) b_j$ — множитель, имеющий индекс, отличный от индекса суммирования, можно выносить за знак суммы.

Определение 4.6. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$, $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Определим матрицу αA $(\in M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ следующим образом*

$$(\alpha A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \alpha \cdot A_{ij}, \tag{4.5}$$

т. е. матрица умножается на число поэлементно.

П 4.5 Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

тогда

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad -1A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ясно, что имеют место свойства:

1°. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ — I–ый дистрибутивный закон;

2°. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ — II–ый дистрибутивный закон;

3°. $-1 \cdot A = -A$;

4°. $1 \cdot A = A$;

5°. $0 \cdot A = O, \quad \forall A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$;

6°. $\alpha \cdot O = O, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4.3. Умножение матриц

Прежде чем перейти к определению самой «экзотической» операции — умножения матриц, рассмотрим на примере ее простейший вариант — умножение матрицы-строки на матрицу-столбец.

Пусть некоторая фирма производит 5 видов товаров с ценами реализации (в условных единицах), представленными матрицей-строкой

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 7 & 60 & 25 \end{pmatrix},$$

объем реализации по видам продукции (в единицах продукции) за месяц представлен матрицей-столбцом

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 150 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix},$$

тогда объем реализации фирмы в денежном выражении за месяц равен

$$\begin{aligned} &12 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 7 \cdot 150 + 6 \cdot 60 + 25 \cdot 34 = \\ &= 120 + 200 + 1050 + 360 + 850 = 2580 \end{aligned}$$

(вспомните знакомое со школы определение скалярного произведения).

Это выражение в алгебре матриц задает правило умножения матрицы-строки на матрицу-столбец, т. е.

$$A \cdot B = (12\,10\,7\,60\,25) \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 150 \\ 6 \\ 34 \end{pmatrix} =$$
$$= 12 \cdot 10 + 10 \cdot 20 + 7 \cdot 150 + 6 \cdot 60 + 25 \cdot 34 = 2580.$$

Заметим, что длина матрицы-строки совпадает с высотой матрицы-столбца. Если же у нас есть матрица $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ и матрица $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, то любая строка матрицы A имеет длину, равную высоте любого столбца матрицы B, и значит, мы можем перемножить по правилу умножения матрицы-строки на матрицу-столбец любую пару «строка матрицы A», «столбец матрицы B». В результате такого перемножения мы получим число, которое при заданных матрицах A и B определяется парой индексов i, j, где i — номер строки матрицы A, j — номер столбца матрицы B ($1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$). В результате мы получим таблицу чисел, индексированную двумя индексами, т. е. матрицу размера $n \times m$. Эта матрица и есть произведение матрицы A на матрицу B. Дадим теперь четкое определение:

Определение 4.7. *Пусть $A \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p\times m}(\mathbb{R})$, произведением матрицы A на матрицу B называется матрица, обозначаемая AB ($A \cdot B$, $A \times B$)[1] $\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ и определяемая следующим*

$$(AB)_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}. \tag{4.6}$$

Замечание. Еще раз подчеркнем, что перемножать можно только матрицы, размеры которых согласованы, а именно число столбцов первого сомножителя должно быть равно числу строк второго сомножителя. В результате перемножения получается матрица с числом строк, равным числу строк первого сомножителя, и числом столбцов, равным числу столбцов второго сомножителя.

$\boxed{\text{П}}$ **4.6** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix},$$

BA — не существует, так как пара матриц B, A не согласована по умножению.

Замечание. При умножении матрицы-строки на матрицу получается матрица-строка, при умножении матрицы на матрицу-столбец получается матрица-столбец.

Замечание. Сложение матриц и умножение матриц определены так, что если числа отождествить с матрицами 1×1, то обычные операции сложения и умножения совпадут с соответствующими матричными операциями.

Теорема 4.3. *Умножение матриц (в размерах, больших чем 1×1) некоммутативно.*

◀ Для доказательства этой теоремы достаточно привести пару матриц A, B такую, что

$$AB \neq BA. \tag{4.7}$$

Ясно, что пара A, B может быть такой, что она согласована по умножению, а пара B, A не согласована и (4.7) выполнено тривиально. Мы приведем пример таких матриц, что пары A, B и B, A согласованы по умножению и (4.7) выполнено.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix} \quad ▶$$

Замечание.

- Обращаем внимание на особенность доказательства теорем «отрицательного» свойства (см. пред. теорему).
- Умножение матриц не является «абсолютно» некоммутативным, так если $A = B$ — квадратная матрица, то $AB = BA$. Попробуйте привести нетривиальные примеры квадратных матриц A, B, для которых $AB = BA$.

Теорема 4.4. *Умножение матриц ассоциативно, т. е. для любых матриц $A\,(\in M_{m\times p}(\mathbb{R}))$, $B\,(\in M_{p\times q}(\mathbb{R}))$, $C\,(\in M_{q\times n}(\mathbb{R}))$ имеет место равенство:*

$$(A \cdot B)C = A(B \cdot C) \stackrel{\text{def}}{=} A \cdot B \cdot C. \tag{4.8}$$

◀ Воспользуемся определением равенства матриц (Определение 4.2) и умножения матриц (Определение 4.7)

$$((AB)\cdot C)_{ij} \overset{4.7}{=} \sum_{s=1}^{p}(AB)_{is}C_{sj} \overset{4.7}{=}$$

$$= \sum_{s=1}^{p}\left(\sum_{t=1}^{q} A_{it}B_{ts}\right)\cdot C_{sj} \overset{\text{св-во 5 знака } \Sigma}{=}$$

$$= \sum_{s=1}^{p}\sum_{t=1}^{q} A_{it}B_{ts}C_{sj} \overset{\text{св-во 3 } \Sigma}{=} \sum_{t=1}^{q}\sum_{s=1}^{p} A_{it}B_{ts}C_{sj} \overset{\text{св-во 5 } \Sigma}{=}$$

$$\sum_{t=1}^{q} A_{it}\left(\sum_{s=1}^{p} B_{ts}C_{sj}\right) \overset{\text{Опред. 4.7}}{=}$$

$$= \sum_{t=1}^{q} A_{it}\,(BC)_{tj} \overset{\text{Опред. 4.7}}{=} (A\cdot(BC))_{ij}\,. \qquad ▶$$

Мы знаем, что произведение чисел равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю. Для матриц (обобщающих понятие числа) это не так.

Теорема 4.5. *Во множестве матриц (размеров, больших 1×1) существуют такие матрицы $A\neq 0$ и $B\neq 0$, что $AB=0$.*

◀ Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

тогда

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}. \qquad ▶$$

Матрицы, удовлетворяющие утверждению теоремы 4.5, называют делителями нуля.

Выделим особые часто встречающиеся матрицы.

Определение 4.8. *Квадратная матрица E_n $(I_n,\, I,\, E)\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, заданная равенством*

$$(E)_{ij} = \begin{cases} 1, \textit{если} & i=j\\ 0, \textit{если} & i\neq j\end{cases} \tag{4.9}$$

называется единичной порядка n, т.е.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Очевидно, справедливо равенство

$$EA = AE = A, \tag{4.11}$$

где, если $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ в равенстве (4.11) слева стоит E_m, а справа E_n.

Определение 4.9. *Квадратная матрица $A\,(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ называется диагональной, если*

$$(A)_{ij} = \begin{cases} \alpha_i, \text{если} & i = j \\ 0, \text{если} & i \neq j \end{cases} \tag{4.12}$$

т. е. диагональная матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Определение 4.10. *Квадратная матрица $A\,(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ называется скалярной, если*

$$A = \alpha \cdot E, \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.13}$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

Замечание. После того, как определена скалярная матрица, умножение матриц на число логично заменить умножением на скалярную матрицу.

Определим во множестве матриц еще одну операцию — транспонирование, которая бывает очень удобной и позволяет снять некоторые сложности в алгебре матриц, связанные с ее некоммутативностью относительно умножения матриц.

Определение 4.11. *Пусть $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, транспонированной матрицей называется матрица, обозначаемая A^t (A') $\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ и определяемая следующим*

$$\left(A^t\right)_{ij} = (A)_{ji}\,. \tag{4.14}$$

П **4.7** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \qquad \text{тогда} \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.6. *Имеют место следующие свойства:*

1°. $(A^t)^t = A$;

2°. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;

3°. $(A+B)^t = A^t + B^t$;

4°. $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

◀ Свойства 1–3° очевидны, докажем свойство 4°.

$$\left((A \cdot B)^t\right)_{ij} \overset{(4.14)}{=} (AB)_{ji} \overset{(4.6)}{=} \sum_{k=1}^{p} A_{jk} B_{ki} \overset{(4.14)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} (A^t)_{kj} \cdot (B^t)_{ik} = \sum_{k=1}^{p} (B^t)_{ik} \cdot (A^t)_{kj} \overset{(4.6)}{=} \left(B^t \cdot A^t\right)_{ij}.$$ ▶

Замечание о «пользе» транспонирования. Из-за некоммутативности умножения матриц простейшие матричные уравнения бывают двух типов:

$$\text{а)} \quad A \cdot X = B \qquad \text{и} \qquad \text{б)} \quad X \cdot A = B,$$

однако транспонирование и его свойства позволяют свести уравнение типа б) к типу а).

◀

$$X \cdot A = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^t X^t = B^t.$$

Последнее уравнение относится к типу а). ▶

4.4. Обратная матрица

С необходимостью решать матричные уравнения, в частности, связаны и следующие понятия.

Определение 4.12. *Матрица A называется обратимой слева (справа), если существует матрица $A^{-1}_{Л}$ (A^{-1}_{text}), называемая левой (правой) обратной, такая, что*

$$A^{-1}_{Л} A = E \tag{4.15}$$

$$(A A^{-1}_{П} = E) \tag{4.16}$$

Определение 4.13. *Квадратная матрица A называется обратимой, если существует матрица A^{-1}, называемая обратной к A, такая, что*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \tag{4.17}$$

$\boxed{\text{П}}$ **4.8** Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убедимся, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 4.7. *Если квадратная матрица обратима слева и справа, то левая и правая обратные матрицы совпадают и она просто обратима.*

◀

$$A_{\text{Л}}^{-1} = A_{\text{Л}}^{-1}E = A_{\text{Л}}^{-1}\left(A \cdot A_{\text{П}}^{-1}\right) \overset{\text{ассоц.произ.}}{=}$$

$$= \left(A^{-1}A\right)A_{\text{П}}^{-1} = EA_{\text{П}}^{-1} = A_{\text{П}}^{-1}. \quad ▶$$

Теорема 4.8. *Если матрица обратима, то обратная к ней единственна.*

◀ Допустим противное, т. е. что существует такая обратимая матрица A, у которой по крайней мере две обратных матрицы $A_{N_1}^{-1}$ и $A_{N_2}^{-1}$ и

$$A_{N_1}^{-1} \neq A_{N_2}^{-1}. \tag{4.18}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств, которая приводит к противоречию с (4.18):

$$A_{N_1}^{-1} = A_{N_1}^{-1}E = A_{N_1}^{-1}\left(AA_{N_2}^{-1}\right) = \left(A_{N_1}^{-1}A\right)A_{N_2}^{-1} = EA_{N_2}^{-1} = A_{N_2}^{-1} \quad ▶$$

Теорема 4.9 (Свойства обратимых матриц)**.** *Имеют место свойства:*

1°. *Если матрица A обратима, то A^{-1} также обратима и $(A^{-1})^{-1} = A$.*

2°. *Если A, B $(\in M_{n\times n}(\mathbb{R}))$ обратимы, то AB — обратима и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

3°. *E — обратимая матрица и $E^{-1} = E$.*

4°. *Если матрица обратима, то она не является делителем нуля.*

5°. 0*–матрица не является обратимой матрицей и односторонне обратимой матрицей.*

◀ Свойства 1°, 3° и 5° очевидны, докажем 2° и 4°.

$◀_2$

$$\begin{aligned} AB\cdot\left(B^{-1}A^{-1}\right) &= A\left(BB^{-1}\right)A^{-1} = A\cdot A^{-1} = E.\\ \left(B^{-1}A^{-1}\right)\cdot AB &= B^{-1}\left(A^{-1}A\right)B = B^{-1}B = E. \qquad ▶_2\end{aligned}$$

$◀_4$ Допустим противное, т. е. что существует обратимая матрица A, которая является делителем нуля, т. е. для нее существует B, такая, что

$$\begin{cases} B \neq 0,\\ AB = 0\end{cases} \tag{4.19}$$

Рассмотрим теперь цепочку равенств, приводящую к противоречию с (4.19):

$$B = EB = \left(A^{-1}A\right)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}\cdot 0 = 0. \qquad ▶_4 \qquad ▶$$

Следствие из теоремы 4.9 Существуют необратимые матрицы (и их перечень не ограничивается нуль-матрицей).

◀ Из 4° следует, что делители нуля не являются обратимыми матрицами, а существование делителей нуля уже доказано (теорема 4.5). ▶

Из теоремы 4.9 следует

Теорема 4.10. *Множество обратимых матриц порядка n относительно умножения образует коммутативную группу.*

Степени матрицы. Для квадратной матрицы A можно определить ее неотрицательные степени, положив

$$\begin{aligned} &A^0 \overset{\text{def}}{=} E, \quad A^1 \overset{\text{def}}{=} A, \quad A^2 \overset{\text{def}}{=} A\cdot A, \dots \\ &\dots, \quad A^n \overset{\text{def}}{=} A^{n-1}\cdot A, \quad \dots, \end{aligned} \tag{4.20}$$

а если матрица A обратима, то можно определить и ее целые отрицательные степени, положив

$$\begin{aligned} &(A)^{-1} \overset{\text{def}}{=} A^{-1}; \quad A^{-2} \overset{\text{def}}{=} A^{-1}\cdot A^{-1}, \dots \\ &A^{-n} \overset{\text{def}}{=} A^{-(n-1)}\cdot A^{-1}, \quad \dots \end{aligned} \tag{4.21}$$

При этом справедливо

$$A^n A^m = A^{n+m}. \tag{4.22}$$

Теперь можно говорить и о многочленах от матрицы. Пусть

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^1 + \dots + a_1 x + a_0 \tag{4.23}$$

— многочлен с вещественными коэффициентами.

Многочленом от матрицы $A \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ (матричным многочленом) называется матрица $P(A)$, определенная следующим

$$P(A) = a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E. \tag{4.24}$$

$\boxed{\text{П}}$ **4.9** Пусть

$$\begin{aligned} &P(x) = x^2 - 5x - 2, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ &A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}. \\ &P(A) = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е. A является матричным корнем многочлена. Пусть

$$\begin{aligned} &B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \\ &P(B) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Контрольные вопросы и задания

1. Когда обратима скалярная матрица и как выглядит обратная к ней?
2. Когда обратима диагональная матрица и как выглядит обратная к ней?
3. Постройте примеры матриц делителей нуля, отличных от приведенных в доказательстве теоремы 4.5.
4. Во множестве $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ приведите пример матриц A, B ($\neq E$, O), для которых $AB = BA$.
5. Пусть $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. На какую матрицу и с какой стороны нужно умножить матрицу A, чтобы результат умножения был матрицей, полученной из матрицы A перестановкой местами ее s–ой и r–ой строк (столбцов)?

V

СИСТЕМА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

5.1. СЛУ. Матричная запись

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.1}$$

Замечание. Многие вынесли из школы серьезное заблуждение о том, что число уравнений в СЛУ должно быть равно числу неизвестных (т. е., что $m = n$). На самом деле в жизни возможны любые ситуации: $m < n$, $m = n$, $m > n$.

Образуем матрицу A размера $m \times n$ по правилу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она называется матрицей системы (матрицей коэффициентов системы).

Обозначим через x матрицу–столбец из неизвестных, т. е.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$

а через b матрицу–столбец свободных членов (правых частей СЛУ), т. е.

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

тогда система линейных уравнений может быть записана в виде:

$$Ax = b, \tag{5.2}$$

который называется *матричной записью системы линейных уравнений.*

Если матрица A квадратная, то и систему линейных уравнений называют квадратной; если $b = 0$, то СЛУ называют однородной системой линейных уравнений (ОСЛУ).

Формально всю информацию о СЛУ (кроме обозначений неизвестных) сохраняет матрица

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая расширенной матрицей системы. В записи расширенной матрицы системы применяют разделитель — вертикальную черту, отделяющую столбец правых частей от матрицы коэффициентов.

$\boxed{\text{П}}$ **5.1** Система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \phantom{{}+ x_3} = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

тогда матричная запись имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

а расширенная матрица

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

Определение 5.1. *Упорядоченный набор из n чисел называется решением системы линейных уравнений с n неизвестными, если при подстановке его элементов вместо неизвестных во все уравнения системы получаются верные числовые равенства.*

Обозначим через $R\left((A|b)\right)$ множество решений СЛУ $Ax = b$.

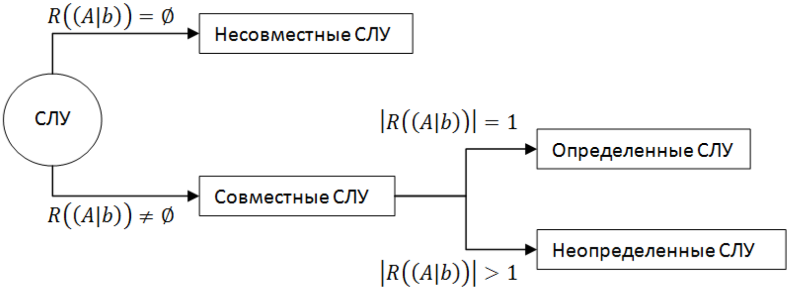


Рис. 5.1.

В зависимости от того, каково множество решений системы линейных уравнений, они делятся на совместные $\Leftrightarrow R((A|b)) \neq \varnothing$ и несовместные $\Leftrightarrow R((A|b)) = \varnothing$ (см. рис. 5.1).

Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, т. е. если $|R((A|b))| = 1$, в противном случае она называется неопределенной[1].

Теорема 5.1. *Однородная система всегда совместна.*

◀ Очевидно, решением однородной системы линейных уравнений всегда является $(0, 0, 0, \ldots, 0)^t$ — нулевое решение, оно называется тривиальным. ▶

Теорема 5.2. *Если система линейных уравнений имеет более одного решения, то она имеет бесконечное множество решений.*

◀ Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ и пусть $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t \neq \overline{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$— два ее решения, т. е.

$$A\overline{\alpha} = A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = b \quad \text{и} \quad A\overline{\beta} = A \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = b$$

— верные матричные равенства. Пусть $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Образуем вектор-столбец по правилу

$$\mu \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + (1 - \mu) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}. \tag{5.3}$$

[1]Здесь и далее $|A|$ — число элементов во множестве A.

Покажем, что такой вектор-столбец при любом $\mu \in [0,1]$ является решением системы линейных уравнений.

$$
\begin{aligned}
&A\left(\mu\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + (1-\mu)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\right) \overset{\text{дистр.зак.}}{=}\\
&= A\left(\mu\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right) + A\left((1-\mu)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}\right) =\\
&= \mu A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + (1-\mu)A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \left(\text{т. к. } A\overline{\alpha}=b, A\overline{\beta}=b\right) =\\
&= \mu b + (1-\mu)b = (\mu + (1-\mu))\, b = 1\cdot b = b,
\end{aligned}
$$

но тогда мы показали, что множество $R\left((A|b)\right)$ содержит в себе бесконечное подмножество решений вида (5.3), а значит является бесконечным множеством. ▶

Определение 5.2. *Системы линейных уравнений $A_1x = b_1$ и $A_2x = b_2$ называют равносильными (и пишут $A_1x = b_1 \simeq A_2x = b_2$ или $(A_1|b_1) \simeq (A_2|b_2)$), если $R\left((A_1|b_1)\right) = R\left((A_2|b_2)\right)$.*

Процесс решения системы линейных уравнений — это цепочка переходов от исходной системы к равносильным такой, что для последней в цепочке системы линейных уравнений можно найти множество решений, но тогда согласно определению 5.2 это будет и множеством решений исходной системы.

5.2. Равносильные преобразования СЛУ

Выделим три типа преобразований систем линейных уравнений:

1. Перемена местами i–го и j-го уравнений. (Условная запись этого преобразования $c_i := c_j$, $c_j := c_i$[2]).

2. Умножение i–го уравнения системы на число, отличное от нуля и прибавление к нему j–го уравнения, умноженного на число, отличное от нуля ($c_i := \alpha c_i + \beta c_j$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$).

[2]Так как в матричной записи естественнее говорить о строках матрицы, мы i–е уравнение системы обозначим не y_i, а c_i.

Преобразования типа 1–2 называют *гауссовыми* в честь Карла Ф. Гаусса[3].

Теорема 5.3. *Если система линейных уравнений* $(A_1|b_1)$ *получена из системы линейных уравнений* $(A|b)$ *путем конечного числа последовательного применения гауссовых преобразований, то* $(A|b) \simeq (A_1|b_1)$.

◀ Для доказательства теоремы достаточно показать, что любое из преобразований 1–3 дает равносильную систему. Последнее очевидно ($\Leftrightarrow$ предоставляется читателю проделать самостоятельно (указание: легко показать, что $R\left((A_1|b_1)\right) \subset R\left((A|b)\right)$, а затем воспользоваться обратимостью гауссовых преобразований)). ▶

5.3 Метод исключения неизвестных (Метод Гаусса)

Сейчас мы познакомимся с основным методом решения систем линейных уравнений, формализация которого принадлежит К. Гауссу, благодаря чему этот метод носит его имя. Как вы увидите в дальнейшем, на этом методе основаны почти все алгоритмы линейной алгебры.

Сам метод обладает двумя важнейшими чертами — он процедурен и рекурсивен.

Процедурность означает, что в методе выделена некоторая последовательность однотипных шагов (процедура исключения неизвестного), а рекурсивность означает, что процедура последовательно применяется к исходной системе, результату применения процедуры и т. д. Выход из этой цепочки происходит автоматически, когда применение процедуры становится невозможным.

Процедура исключения неизвестного. В системе линейных уравнений определяется уравнение, в котором есть неизвестное с ненулевым коэффициентом, это уравнение объявляется ведущим, а неизвестное, подлежащее исключению, — главным. Ведущее уравнение с

[3]Иоганн Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — немецкий математик, астроном, физик, геодезист. Работы Гаусса оказали существенное влияние на дальнейшее развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории электричества и магнетизма. В алгебре Гауссу принадлежит основная теорема алгебры о существовании корней у многочлена. Значителен вклад Гаусса в общую теорию рядов (гипергеометрические ряды). Гауссу принадлежит и замечательный результат в теории поверхностей о том, что гауссова кривизна поверхности не меняется при ее изгибании.

помощью преобразования 1 ставится на первое место, а затем с помощью ведущего уравнения преобразованиями типа 2 главное неизвестное исключается из остальных уравнений.

П 5.2

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ -6x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 3 \end{cases}$$

Выберем главным неизвестным x_1 и ведущим уравнением — 2–е и произведем следующие преобразования системы:

$$\begin{aligned} &c_1 := c_2 \\ &c_2 := c_1 + (-2c_2) \\ &c_3 := c_3 + \quad 6c_2 \\ &c_4 := c_4 + (-2c_2) \end{aligned}$$

Тогда равносильная система уравнений будет иметь вид

$$\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 1 \\ 0x_1 - 5x_2 - \ \ x_3 = 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 0x_3 = 4 \\ 0x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Затем

$$\text{СЛУ} := \text{СЛУ} \setminus \{\text{уравнение } 1\}. \tag{5.4}$$

Процесс применения процедуры исключения обрывается за конечное число шагов, так как число уравнений и неизвестных конечно, а ведущие уравнения и главные неизвестные предыдущих шагов выбывают из рассмотрения на каждом следующем шаге (см. соотношение (5.4)).

В процессе исключения неизвестных одновременно с исключением одного неизвестного из уравнения может исключиться сразу несколько неизвестных (как в уравнении 3 примера 5.2) или сразу все неизвестные. Если в уравнении исключились все неизвестные, то, возможно, оно имеет вид:

а) $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \ = \ 0.$

б) $0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \ = \ b'_j, \quad b'_j \neq 0.$

В случае а) уравнение превратилось в тождество и его можно опустить в системе линейных уравнений, в случае б) уравнение превратилось в неверное числовое равенство, что означает несовместность системы.

Обозначим через m_1 число неизвестных, оставшихся в системе линейных уравнений после прекращения работы процедуры исключения в случае совместной системы. Ясно, что $m_1 \leqslant n$ (n —число неизвестных). В случае, когда $m_1 = n$, последнее уравнение содержит одно неизвестное с ненулевым коэффициентом и с точностью до нумерации неизвестных система имеет вид:

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + \quad \cdots & = b'_1 \\ 0 \cdot x_1 + a'_{22}x_2 + \quad \cdots & = b'_2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots & = b'_3 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots \qquad \cdots & \cdots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n & = b'_n \end{cases} \tag{5.5}$$

где $a_{ii} \neq 0$.

Тогда

$$x_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}},$$

подставляя в предыдущее уравнение,

$$x_{n-1} = \frac{b'_{n-1} - a'_{n-1\ n}x_n}{a'_{n-1\ n-1}}$$

и т. д., мы определим значение всех неизвестных. Итак, в случае $m_1 = n$ система линейных уравнений совместная и определенная.

В случае $m_1 < n$ мы можем из оставшихся уравнений выразить m_1 главных неизвестных, через остальные $n - m_1$, которые могут принимать произвольные значения (такие неизвестные называют свободными). Формулы, выражающие главные неизвестные через свободные, называют общим решением системы. Таким образом, в этом случае система линейных уравнений совместная и неопределенная.

5.4 Решение матричных уравнений методом Гаусса

В этом небольшом параграфе мы рассмотрим простейшие матричные уравнения:

$$A \cdot X = B, \tag{5.6а}$$

$$X \cdot A = B, \tag{5.6б}$$

$$A \cdot X \cdot B = C. \tag{5.6в}$$

Здесь A, B, C — заданные матрицы, X — неизвестная матрица.

Заметим, что уравнения (5.6а) сводится к виду (5.6б) с помощью транспонирования. Уравнение (5.6в) в случае, когда одна из матриц A, B обратима сводится к уравнению (5.6а) или (5.6б):

$$AX = XB^{-1} \quad \text{или} \quad XB = A^{-1}C.$$

В силу сказанного мы основное внимание уделим уравнениям вида (5.6а), тем более, что и задача нахождения обратной матрицы равносильна решению уравнения такого типа

$$A \cdot X = E. \tag{5.7}$$

Из правила умножения матриц получаем, что j–й столбец неизвестной матрицы X в уравнении (5.6а) является решением СЛУ вида[4]

$$A\overline{x} = (B)_{\square j}, \tag{5.8}$$

т. е. для нахождения столбцов неизвестной матрицы X мы получили набор СЛУ с одной и той же матрицей коэффициентов — матрицей A. Этот набор СЛУ (5.8) можно решать методом Гаусса одновременно. Компактно его записывают в виде:

$$(A|\ B\ )\,. \tag{5.9}$$

Если с помощью гауссовых преобразований мы перейдем от системы (5.9) к равносильной системе вида

$$(E|\ B'\ )\,, \tag{5.10}$$

то матрица B' и будет единственным решением исходного матричного уравнения.

В общем случае матричные СЛУ вида (5.9), как и обычные СЛУ, могут быть несовместными, совместными определенными и неопределенными. Продемонстрируем это на примерах.

$\boxed{\text{П}}$ **5.3** Решить уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[4]Здесь через $(B)_{\square j}$ обозначен j–столбец матрицы B.

◀ Составим матричную СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \underset{c_2:=c_2+(-2)c_1}{\overset{c_1:=c_1}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \underset{c_2:=-1/3c_2}{\overset{c_1:=c_1}{\sim}}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{c_2:=c_2}{\overset{c_1:=c_1+(-1)c_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Ответ: матричное уравнение имеет единственное решение:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \qquad ▶$$

$\boxed{\text{П}}$ **5.4** Решить уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

◀ Применим к исходному уравнению операцию транспонирования:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перейдем к матричной СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{c_3:=c_3+(-2)c_1}{\overset{\substack{c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2+(-1)c_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\underset{c_3:=c_3+(-1)c_2}{\overset{\substack{c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Анализ последней строки полученной матричной СЛУ показывает, что она несовместна.
Ответ: Матричное уравнение не имеет решений. ▶

$\boxed{\text{П}}$ **5.5** Решить уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Выпишем матричную СЛУ и применим к ней метод Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & -2 \end{array}\right) \underset{c_3:=c_3+(-2)c_1}{\overset{\substack{c_1:=c_1 \\ c_2:=c_2+(-1)c_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{c_3:=c_3+(-1)c_2}{\overset{\substack{c_1:=c_1+1/3c_2 \\ c_2:=1/3c_2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ответ: матричная СЛУ имеет бесконечное множество решений. Общее решение имеет вид:

$$X = \begin{pmatrix} (1-a) & (1-b) & (1-c) & -(1+d) \\ a & (1+b) & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix},$$

где a, b, c, $d \in \mathbb{R}$. ▶

Контрольные вопросы и задания

1. Решите самостоятельно уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. В этой главе изложен метод Гаусса, при котором неизвестные исключаются в нижестоящих уравнениях. Существует вариант метода (метод полного исключения), когда неизвестные исключаются из всех уравнений, кроме одного (см. пример 5.3).
3. Примените метод Гаусса в обоих его вариантах (см. вопрос 2) к примеру 5.2.
4. Возможно ли путем добавления уравнений в систему превратить:
   а) совместную систему в несовместную?
   б) несовместную систему в совместную?
   в) неопределенную систему в определенную?
   г) определенную систему в неопределенную?

VI

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

6.1. Перестановки и подстановки

Определение 6.1. *Перестановкой длины n называется матрица-строка длины n, элементами которой являются натуральные числа $1, 2, \ldots, n$, причем каждые из них встречаются в перестановке по одному разу.*

Для перестановки длины n приняты обозначения $P = (P(1)\ P(2)\ \ldots\ P(n))$, т. е. $P(i)$ — элемент, стоящий в перестановке на i–м месте. Множество перестановок длины n будем обозначать $\mathcal{P}_n$.

$\boxed{\text{П}}$ **6.1** $\mathcal{P}_3 \;=\; \{(123); (132); (213); (231); (312); (321)\}.$

Теорема 6.1.

$$|\mathcal{P}_n| \;=\; n!, \tag{6.1}$$

где $n! \overset{\text{def}}{=} 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n.$

◀ Доказательство проведем по индукции (параметр индукции n).

Шаг 1. $n = 1$. Ясно, что $\mathcal{P}_1 = \{(1)\}$. $|\mathcal{P}_1| = 1 = 1!$.

Индуктивный переход. Пусть формула (6.1) верна для n_0, покажем, что она верна и для n_0+1. Множество всех перестановок длины n_0+1 разобьем на непересекающиеся подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_{n_0+1}$ по правилу $P \in A_i \iff P(i) = n_0 + 1$. Тогда

$$|\mathcal{P}_{n_0+1}| \;=\; \sum_{i=1}^{n_0+1} |A_i|. \tag{6.2}$$

Покажем, что

$$|A_i| \;=\; |\mathcal{P}_{n_0}|. \tag{6.3}$$

Действительно, если в любой перестановке $p \in A_i$ вычеркнуть элемент $P(i)(n_0+1)$, мы получим перестановку P' из множества $\mathcal{P}_{n_0}$, причем, если $p \neq q$ $(p, q \in A_i)$, то $p' \neq q'$. И если взять произвольную перстановку $p' \in P_{n_0}$, то, положив

$$P(j) = \begin{cases} P(j), & j < i, \\ n_0+1, & j = i, \\ P(j-1), & i < j \leqslant n_0+1, \end{cases} \tag{6.4}$$

мы получим $p \in A_i$. Тем самым мы показали, что между множествами A_i и $\mathcal{P}_{n_0}$ существует взаимно-однозначное соответствие, тогда (6.3) доказано.

Подставляя (6.3) в (6.2) и пользуясь предположением индукции, получаем

$$|\mathcal{P}_{n_0+1}| = \sum_{i=1}^{n_0+1} |A_i| = \sum_{i=1}^{n_0+1} |\mathcal{P}_{n_0}| = \sum_{i=1}^{n_0+1} n_0! = n_0! \cdot (n_0+1) = (n_0+1)! \blacktriangleright$$

Определение 6.2. *Говорят, что пара индексов $1 \leqslant i < j \leqslant n$ образует инверсную пару в перестановке P, если $P(i) > P(j)$. Обозначим через $\sigma(P)$ — число всех инверсных пар в перестановке P, а через $\varepsilon(P) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\sigma(P)}$. Характеристика $\varepsilon(P)$ называется сигнатурой (или знаком) перестановки.*

$\boxed{\text{П}}$ **6.2** $P = (2143)$; $\sigma(P) = 2$ (инверсные пары $(1,2)$ и $(3,4)$). $\varepsilon(P) = (-1)^2 = 1$.

Определение 6.3. *Перестановка P называется четной, если $\varepsilon(P) = 1$, нечетной, если $\varepsilon(P) = -1$.*

Теорема 6.2. *Во множестве $\mathcal{P}_n$ $(n \geqslant 2)$ половину составляют четные перестановки, половину — нечетные.*

$\blacktriangleleft$ Ясно, что

$$\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \bigcup \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}} \tag{6.5}$$

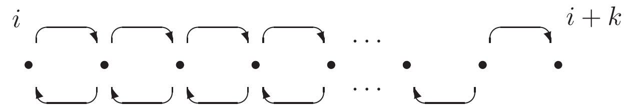
и множества $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ и $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$ попарно непересекаются. Рассмотрим отображение $f : \mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \to \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$ по правилу

$$(f(P))(i) = \begin{cases} P(2), & \text{если } i = 1, \\ P(1), & \text{если } i = 2, \\ P(i), & \text{если } 2 < i \leqslant n. \end{cases}$$

Такое отображение действительно действует из $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ в $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$, так как оно либо рождает новую инверсную пару $(1,2)$, либо уничтожает инверсную пару $(1,2)$. Ясно, что отображение f действует взаимно однозначно из $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}$ в $\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}$, тогда $|\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}}| = |\mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}}|$ и, учитывая (6.5) и $\mathcal{P}_{n_{\text{чет}}} \cap \mathcal{P}_{n_{\text{нечет}}} = \varnothing$, получаем требуемое. ▶

Теорема 6.3. *Если в перестановке поменять местами любые два элемента, знак перестановки изменится на противоположный.*

◀ Если эти элементы — соседние $(i, i+1)$ и были инверсной парой $P(i) > P(i+1)$, то после перестановки $(i, i+1)$ не является инверсной парой $P'(i) = P(i+1) < P(i) = P'(i+1)$. Наоборот, если $(i, i+1)$ в перестановке P не является инверсной парой, то $(i, i+1)$ в перестановке P' — инверсная пара. Если меняются местами не соседние элементы, то это сводится к нечетному числу последовательных перестановок «соседей» (см. схему ниже).



$2k-1$ перестановок соседей

Каждая перестановка соседних элементов меняет знак перестановки, тогда нечетное число таких перестановок меняет знак исходной перестановки. ▶

Выпишем матрицу $\Pi = \binom{p}{q} \in M_{2\times n}$, каждая строка которой p, q — перестановка длины n. Если ее рассмотреть как табличное задание некоторой функции: верхняя строка — перечисление значений аргумента, нижняя строка — перечисление соответствующих значений функции, тогда такая матрица задает отображение отрезка натурального ряда $[1;n]_N$ в себя, причем это отображение взаимно–однозначное ($\Leftrightarrow$ биективное).

Определение 6.4. *Подстановками длины n называют биективные отображения множества $[1;n]_N$ в себя.*

Таким образом, матрица $\Pi = \binom{p}{q}$ $p, q \in \mathcal{P}_n$ способ задания подстановки. Если в матрице $\binom{p}{q}$ поменять местами столбцы, то подстановка как отображение не изменится. Переставляя столбцы в подстановке, мы от произвольного ее задания $\Pi = \binom{p}{q}$ можем перейти к стандартному $\Pi = \binom{e}{q'}$, где $e = (1\ 2\ \dots\ n)$ или $\Pi = \binom{p'}{e}$. Таким образом, каждая подстановка единственным образом представима в виде $\Pi = \binom{e}{q}$, где $q \in \mathcal{P}_n$. Мы, фактически, доказали теорему:

Теорема 6.4. $|\Pi_n| = n!$, *где* Π_n — *множество всех подстановок длины* n.

◀ Стандартный вид подстановки $\Pi = \binom{e}{q}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множеством Π_n и $\mathcal{P}_n$, тогда

$$|\Pi_n| = |\mathcal{P}_n| \overset{\text{теор. } 6.2}{=} n! \qquad ▶$$

Определение 6.5. *Пусть* $\Pi \in \Pi_n$. *Сигнатурой подстановки* Π *называют характеристику*

$$\varepsilon(\Pi) \overset{\text{def}}{=} (-1)^{\sigma(p)+\sigma(q)} = (-1)^{\sigma(p)} \cdot (-1)^{\sigma(q)} = \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q),$$

где $\Pi = \binom{p}{q}$.

Мы должны показать корректность этого определения, т. е. его независимость от конкретного представления подстановки парой перестановок.

◀ Действительно, переход от одного представления к другому — это последовательная перемена местами двоек столбцов, такая перемена одновременно меняет знаки сигнатур перестановок p', q', но не меняет значения произведения сигнатур. ▶

Определение 6.6. *Пусть* $\Pi_1, \Pi_2 \in \Pi_n$. *Композицией подстановок* Π_1, Π_2 *называется подстановка, обозначаемая* $\Pi_2 \circ \Pi_1$ *и определяемая как композиция отображений (первым действует* Π_1, *вторым —* Π_2*).*

Замечание. Ясно, что композиция легко вычисляется, когда для подстановок Π_1 и Π_2 хорошо выбраны их представления, а именно, если $\Pi_1 = \binom{p}{e}$; $\Pi_2 = \binom{e}{q}$, то $\Pi_2 \circ \Pi_1 = \binom{p}{q}$

$\boxed{\Pi}$ **6.3** Пусть

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\Pi_2 \circ \Pi_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \Pi_1 \circ \Pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Попутно мы доказали, что композиция подстановок (ясно, что при $n \geqslant 3$) не коммутативна.

Теорема 6.5. *Если* $\Pi_1, \Pi_2 \in \Pi_n$, *то*

$$\varepsilon(\Pi_2 \circ \Pi_1) = \varepsilon(\Pi_2) \circ \varepsilon(\Pi_1). \tag{6.6}$$

◀ Пусть $\Pi_1 = \binom{p}{e}$, $\Pi_2 = \binom{e}{q}$, тогда по замечанию $\Pi_2 \circ \Pi_1 = \binom{p}{q}$, и значит

$$\begin{aligned} &\varepsilon(\Pi_2 \circ \Pi_1) \overset{\text{Опр. 6.5}}{=} \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(q) = \varepsilon(p) \cdot \varepsilon(e) \cdot \varepsilon(e) \cdot \varepsilon(q) = \\ &= (\varepsilon(p) \cdot \varepsilon(e)) (\varepsilon(e) \cdot \varepsilon(q)) \overset{\text{Опр. 6.5}}{=} \varepsilon(\Pi_1) \cdot \varepsilon(\Pi_2) = \varepsilon(\Pi_2) \cdot \varepsilon(\Pi_1). \end{aligned}$$ ▶

6.2. Определители

Определение 6.7. *Пусть* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *определителем матрицы* A *называется число, обозначаемое* $\det A$ (ΔA, dA, $|A|$), *определяемое следующим равенством:*

$$\det A = \sum_{\Pi = \binom{p_1}{p_2} \in \Pi_n} \varepsilon(\Pi)(A)_{P_1(1)P_2(1)}(A)_{P_1(2)P_2(2)} \cdots (A)_{P_1(n)P_2(n)}. \tag{6.7}$$

Замечания:

- Дополнительно подчеркнем, что понятие «определитель» вводится только для квадратной матрицы.
- В правой части (6.7) — $n!$ слагаемых (см. теорему 6.4).

Дадим еще два эквивалентных определения определителя.

Определение 6.8. *Пусть* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Определителем матрицы* A *называется число, обозначаемое* $\det A$ *и определяемое следующим равенством*

$$\det A = \sum_{P \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(P)(A)_{1P(1)}(A)_{2P(2)} \ldots (A)_{nP(n)}. \tag{6.8}$$

Определение 6.9. *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Определителем матрицы A называется число, обозначаемое* $\det A$ *и определяемое следующим равенством*

$$\det A = \sum_{P\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(P)(A)_{P(1)1}(A)_{P(2)2}\dots(A)_{P(n)n}. \qquad (6.9)$$

Докажем эквивалентность этих определений.

◀ В определении 6.7 для подстановок Π будем использовать только стандартное представление $\Pi = \binom{e}{p}$, тогда

$$(\det A)_{6.7} = \sum_{\Pi=\binom{e}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(\Pi)(A)_{e(1)p(1)}(A)_{e(2)p(2)}\dots(A)_{e(n)p(n)} =$$
$$= \sum_{\Pi=\binom{e}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(e)\varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} = (\det A)_{6.8}\,.$$

Аналогично доказывается, что определения 6.7 эквивалентно определению 6.9. ▶

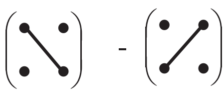
$\boxed{\Pi}$ **6.4** Найдем общее правило вычисления определителей матриц размера 2×2.

$$\mathcal{P}_2 = \{(12);\ (21)\}; \quad \varepsilon\left((12)\right) = 1, \quad \varepsilon\left((21)\right) = -1,$$

тогда

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \overset{\text{Опр. 6.8}}{=} \varepsilon\left((12)\right)a_{11}a_{22} + \varepsilon\left((21)\right)a_{12}a_{21} =$$
$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Мнемонически это правило записывается так

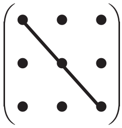
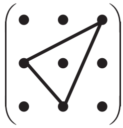
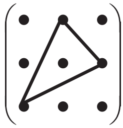
$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = +$  .

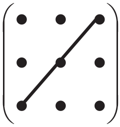
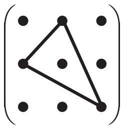
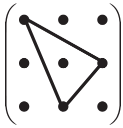
Значит,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{pmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = 4 - 6 = -2.$$

? Докажите самостоятельно, что

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ q_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

 +  +  -

-  -  -  =

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - $$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Значит,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 45 + 84 + 96 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

6.3. Свойства определителей

Определители матриц имеют чрезвычайно интересные свойства. Прежде чем их сформулировать, введем обозначения:

$(A)_{i\square}$ — i–я строка матрицы A.

$(A)_{\square j}$ — j–й столбец матрицы A.

$A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{k\square}$ — матрица, полученная из матрицы A заменой ее i–ой строки на k–тую строку матрицы B.

$A \overset{\square j}{\leftarrow} (B)_{\square s}$ — матрица, полученная из матрицы A заменой ее j–го столбца на s–й столбец матрицы B.

Перейдем теперь к свойствам определителей:

0°. $\det A = \det A^t$.

◀

$$\det A \overset{\text{Опр. 6.8}}{=} \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots(A)_{np(n)} =$$

$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A^t)_{1p(1)}(A^t)_{2p(2)}\dots(A^t)_{np(n)} \overset{\text{Опр. 6.9}}{=} \det(A^t).$$ ▶

Т. к. при транспонировании матрицы строки и столбцы меняются «ролями», то свойство $0°$ называют еще равноправием строк и столбцов матрицы в формировании свойств определителя. Поэтому, доказав какое–то свойство определителя относительно строк матрицы, мы автоматически доказываем аналогичное свойство относительно столбцов матрицы.

$1°$. Если одна из строк (один из столбцов) матрицы — нулевая (нулевой), то определитель такой матрицы равен 0.

◀ Пусть i–я строка матрицы A нулевая ($\Leftrightarrow A_{ij} = 0,\ 1 \leqslant j \leqslant n$), тогда

$$\det A = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p) A_{1p(1)} \dots A_{i-1\,p(i-1)} A_{i\,p(i)} A_{i+1\,p(i+1)} \dots A_{np(n)} = \overset{A_{i\,p(i)}=0}{=} \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p) \cdot 0 \ = \sum_{p \in \mathcal{P}_n} 0 \ = \ 0. \quad ▶$$

$2°$. Пусть матрица B получена из матрицы A умножением ее i–той строки (столбца) на число α, т. е. $B = A \overset{i\Box}{\leftarrow} \alpha(A)_{i\Box}$, тогда

$$\det B \ = \ \alpha \det A. \tag{6.10}$$

◀

$$\begin{aligned} \det B = &\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p) B_{1p(1)} \dots B_{i-1\,p(i-1)} B_{i\,p(i)} B_{i+1\,p(i+1)} \dots \\ \dots B_{np(n)} = &\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p) (A)_{1p(1)} \dots (A)_{i-1\,p(i-1)} \times \\ &\times \alpha (A)_{i\,p(i)} (A)_{i+1\,p(i+1)} \dots (A)_{np(n)} \ = \\ &= \alpha \sum_{p \in \mathcal{P}_n} \varepsilon(p) (A)_{1p(1)} (A)_{2p(2)} \dots (A)_{np(n)} = \alpha \det A. \quad ▶ \end{aligned}$$

Следствие. Если $A \in M_{n\times n}$ и $B = \alpha A$, то

$$\det B \ = \ \alpha^n \det A. \tag{6.11}$$

◀ Нужно применить свойство $2°$ последовательно по каждой из n строк матрицы A. ▶

3°. Если матрица $B \in M_{n\times n}$ получена из матрицы A с помощью перестановки ω ($\omega \in \mathcal{P}_n$) ее строк (столбцов), т. е. $B_{i\Box} = (A)_{\omega(i)\Box}$, $i = 1, 2 \ldots, n$, то
$$\det B \;=\; \varepsilon(\omega)\;\det A. \tag{6.12}$$

◀

$$\begin{aligned}
&\det B \;=\; \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(B)_{1p(1)}B_{2p(2)}\ldots B_{np(n)} \;= \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} \;= \\
&= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)\varepsilon^2(\omega)(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} = \\
&= \varepsilon(\omega) \sum_{\Pi=\binom{\omega}{p}\in\Pi_n} \varepsilon(\Pi)\cdot(A)_{\omega(1)p(1)}(A)_{\omega(2)p(2)}\ldots(A)_{\omega(n)p(n)} = \\
&= \varepsilon(\omega)\;\det A.
\end{aligned}$$
▶

Следствие. Если в матрице поменять местами две строки (два столбца), то знак определителя изменится на противоположный.

◀ Очевидно, следует из свойства 3°, так как сигнатура подстановки, меняющей местами две позиции, равна -1. ▶

4°. Если в матрице имеются две одинаковые строки (два одинаковых столбца), то определитель такой матрицы равен нулю. ◀

Пусть $(A)_{i\Box} = (A)_{j\Box}$. Образуем матрицу A' из матрицы A, поменяв местами i–ю и j–ю строки, т. е.
$$A' \;=\; A \begin{array}{c} \overset{i\Box}{\longleftarrow} \\ \overset{j\Box}{\longleftarrow} \end{array} \begin{array}{c} (A)_{j\Box} \\ (A)_{i\Box} \end{array}. \tag{6.13}$$

Ясно, что $A' = A$ и значит $\det A' = \det A$. С другой стороны по вышедоказанному следствию мы получаем, что
$$\det A' \;=\; -\det A. \tag{6.14}$$

Из (6.13) и (6.14) следует, что
$$\begin{aligned}
&\det A \;=\; -\det A \quad\Longrightarrow\quad 2\det A \;=\; 0 \quad\Longrightarrow \\
&\Longrightarrow\quad \det A \;=\; 0.
\end{aligned}$$
▶

5°. Если в матрице есть пропорциональные строки (столбцы), то определитель такой матрицы равен нулю.

◀ Пусть $(A)_{j\square} = \alpha(A)_{i\square}$, тогда

$$\det A \overset{\text{св-во } 2}{=} \alpha \det\left(A \overset{j\square}{\leftarrow} (A)_{i\square}\right) = $$
$$= \alpha \det\begin{pmatrix} \text{матрицы, у которой } i - \text{я и} \\ j - \text{я строки совпадают} \end{pmatrix}$$
$$\overset{\text{св-во } 4}{=} \alpha \cdot 0 = 0. \quad ▶$$

6°. Если строка (столбец) матрицы являются суммой двух матриц-строк (матриц-столбцов), то определитель такой матрицы равен сумме определителей двух матриц, первая из которых получена из исходной матрицы подстановкой вместо строки суммы первого слагаемого, а вторая — подстановкой вместо строки суммы второго слагаемого, т. е. если $(A)_{i\square} = (B)_{i\square} + (C)_{i\square}$, то

$$\det A = \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{i\square}\right) + \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (C)_{i\square}\right)$$

◀

$$\det A = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p) A_{1p(1)} \ldots A_{i-1\,p(i-1)} \cdot$$
$$\cdot \left((B)_{ip(i)} + (C)_{ip(i)}\right)(A)_{i+1\,p(i+1)} \ldots (A)_{np(n)} =$$
$$= \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p) A_{1p(1)} \ldots A_{i-1\,p(i-1)} (B)_{ip(i)} (A)_{i+1\,p(i+1)} \ldots (A)_{np(n)} +$$
$$+ \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p) A_{1p(1)} \ldots A_{i-1\,p(i-1)} (C)_{ip(i)} (A)_{i+1\,p(i+1)} \ldots (A)_{np(n)} =$$
$$= \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (B)_{i\square}\right) + \det\left(A \overset{i\square}{\leftarrow} (C)_{i\square}\right) \quad ▶$$

Прервем изучение свойств определителя и рассмотрим важное понятие — линейная комбинация. Пусть O — некоторое множество, называемое множеством объектов, $Ч$ — некоторое числовое множество (как правило $Ч = \mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}$) и пусть на O определена бинарная операция сложения $\oplus$ с ее естественными свойствами и операция умножения объекта на число. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in Ч$, $O_1, O_2, \ldots O_k \in O$.

Определение 6.10. *Линейной комбинацией объектов O_1, O_2, ..., O_k с коэффициентами α_1, α_2,..., α_k называется объект, определяемый формулой*

$$\alpha_1 O_1 \oplus \alpha_2 O_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_k O_k = \oplus \sum_{i=1}^{k} \alpha_i O_i.$$

$\boxed{\text{П}}$ **6.5** $O = M_{1\times 3}(\mathbb{R})$, $Ч = \mathbb{R}$, $O_1 = (1,-1,1)$, $O_2 = (1,1,0)$, $O_3 = (-2,0,1)$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = -2$; $\alpha_3 = -1$; тогда

$$1\cdot(1,-1,1)+(-2)\cdot(1,1,0)+(-1)\cdot(-2,0,1) = (1,-3,0).$$

Замечание. Если объект является линейной комбинацией объектов O_1, O_2, ..., O_k, то он является и линейной комбинацией любого множества объектов, содержащих объекты $O_1, O_2, \ldots, O_k$. Действительно, в линейную комбинацию можно добавить новые объекты с нулевыми коэффициентами.

Теперь можно рассмотреть еще одно свойство определителей:

7°. Если в матрице какая-либо строка (столбец) является линейной комбинацией матриц-строк (столбцов), то определитель такой матрицы равен линейной комбинации определителей матриц, полученных подстановкой вместо строки комбинации (столбца комбинации) комбинируемых строк (комбинируемых столбцов) с коэффициентами исходной линейной комбинации.

◀ Линейная комбинация — это сложение и умножение на числа. Свойство об определителе матрицы, полученной из матрицы умножением её строки на число (свойство 2°) и свойство об определителе матрицы, у которой строка является суммой матриц строк (свойство 6°) уже доказаны. ▶

6.4. Миноры и алгебраические дополнения

Определение 6.11. *Пусть $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \geq 2)$ и пусть $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Минором позиции i,j матрицы A называется определитель матрицы, полученной из A вычеркиванием i–ой строки и j–го столбца. Он обозначается $M_{ij}(A)$.*
Алгебраическим дополнением позиции i,j матрицы A называется число $A\mathcal{D}_{ij}(A)$, определенное равенством

$$A\mathcal{D}_{ij}(A) \;=\; (-1)^{i+j}M_{ij}(A). \tag{6.15}$$

$\boxed{\text{П}}$ **6.6**

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$$
$$M_{21}(A) \;=\; \det\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 8 & 9\end{pmatrix} \;=\; 18-24 \;=\; -6;$$
$$A\mathcal{D}_{21}(A) \;=\; (-1)^{2+1}(-6) \;=\; 6.$$

Приведем еще одно свойство определителей:

8°. Если в матрице существует строка (столбец), все элементы которой (которого) за исключением одного равны 0, то определитель такой матрицы равен произведению этого элемента на алгебраическое дополнение позиции этого элемента.

◀ Будем сначала считать, что эта строка — последняя и этот элемент — последний (позиция nn).

$$\det A = \sum_{p\in\mathcal{P}_n} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots A_{np(n)}.$$

Так как $(A)_{np(n)} = 0$, если $p(n) \neq n$, то

$$\det A = \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}_n\\ p(n)=n}} \varepsilon(p)(A)_{1p(1)}(A)_{2p(2)}\dots A_{np(n)}.$$

Каждой перестановке $p \in \mathcal{P}_n$, удовлетворяющей условию $p(n) = n$, поставим в соответствие перестановку $p' \in \mathcal{P}_{n-1}$ по правилу $p'(i) = p(i)$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, ясно, что $\varepsilon(p') = \varepsilon(p)$, тогда, продолжая выкладку, получим

$$\det A = A_{nn}\left(\sum_{p'\in\mathcal{P}_{n-1}} \varepsilon(p')(A)_{1p'(1)}(A)_{2p'(2)}\dots A_{n-1\,p'(n-1)}\right) =$$
$$= (A)_{nn}\cdot M_{nn}(A) = (A)_{nn}(-1)^{n+n}M_{nn}(A) = (A)_{nn}\cdot\mathcal{D}_{nn}(A).$$

Общий случай (позиции ij) сводится к этому последовательными перестановками i–строки с $i+1$–ой, $i+1$–ой с $i+2$–ой и т. д. и j–го столбца с $j+1$–ым, $j+1$–го с $j+2$–м и т. д.

$$\begin{pmatrix} & & j & \curvearrowright & \curvearrowright & \dots & \curvearrowright \\ & & & & & & \\ & i & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ & \dots & & & & & \\ & \searrow & & & & & \end{pmatrix},$$

тогда, чтобы перейти от позиции i, j к позиции n, n, придется сделать $n-i+n-j$ перестановок. Полученную матрицу обозначим A'. Тогда

$$\det A = (-1)^{2n-(i+j)}\det A' = (-1)^{i+j}(A')_{nn}A\mathcal{D}_{nn}(A') =$$
$$= (A)_{ij}\cdot A\mathcal{D}_{ij}(A). \qquad ▶$$

Это свойство иногда называют малой теоремой Лапласа[1].

9°. *(Теорема Лапласа)* Определитель матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ равен сумме произведений элементов любой его строки (столбца) на алгебраические дополнения их позиций, т. е.

$$\det A \;=\; \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} \cdot A\mathcal{D}_{ij}(A). \tag{6.16}$$

◀ Представим i–ю строку матрица A в виде суммы строк

$$(A_{i1}A_{i2}\ldots A_{in}) = (A_{i1}0\ldots 0) + (0A_{i2}\ldots 0) + \cdots + (0\,0\ldots A_{in}).$$

Применим теперь свойство о строке–сумме и предыдущее свойство. ▶

10°. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ $(n \geqslant 2)$ на алгебраические дополнения позиций другой (другого) строки (столбца) равна нулю, т. е.

$$\sum_{\substack{k=1\\ i\neq j}}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A) \;=\; 0.$$

◀ Образуем матрицу $A' = A \overset{j\square}{\leftarrow} (A)_{i\square}$. У этой матрицы две одинаковые строки (i–я и j–я), тогда

$$\det A' \;=\; 0 \qquad \text{по свойству}\, 0^\circ,$$

а по теореме Лапласа (применяемой к ее j–ой строке) имеем

$$0 \;=\; \det A' \;=\; \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A') \;=\; \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} A\mathcal{D}_{jk}(A). \qquad ▶$$

---

[1] Лаплас Пьер Симон (1749–1827) — французский математик, физик, астроном, член Парижской АН (1785). Ему принадлежат фундаментальные работы по теории уравнений в частных производных (⇔ уравнениям математической физики), в том числе по уравнению, получившему его имя. Уравнение и оператор Лапласа — основа теории потенциала, теплопроводности, электростатики и гидродинамики. Лаплас занимался задачами теории вероятностей (теоремы сложения и умножения, понятие производящей функции, математического ожидания), теплопроводности, теплового расширения, горения, электродинамики, классической механики.

11°. *(Критерий равенства нулю определителя.)* Для того, чтобы определитель матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $n \leqslant 2$ был равен 0, необходимо и достаточно, чтобы в ней существовала строка (столбец) — линейная комбинация остальных.

◀ Достаточность этого условия доказывается легко. Пусть $(A)_{i\square} = \alpha_1(A)_{1\square} + \cdots + \alpha_{i-1}(A)_{i-1\ \square} + \alpha_{i+1}(A)_{i+1\ \square} + \cdots + \alpha_n(A)_{n\square}$. Образуем матрицу A' по правилу

$$A' = A \overset{i\square}{\leftarrow} (A)_{i\square} + (-\alpha_1)(A)_{1\square} + (-\alpha_2)(A)_{2\square} + \cdots + \\ +(-\alpha_{i-1})(A)_{i-1\ \square} + (-\alpha_{i+1})(A)_{i+1\ \square} + \cdots + (-\alpha_n)(A)_{n\square}.$$

Ясно, что i–я строка матрицы A' — нулевая, и её определитель $\det A = \det A' = 0$.

Необходимость этого условия можно доказать с помощью индукции по n. ▶

12°. *(Теорема об определителе произведения квадратных матриц.)* Пусть $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, тогда

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B. \tag{6.17}$$

◀ Обозначим $C = A \cdot B$. Ясно, что правило умножения матриц таково, что

$$(C)_{i\ \square} = A_{i1} \cdot (B)_{1\ \square} + A_{i2} \cdot (B)_{2\ \square} + \ldots A_{in} \cdot (B)_{n\ \square} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} \cdot (B)_{k\square},$$

т. е. i–я строка произведения матриц $A \cdot B$ является линейной комбинацией строк матрицы B, а коэффициентами являются элементы i–й строки матрицы A. Применим к 1–й строке матрицы C свойство 7° определителя

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_1=1}^{n} (A)_{1k_1} \det\left(C \overset{1\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\ \square}\right).$$

Применяя ко 2-й строке матрицы $(C \overset{1\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\ \square})$ то же свойство, получаем:

$$\det(A \cdot B) = \sum_{k_2=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} (A)_{1k_1}(A)_{2k_2} \det\begin{pmatrix} C & \overset{1\square}{\leftarrow} (B)_{k_1\ \square} \\ & \overset{2\square}{\leftarrow} (B)_{k_2\ \square} \end{pmatrix}.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\det(A\cdot B)=\sum_{k_n=1}^{n}\sum_{k_{n-1}=1}^{n}\cdots\cdot\sum_{k_1=1}^{n}(A)_{1k_1}(A)_{2k_2}\dots(A)_{nk_n}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}(B)_{k_1}\ \square\\(B)_{k_2}\ \square\\ \vdots\\(B)_{k_n}\ \square\end{pmatrix}.$$

Под знаком суммы n^n слагаемых, но «большинство» из них заведомо равны нулю, так как в случае, когда в наборе $(k_1k_2\dots k_n)$ есть пары одинаковых элементов, под знаком определителя стоит матрица с двумя одинаковыми строками, и определитель такой матрицы равен нулю. Опустим в сумме такие слагаемые. Наборы индексов $(k_1k_2\dots k_n)$, в которых элементы попарно различны, образуют перестановки. Значит,

$$\det(A\cdot B)=\sum_{\omega\in P_n}A_{1\omega(1)}A_{2\omega(2)}\dots A_{n\omega(n)}\cdots\det\begin{pmatrix}(B)_{\omega(1)}\ \square\\(B)_{\omega(2)}\ \square\\ \vdots\\(B)_{\omega(n)}\ \square\end{pmatrix}=$$
$$=\sum_{\omega\in P_n}A_{1\omega(1)}A_{2\omega(2)}\dots A_{n\omega(n)}\varepsilon(\omega)\det B=$$
$$=\left(\sum_{\omega\in P_n}\omega(n)\cdot A_{1\omega(1)}\dots A_{n\omega(n)}\right)\det B=\det A\cdot\det B.\quad\blacktriangleright$$

6.5. Критерий обратимости матрицы

> **Теорема 6.6.** *Для того чтобы квадратная матрица была обратимой, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

◀ **Необходимость.** Пусть матрица A обратима, тогда $A\cdot A^{-1}=E$. Применим теорему об определителе произведения квадратных матриц

$$1=\det E=\det(A\cdot A^{-1})=\det A\cdot\det A^{-1}\ \Rightarrow$$
$$\det A\neq 0\ \text{ и }\ \det A^{-1}=\tfrac{1}{\det A}\qquad\blacktriangleright$$

◀ **Достаточность.** Образуем матрицу

$$\frac{1}{\det A} \cdot A_{np}, \quad \text{где } (A_{np})_{ij} = A\mathcal{D}_{ji}(A).$$

Покажем, что

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{np}. \tag{6.18}$$

Действительно,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A_{np} = \frac{1}{\det A} \cdot A \cdot A_{np} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = E;$$

$$\frac{1}{\det A} \cdot A_{np} \cdot A = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = E. \blacktriangleright$$

Замечание. $(A \cdot A_{np})_{ii} = \det A$ по свойству 9°, а $(A \cdot A_{np})_{ij} = 0$, если $i \neq j$, по свойству 10°.

Матрица A_{np} называется присоединенной к матрице A.

Теорема 6.7 (Правило Крамера)**.** *Для того, чтобы квадратная система линейных уравнений $Ax = b$ была определенной (совместной, имеющей единственное решение), необходимо и достаточно, чтобы* $\det A \neq 0$, *при этом решение задается формулами Крамера*[1]

$$x_i^0 = \frac{\det\left(A \overset{\square i}{\leftarrow} (b)\right)}{\det A}, \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

◀ **Необходимость.** Так как система определенная, то, применяя метод Гаусса к ней, мы получаем после исключения неизвестных систему

[1]Крамер Габриель (1704–1752) — швейцарский математик, профессор математики и философии, ученик И. Бернулли (первого). Основные работы Г. Крамера относятся к высшей алгебре и аналитической геометрии, заложил основы теории определителей, в том числе — приложение этой теории к решению квадратных систем линейных уравнений (правило Крамера), внес существенный вклад в изучение свойств алгебраических кривых.

$A'x = b'$, где матрица A' с точностью до нумерации столбцов имеет вид

$$\begin{pmatrix} \square & & & & \\ 0 & \square & & & \\ 0 & 0 & \square & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \square \end{pmatrix}$$

$\square$ — обозначение ненулевых элементов. Ясно, что определитель такой матрицы равен произведению элементов, помеченных «$\square$», т. е. не равен нулю. Гауссовы преобразования таковы, что $\det A$ и $\det A'$ равны или не равны нулю одновременно. Значит $\det A \neq 0$. ►

◄ **Достаточность.** Т. к. $\det A \neq 0$, то применение метода Гаусса приводит к матрице A', описанной в «необходимости», а это и означает, что система совместна и имеет единственное решение $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$.

Подставляя его в систему, мы получаем верное матричное равенство:

$$A \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{6.19}$$

Так как $\det A \neq 0$, то по критерию обратимости матриц матрица A обратима и (см. (6.18))

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A_{np}.$$

Умножим обе части равенства (6.19) на матрицу A^{-1} слева, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} A_{np} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{6.20}$$

Вспоминая правило умножения матриц, получаем

$$x_i^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} (A_{np})_{ik} b_k.$$

Но матрица A_{np} такова, что $(A_{np})_{ik} = A\mathcal{D}_{ki}(A)$, тогда

$$x_i^0 = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} A\mathcal{D}_{ki} b_k. \tag{6.21}$$

Последняя сумма и представляет из себя разложение по i–му столбцу определителя матрицы $A \overset{\square i}{\leftarrow} (b)$ (свойство 9° (Теорема Лапласа)). ▶

Следствием из этой теоремы является критерий наличия у квадратной однородной системы линейных уравнений ненулевых решений.

Теорема 6.8. *Для того, чтобы квадратная однородная система линейных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.*

Замечания:

- Вычисление определителя матрицы $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ по определению для больших n практически невозможно, так как в формулах (6.7)–(6.9) $n!$ слагаемых. Свойства определителя позволяют упростить задачу.
- Применение формулы (6.18) для обращения матрицы при больших n нецелесообразно (см. первое замечание), лучше отыскивать обратную матрицу, применяя метод Гаусса к матричному уравнению $AX = E$. Однако формула (6.18) полезна, так как она проясняет конструкцию матрицы A^{-1}.
- Правило Крамера применимо к системам линейных уравнений малых размеров ($n = 2, 3$) (см. первое замечание), а для больших n следует применять метод Гаусса.
- Критерий наличия ненулевого решения у квадратных однородных систем линейных уравнений очень полезен в приложениях, при исследовании поведения математической модели при различных значениях параметров.

Контрольные вопросы и задания

1. Пусть $\alpha I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Докажите, что $\det \alpha I = \alpha^n$.
2. Пусть
$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Докажите, что $\det A = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$.

3. Чему равен определитель матрицы

$$
\text{а)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \text{б)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \alpha_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}\ ?
$$

4. Справедливо ли свойство:

$$
\det(A+B) \ = \ \det A + \det B?
$$

5. Докажите, что если

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \det A \neq 0,
$$

то

$$
A^{-1} \ = \ \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.
$$

Пользуясь полученной формулой, выпишите A^{-1} для

$$
A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}
$$

6. Решите уравнение

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

VII

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

7.1. Комплексные числа: алгебраический подход

Комплексные числа — естественное развитие наших представлений о числах. Мы здесь постараемся изложить чисто алгебраическую теорию комплексных чисел, но заметим, что естественная геометрическая интерпретация комплексных чисел точками координат плоскости — развитие идеи интерпретации вещественных чисел точками числовой оси.

Определение 7.1. *Комплексным числом z будем называть запись вида $z = a + bi$, где $a, b \in R$. Число a называется вещественной частью z и обозначается $\operatorname{Re} z$, bi называется мнимой частью z и обозначается $\operatorname{Im} z$, b называют коэффициентом при мнимой части. Символ i называют мнимой единицей. Множество комплексных чисел обозначают $\mathbb{C}$.*

Определение 7.2. *Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i \in \mathbb{C}$.*

$$z_1 = z_2 \quad \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{cases} a_1 = a_2, \\ b_1 = b_2. \end{cases} \tag{7.1}$$

Запись $z = a + bi$ называют алгебраической формой комплексного числа.

7.1.1 Арифметические операции над комплексными числами

Определим в $\mathbb{C}$ операцию сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ следующим: Если $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, то

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &\overset{\text{def}}{=} (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i, \\ z_1 \cdot z_2 &\overset{\text{def}}{=} (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Замечание. Умножение во множестве комплексных чисел, введенно так, что, если положить $i^2 = -1$, то комплексные числа можно перемножать как многочлены.

Определение 7.3. *Пусть $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Комплексно сопряженным к z (сопряженным) называют число $\overline{z} \stackrel{\text{def}}{=} a - bi$.*

Ясно, что

$$\overline{\overline{z}} \;=\; z. \tag{7.3}$$

Противоположным к $z = a+bi$ называют $-z \stackrel{\text{def}}{=} (-a)+(-b)i$. Ясно, что $-z = -1 \cdot z$.

Теорема 7.1. *Имеют место следующие свойства арифметических операций во множестве $\mathbb{C}$:*

1°. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$;

2°. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 + z_2 + z_2$;

3°. $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$;

4°. $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \stackrel{\text{def}}{=} z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$;

5°. $z + 0 = z$, *где* $0 \stackrel{\text{def}}{=} 0 + 0 \cdot i$;

6°. $\forall z \quad z + (-z) = 0$;

7°. $\forall z \quad z \cdot 1 = z$, *где* $1 \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 0 \cdot i$;

8°. $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \;\; \exists z^{-1} \;\; \big(z \cdot z^{-1} = z^{-1} \cdot z = 1\big)$;

9°. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$.

◀ Свойства 1–7° и 9° очевидны, докажем свойство 8°. z^{-1} должно являться решением уравнения

$$z \cdot (x + iy) = 1 + 0 \cdot i, \quad z = a + bi, \quad a^2 + b^2 \neq 0. \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad (a + bi)(x + iy) = 1 + 0 \cdot i. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ax - by \;=\; 1, \\ bx + ay \;=\; 0. \end{cases} \tag{7.4}$$

Найдем $\det\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) = a^2 + b^2 \neq 0$, тогда по теореме Крамера (теорема 6.7) СЛУ (7.4) имеет единственное решение

$$x \;=\; \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right)}{\det\left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)} \;=\; \frac{a}{a^2 + b^2};$$

$$y \;=\; \frac{\det\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{smallmatrix}\right)}{a^2 + b^2} \;=\; \frac{-ba}{a^2 + b^2}.$$

Значит

$$z^{-1} \;=\; \frac{1}{a^2 + b^2}\,\left(a + (-b)i\right) \qquad ▶ \tag{7.5}$$

Фактически мы доказали теорему:

Теорема 7.2. *Множество $\mathbb{C}$ относительно сложения образует коммутативную группу.*

Теорема 7.3. *Множество $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ относительно умножения образует коммутативную группу.*

7.1.2 Понятие о поле

Множество P с двумя операциями $+$ и $\cdot$ называется полем, если оно образует коммутативную группу относительно операции $+$ и $P \setminus \{0\}$ (где 0 — нейтральный элемент по сложению) образует коммутативную группу по умножению, и в P справедлив дистрибутивный закон $a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Теорема 7.4. *Множество $\mathbb{C}$ является полем относительно операций «$+$» и «$\cdot$».*

Определение 7.4. *Модулем $z = a + bi$ ($\in \mathbb{C}$) называют неотрицательное вещественное число, обозначаемое $|z|$ и определяемое равенством*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}. \tag{7.6}$$

Во введенных обозначениях формула (7.5) примет вид:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \overline{z}.$$

7.2. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Рассмотрим декартову плоскость xOy. Комплексное число $z = a + bi$ будем интерпретировать как точку плоскости M_z с координатами (a, b).

Рассмотрим вектор $\overline{OM_z}$. Ясно, что $|\overline{OM_z}| = |z|$.

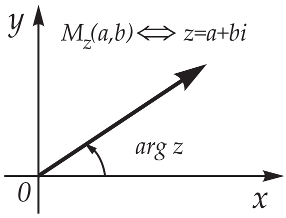


Рис. 7.1.

Ясно, что сложению комплексных чисел z_1, z_2 соответствует сложение векторов $\overline{OM_{z_1}}$ и $\overline{OM_{z_2}}$. Из этого следует, что

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|. \tag{7.7}$$

Если на этой же плоскости ввести полярные координаты, то $\rho_{M_z} = |z| \overset{\text{def}}{=} \rho_z$, а $\varphi_{M_z} \overset{\text{def}}{=} \varphi_z \overset{\text{def}}{=} \arg z$ называется аргументом комплексного числа z. Обычно считают, что $0 \leqslant \arg z < 2\pi$. п Ясно, что $\arg 0$ неопределен, можно положить, что $\arg 0 = 0$.

Вспоминая связь между полярными и декартовыми координатами (см. гл. I, формулы (1.12)-(1.13)), получаем

$$\begin{aligned} z &= a + bi = |z|\cos\varphi + |z|\sin\varphi \cdot i = |z|\left(\cos\varphi_z + i\sin\varphi_z\right) = \\ &\qquad = \rho_z\left(\cos\varphi_z + i\sin\varphi_z\right). \end{aligned} \tag{7.8}$$

Последнее называют тригонометрической формой комплексного числа. Формула (7.8) дает выражение комплексного числа через его модуль и аргумент. Выпишем теперь формулы для нахождения модуля и аргумента комплексного числа, заданного в алгебраической форме:

$$\begin{cases} \rho_z = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos\varphi_z \ = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin\varphi_z \ = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad 0 \leqslant \varphi_z < 2\pi. \end{cases} \tag{7.9}$$

Очевидно, что числа z и $\overline{z}$ интерпретируются точками, расположенными симметрично относительно оси Ox.

Замечание. Операции в комплексных числах и сами комплексные числа введены так, что вещественные числа a можно считать комплексными вида $a + 0 \cdot i$ и производить с ними операции как с комплексными числами. При этом вещественные числа интерпретируются точками на оси Ox, а числа вида $0 + bi$ точками на оси Oy. Поэтому ось Ox называют вещественной, а ось Oy — мнимой.

7.3. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$, $z_2 = \rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$. Найдем $z_1 \cdot z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\rho_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) = \\ &= \rho_1\rho_2\left(\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) + \right. \\ &\quad \left. + \ i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\right)\right) = \\ &= \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right) \end{aligned} \tag{7.10}$$

Итак, мы доказали:

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2| &= |z_1| \cdot |z_2|, \\ \arg\,(z_1 \cdot z_2) &= \arg\, z_1 + \arg\, z_2, \end{aligned} \tag{7.11}$$

т. е. что при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме модули перемножаются, а аргументы складываются.

Следствием правила (7.10) и (7.11) является формула Муавра[1]:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \tag{7.12}$$

возведения комплексного числа в степень.

$\boxed{З}$ **7.1** Вывести формулу для выражения $\sin 3\varphi$ через тригонометрические функции основного аргумента.

◀ Воспользуемся формулой Муавра (7.12):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi. \tag{7.13}$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 &= \cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi\sin\varphi\cdot i - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cdot i = \\ &= \left(\cos^2\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi\right) i. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Воспользуемся условием равенства комплексных чисел, из (7.13) и (7.14) получаем

$$\begin{aligned}\sin 3\varphi &= 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi, \\ \cos 3\varphi &= \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Замечания:

- Мы хотели получить формулу для синуса тройного угла, а получили сразу две формулы – для $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$.
- Для получения формул для $\sin n\varphi,\ \cos n\varphi$ требуется формула бинома Ньютона. Биномиальные коэффициенты можно находить с помощью треугольника Паскаля.

[1]Муавр Абрахам (1667–1754) — английский математик, член Лондонского королевского общества. Известен результатами по теории рядов, теории вероятностей, комплексных чисел (к. ч.), в том числе возведения к. ч. в степень и извлечения корня.

7.4 Деление комплексных чисел

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и $z_2 \neq 0$. Комплексное число z называется частным от деления z_1 на z_2, если $z_1 = z.z_2$, частное обозначают $\frac{z_1}{z_2}$.

Теорема 7.5. *В случае $z_2 \neq 0$ частное существует и*

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot {z_2}^{-1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2}, \tag{7.15}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{a_2^2 + b_2^2}, \quad \text{где } z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i.$$

В тригонометрической форме частное может быть записано в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \tag{7.16}$$

где $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$; $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2)$.

◀ Проверим равенство

$$z_2 \cdot \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = z_1;$$

$$z_2 \cdot \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \cdot \frac{|z_2|^2}{|z_2|^2} = z_1. \quad ▶$$

7.5 Свойства модуля и комплексного сопряжения

Теорема 7.6 (Свойства модуля)**.** *Имеют место свойства:*

1°. $|z| \geqslant 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$
2°. $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|;$
3°. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$
4°. $|z_1/z_2| = |z_1| \,/\, |z_2|\,.$

Эта теорема — сводка результатов, полученных ранее.

Теорема 7.7 (Свойства комплексного сопряжения)**.** *Имеют место свойства:*

1°. $\overline{\overline{z}} = z;$

2°. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2};$

3°. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2};$

4°. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};$

5°. $\overline{z^k} = \overline{z}^k.$

◀ Свойство 1° — очевидно. Докажем свойство 3°. Воспользуемся тем, что если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то $\overline{z} = \rho(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$. По правилу умножения имеем

$$z_1 \cdot z_2 \;=\; \rho_1\rho_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right),$$

тогда

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 \cdot z_2} \;&=\; \rho_1\rho_2\left(\cos(-(\varphi_1+\varphi_2)) + i\sin(-(\varphi_1+\varphi_2))\right) \;=\\
=\; &\rho_1\rho_2\left(\cos((-\varphi_1)+(-\varphi_2)) + i\sin((-\varphi_1)+(-\varphi_2))\right) \;=\\
=\; &\rho_1\left(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1)\right)\cdot\rho_2\left(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2)\right) \;=\; \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}.
\end{aligned}$$

Аналогично доказывается свойство 4°.

Докажем свойство 2°.

Рисунок 7.2 — геометрическое доказательство этого факта.

Проведем аналитическое доказательство свойства 2°.

$$\begin{aligned}
\overline{z_1+z_2} \;&=\; \overline{(a_1 a_2) + (b_1+b_2)i} \;=\\
&= (a_1+a_2) + (-(b_1+b_2))i =\\
&= (a_1+a_2) + ((-b_1)+(-b_2))\,i =\\
&= (a_1+(-b_1)i) + (a_2+(-b_2)i) =\\
&= \overline{z_1} + \overline{z_2}.
\end{aligned}$$ ▶

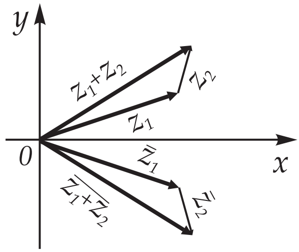


Рис. 7.2.

Замечание. Ясно, что на самом деле Рис. 7.2 не является геометрическим доказательством. На нём изображён один частный случай, когда треугольник, интерпретирующий сложение комплексных чисел, расположен так “удачно”.

7.6. Корни из комплексных чисел

Определение 7.5. *Корнем n–ой степени ($n \in \mathbb{N}$) из комплексного числа z называют комплексное число w, удовлетворяющее соотношению:*

$$w^n \;=\; z. \tag{7.17}$$

Теорема 7.8. *Корень n–ой степени у комплексного числа z существует, причем если $z = 0$, то существует единственный корень $w = 0$, если $z \neq 0$, то существует n корней w_k ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) и они определяются формулой*

$$w_k \;=\; \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right), \tag{7.18}$$

где $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

◀ Доказательство этого факта следует из формулы Муавра (7.12). ▶

Особую роль в извлечении корня из комплексного числа играют корни из 1, которые задаются формулой

$$e_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{7.19}$$

Ясно, что все n корней n–ой степени из $z \neq 0$ могут быть получены по формуле

$$w_k = w_j e_k, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{7.20}$$

где w_j — какой–то из корней n–ой степени из z, вычисленный с помощью формулы (7.18).

Имеет место

Теорема 7.9. *Множество корней n–ой степени из единицы образует по умножению конечную коммутативную группу с нейтральным элементом $e_0 = 1$.*

◀ Докажите этот факт самостоятельно. ▶

Заметим, что корни n–ой степени из единицы располагаются на единичной окружности с центром в начале координат в вершинах правильного n–угольника (см. рис. 7.3).

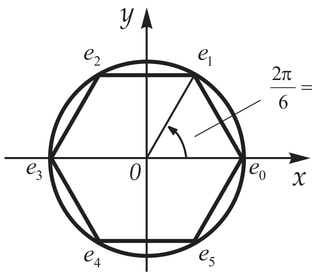


Рис. 7.3.

На этом примере ($n = 6$) хорошо видно, что корни из единицы образуют группу, причем $e_0^{-1} = e_0$, $e_1^{-1} = e_5$, $e_2^{-1} = e_4$, $e_3^{-1} = e_3$, $e_4^{-1} = e_2$, $e_5^{-1} = e_1$, т. е. корни, соответствующие вершинам, симметричным относительно вещественной оси, образуют взаимнообратные пары в группе корней n–ой степени из единицы.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите единственность нуля во множестве $\mathbb{C}$.

2. Поставим в соответствие комплексному числу $z = a + ib$ вектор $\vec{v}_z \in V_2$ с координатами (a, b). Покажите, что $\vec{v}_{z_1+z_2} = \vec{v}_{z_1} + \vec{v}_{z_2}$.

3. Докажите, что для любых $\lambda \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$ имеет место равенство:
$$\vec{v}_{\lambda z} = \lambda \vec{v}_z.$$

4. Получите с помощью формулы Муавра тригонометрические формулы, выражающие $\sin 4\alpha$ и $\cos 4\alpha$ через $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$.

5. Решите СЛУ
$$\begin{cases} iz_1 + iz_2 = 2 \\ z_1 - z_2 = -2i \end{cases}, \qquad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$
двумя способами:
   а) применив метод Гаусса над $\mathbb{C}$;
   б) применив метод Гаусса к СЛУ над $\mathbb{R}$, представив z_1, z_2 в виде $x_1 + iy_1$, $x_2 + iy_2$ соответственно (x_1, x_2, y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$).

VIII

МНОГОЧЛЕНЫ (АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ)

8.1. Определение многочлена. Степень многочлена

Определение 8.1. *Многочленом n–ой степени называется функция, заданная на $\mathbb{C}$ формулой*

$$P(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0, \tag{8.1}$$

где коэффициенты a_i принадлежат при этом:

а) $a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n;$

б) $a_i \in \mathbb{C}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n.$

В случае а) говорят, что $P(x)$ многочлен с вещественными коэффициентами, а в случае б) — с комплексными.
a_n называют старшим коэффициентом, a_0 — свободным членом.

Таким образом, числа, отличные от нуля — многочлены нулевой степени. Число 0 называют 0–многочленом.

Теорема 8.1. *Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ — многочлен n–ой степени, и существуют $n+1$ различных точек комплексной плоскости $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$, в которых многочлен обращается в ноль (т. е. $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \dots = P(\alpha_{n+1}) = 0$). Тогда все коэффициенты многочлена $a_n, \dots, a_0$ равны нулю.*

◀ Равенства $P(\alpha_1) = 0$, $P(\alpha_2) = 0$, …, $P(\alpha_{n+1}) = 0$ можно записать в виде

$$\begin{array}{rcl} \alpha_1^n a_n + \alpha_1^{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_1 a_1 + 1 \cdot a_0 &=& 0 \\ \alpha_2^n a_n + \alpha_2^{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_2 a_1 + 1 \cdot a_0 &=& 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots & & \dots \\ \alpha_{n+1}^n a_n + \alpha_{n+1}^{n-1} a_{n-1} + \dots + \alpha_{n+1} a_1 + 1 \cdot a_0 &=& 0 \end{array} \tag{8.2}$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha_1^n x_1+\alpha_1^{n-1}x_2+\dots+ & \alpha_1 x_n+1\cdot x_{n+1}= & 0\\ \alpha_2^n x_1+\alpha_2^{n-1}x_2+\dots+ & \alpha_2 x_n+1\cdot x_{n+1}= & 0\\ \dots\quad\dots\quad\dots & \dots\quad\dots & \dots\\ \alpha_{n+1}^n x_1+\alpha_{n+1}^{n-1}x_2+\dots+ & \alpha_{n+1} x_n+1\cdot x_{n+1}= & 0 \end{array}\right. \tag{8.3}$$

Ее матричный вид

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^n & \alpha_1^{n-1} & \dots & \alpha_1 & 1\\ \alpha_2^n & \alpha_2^{n-1} & \dots & \alpha_2 & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_{n+1}^n & \alpha_{n+1}^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Равенства (8.2) означают, что $(a_n, \dots, a_0)$ — решение однородной системы линейных уравнений (8.3). Для доказательства нашей теоремы достаточно доказать, что эта система имеет только нулевое решение. Вычислим определитель, называемый определителем Вандермонда:

$$w(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1})=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n+1}\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \dots & \alpha_{n+1}^2\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_1^n & \alpha_2^n & \alpha_3^n & \dots & \alpha_{n+1}^n \end{pmatrix}.$$

Вычтем из каждой последующей строки предыдущую, умноженную на α_1, тогда

$$\begin{aligned} &w(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n) = \\ &=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & (\alpha_2-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1) & \dots & (\alpha_{n+1}-\alpha_1)\\ 0 & \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & \alpha_2^{n-1}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3^{n-1}(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \end{pmatrix}= \\ &\underset{\substack{\text{по 1-му}\\ \text{столбцу}}}{\overset{\text{разл.}}{=}}\det\begin{pmatrix} (\alpha_2-\alpha_1) & (\alpha_3-\alpha_1) & \dots & (\alpha_{n+1}-\alpha_1)\\ \alpha_2(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_2^{n-1}(\alpha_2-\alpha_1) & \alpha_3^{n-1}(\alpha_3-\alpha_1) & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1}(\alpha_{n+1}-\alpha_1) \end{pmatrix}= \\ &=(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1)\times\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1\\ \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_{n+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \alpha_2^{n-1} & \alpha_3^{n-1} & \dots & \alpha_{n+1}^{n-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили формулу

$$\begin{aligned} &w(\alpha_1,\dots,\alpha_{n+1}) = \\ &= (\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_n-\alpha_1)\cdots(\alpha_2-\alpha_1)\cdot w(\alpha_2,\dots,\alpha_{n+1}). \end{aligned}\tag{8.4}$$

Применим ее к $w(\alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1})$, стоящему в правой части (8.4), тогда

$$w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_1)(\alpha_n - \alpha_1) \cdots (\alpha_2 - \alpha_1) \times$$
$$\times (\alpha_{n+1} - \alpha_2)(\alpha_n - \alpha_2) \cdots (\alpha_3 - \alpha_2) \cdot w(\alpha_3, \ldots, \alpha_{n+1}).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) =$$
$$= \prod_{i=2}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_1) \cdot \prod_{i=3}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_2) \cdot \cdots \prod_{i=n}^{n+1} (\alpha_i - \alpha_{n-1}) \cdot w(\alpha_n, \alpha_{n+1}) =$$
$$= \left(\prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\alpha_j - \alpha_i) \right) \times \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Из полученной формулы видно, что $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \neq 0$ в случае, когда все α_i различны. Определитель однородной системы линейных уравнений (8.3) либо равен $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$, либо отличается от $w(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ знаком, поэтому в условиях нашей теоремы мы имеем дело с ОСЛУ, у которой определитель отличен от нуля. Тогда по следствию из теоремы Крамера (теорема 6.7) у однородной системы линейных уравнений (8.3) имеется только нулевое решение. ▶

Следствия из теоремы:

Следствие 1. Коэффициенты многочлена n–ой степени однозначно определяются заданием его значений в $n+1$ точке комплексной плоскости.

Следствие 2. Если f и g — два многочлена n–ой степени в $n+1$ точке комплексной плоскости принимают равные значения, то они совпадают на всей комплексной плоскости, т. е. $f(x) = g(x)$.

Обозначим $\deg f$ — степень многочлена f. Имеет место

Теорема 8.2 (Свойства степеней)**.** *Имеют место следующие свойства степени многочлена:*

1°. $\deg (f \cdot g) = \deg f + \deg g$;

2°. $\deg (f + g) \leqslant \max(\deg f, \deg g)$;

2° *a. Если* $\deg f \neq \deg g$, *то* $\deg (f + g) = \max(\deg f, \deg g)$.

8.2. Деление во множестве многочленов

Ясно, что деление на 0–многочлен лишено смысла (так же, как и деление на 0 в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$).

Определение 8.2. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены и $g(x) \neq 0$. Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ ($\Leftrightarrow$ $g(x)$ является делителем $f(x)$), если существует многочлен $h(x)$ такой, что*

$$f(x) \;=\; h(x) \cdot g(x). \tag{8.5}$$

Многочлен $h(x)$ называется частным от деления $f(x)$ на $g(x)$.

Ясно, что соотношение (8.5) симметрично относительно $g(x)$ и $h(x)$. И значит, в этом случае, $g(x)$ является частным от деления $f(x)$ на $h(x)$.

Из теоремы 8.2 о свойствах степени мы получаем, что если $f(x)$ делится на $g(x)$, то

$$\deg\, g(x) \;\leqslant\; \deg\, f(x) \tag{8.6}$$

Теорема 8.3 (Свойства отношения «делимость»)**.** *Отношение делимости во множестве многочленов обладает следующими свойствами:*

1°. *Если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $\alpha, \beta \neq 0$, то $\alpha f(x)$ делится на $\beta g(x)$.*

2°. *Если $f(x)$ делится на $g(x)$ и $g(x)$ делится на $s(x)$, то $f(x)$ делится на $s(x)$.*

3°. *Если $f(x)$ делится на $s(x)$ и $g(x)$ делится на $s(x)$, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ делится на $s(x)$.*

◀ Доказательство рекомендуем провести самостоятельно. ▶

8.2.1 Деление с остатком

Теорема 8.4. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены и $g(x) \neq 0$, тогда существуют такие многочлены $h(x)$ и $r(x)$, что*

$$f(x) \;=\; h(x) \cdot g(x) + r(x), \tag{8.7}$$

причем $\deg\, r(x) < \deg\, g(x)$ и представление (8.7) для пары $f(x)$, $g(x)$ единственно. $h(x)$ называют частным от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ — остатком.

◀ Докажем существование представления (8.7). Сравним степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

а) $\deg f(x) < \deg g(x)$. Положим $h(x) = 0$, $r(x) = f(x)$, получаем $f(x) = 0 \cdot g(x) + f(x)$.

б) $\deg f(x) \geqslant \deg g(x)$. Запустим в работу алгоритм деления многочлена на многочлен «углом». Пусть

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n \neq 0,\\ g(x) &= b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_0, \quad b_m \neq 0. \end{aligned}$$

Выполним один шаг алгоритма:

$$\begin{array}{l|l} -\,a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + \qquad a_1 x + a_0 & b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 \\ \cline{2-2} \quad a_n x^n + \frac{a_m b_{m-1}}{b_m} x^{n-1} \quad + \dots + & \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} \\ \cline{1-1} \quad 0 \cdot x^n + \underbrace{\left(a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m}\right) x^{n-1} +}_{f_1(x)} & \end{array}$$

Если $f_1(x)$ и $g(x)$ образуют пару, удовлетворяющую условию б), то выполняется еще один шаг деления «углом» и т. д. Поскольку на каждом шаге деления углом степень делимого уменьшается, то за конечное число шагов процесс деления оборвется. В момент остановки деления углом мы получим представление (8.7). ▶

$\boxed{\text{П}}$ **8.1** $f(x) = x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4$; $g(x) = x^3 - 3x + 1$. Выполнить деление $f(x)$ на $g(g)$.

◀ Применим алгоритм деления «углом»:

$$\begin{array}{l|l} -\,x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4 & x^3 - 3x + 1 \\ \cline{2-2} \quad x^5 \qquad - 3x^3 + x^2 & x^2 - 3x + 2 \\ \cline{1-1} -\quad - 3x^4 + 2x^3 + 10x^2 - 9x + 4 & \\ \quad\quad - 3x^4 \qquad + 9x^2 - 3x & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad -\,2x^3 + x^2 - 6x + 4 & \\ \qquad\qquad\quad 2x^3 \qquad - 6x + 2 & \\ \cline{1-1} \qquad\qquad\qquad\quad x^2 \qquad + 2 & \end{array}$$

$$\begin{aligned} &h(x) = x^2 - 3x + 2; \qquad r(x) = x^2 + 2;\\ &x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 9x + 4 =\\ &= (x^2 - 3x + 2)(x^3 - 3x + 1) + x^2 + 2. \end{aligned}$$ ▶

Докажем теперь единственность представления (8.7).

Предположим противное, т. е. что существуют такие многочлены $f(x)$ и $g(x)$, у которых представление (8.7) не единственно:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x)g(x) + r(x), & (8.8)\\ f(x) &= h_1(x)g(x) + r_1(x), & (8.9) \end{aligned}$$

вычитая из (8.8) (8.9), получим

$$0 = (h(x) - h_1(x))\, g(x) + (r(x) - r_1(x))\,.$$

По нашему предположению $r(x) - r_1(x) \neq 0$ и $h(x) - h_1(x) \neq 0$, тогда по теореме 8.2 о степенях получаем в правой части многочлен степени $\deg\, g(x) + \deg\, (h(x) - h_1(x)) > 0$, а слева 0–многочлен. Полученное противоречие и доказывает единственность представления (8.7). ►

8.3. Корни многочлена. Разложение по корням

Напомним, что $x = a$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$, т. е. корни многочлена это решения уравнения $f(x) = 0$.

Теорема 8.5 (Теорема Безу[1]). *Для того, чтобы многочлен $f(x)$ делился на $x - a$ без остатка, необходимо и достаточно, чтобы $x = a$ было корнем многочлена $f(x)$.*

◄ **Необходимость.** $f(x)$ делится на $x - a$ без остатка, т. е.

$$f(x) = h(x)(x - a). \tag{8.10}$$

Нужно показать, что $f(a) = 0$. Подставляя $x = a$ в (8.10), получаем

$$f(a) = h(a)(a - a) = h(a) \cdot 0 = 0.$$

Достаточность. Применим к паре $f(x)$ и $(x - a)$ теорему 8.4 о делении с остатком:

$$f(x) = h(x) \cdot (x - a) + r(x). \tag{8.11}$$

[1] Безу Этьен (1730–1783) — французский математик, член Парижской академии наук, родом из Немура, преподавал математику в военных учебных заведениях Франции. Основные работы относятся к высшей алгебре, вместе с Г. Крамером развил приложение теории определителей к СЛУ. Ему принадлежит «Курс математики» (1764–1769, 6 т.), популярный во Франции и других странах вплоть до середины XIX века.

$\deg r(x) < \deg(x-a) = 1$. Значит $r(x)$ — число (многочлен 0–ой степени или 0), т. е. $r(x) = r_a$, тогда (8.11) примет вид

$$f(x) = h(x)(x-a) + r_a. \tag{8.12}$$

Подставим в (8.12) $x = a$:

$$f(a) = h(a)(a-a) + r_a,$$

$$r_a = f(a) \tag{8.13}$$

Учитывая, что $x = a$ — корень, получаем

$$r_a = f(a) = 0. \qquad \blacktriangleright$$

Следствие (из теоремы Безу). Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x-a$ равен значению многочлена при $x = a$.

◀ См. соотношение (8.13). ▶

Простая по своей формулировке и доказательству, теорема Безу породила стройную теорию корней многочлена, разложения рациональных функций на простые дроби, а затем стройную теорию распределения корней целых и мероморфных функций (см. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. –М.: Гостехиздат, 1956; Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. –М.: Наука, 1970).

Итак, если a — корень многочлена $f(x)$, то $f(x) = (x-a)\cdot f_1(x)$, если при этом a — корень многочлена $f_1(x)$, то $f(x) = (x-a)(x-a)f_2(x) = (x-a)^2 f_2(x)$. Это позволяет дать определение кратности корня.

Определение 8.3. *Говорят, что $x = a$ является корнем кратности k_a $(\geqslant 1)$ многочлена $f(x)$, если*

$$f(x) = (x-a)^{k_a} f_{k_a}(x), \quad f_{k_a}(a) \neq 0. \tag{8.14}$$

Если $k_a = 1$, то корень называют однократным или простым.

Ясно, что $k_a \leqslant \deg f(x)$.

8.3.1 Основная теорема алгебры (ОТА)

Теорема 8.6 (Основная теорема алгебры). *Многочлен* $f(x)$, $\deg f \geqslant 1$ *имеет в* $\mathbb{C}$ *хотя бы один корень.*

Доказательство этой теоремы использует средства теории функций комплексного переменного и мы его не приводим.

Теорема 8.7. *Многочлен* $f(x)$, $\deg f = n \geqslant 1$ *имеет в* $\mathbb{C}$ *ровно* n *корней, если каждый корень считается столько раз, какова его кратность.*

◀ У многочлена $f(x)$ имеется по ОТА хотя бы один корень $-x_1$. По теореме Безу $f(x) = (x - x_1)f_1(x)$ и $\deg f_1(x) = n - 1$, если $n - 1 \geqslant 1$, то к $f_1(x)$ опять применим ОТА и т. д. Процесс выделения корней продолжается до исчерпания степени f_r, т. е.

$$\begin{aligned} f(x) &= (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)f_r(x), \\ \deg f_r(x) &= n - r = 0. \end{aligned}$$

Значит $r = n$, тогда

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n),$$

где a_n — старший коэффициент в разложении $f(x)$ по степеням x. Объединяя скобки, соответствующие кратным корням, получим

$$f(x) = a_n(x - x_1)^{k_{x_1}}(x - x_2)^{k_{x_2}}\ldots(x - x_l)^{k_{x_l}}. \tag{8.15}$$

Последнее соотношение называют полным разложением по корням. ▶

8.4. Многочлены с вещественными коэффициентами

Займемся теперь многочленами с вещественными коэффициентами и их разложением на множители над $\mathbb{R}$. Уже пример многочлена $x^2 + 1$ показывает, что ожидать тех же результатов, что и в $\mathbb{C}$ не приходится.

Теорема 8.8. *Если* $x = \alpha$ *— комплексный корень многочлена* $f(x)$ *с вещественными коэффициентами, то* $\overline{\alpha}$ *— корень многочлена* $f(x)$.

◀ Мы имеем

$$f(\alpha) \;=\; a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 \;=\; 0. \tag{8.16}$$

Перейдем в (8.16) к комплексно-сопряженным числам

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} \;=\; \overline{0} \;=\; 0. \tag{8.17}$$

Преобразуем левую часть, используя свойства комплексного сопряжения (теорема 7.7):

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} \;=\; \overline{a_n}\left(\overline{\alpha}\right)^n + \overline{a_{n-1}}\left(\overline{\alpha}\right)^{n-1} + \cdots +$$
$$+\overline{a_1\alpha} + \overline{a_0} \;\underset{\overline{a_i}=a_i}{\overset{a_i\in\mathbb{R}}{=}}\; a_n\left(\overline{\alpha}\right)^n + a_{n-1}\left(\overline{\alpha}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0.$$

Тогда из (8.17) получаем $f\left(\overline{\alpha}\right) = 0$. ▶

Замечание. Если $x = \alpha$ — комплексный корень кратности k_α многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами, то $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f(x)$ с тем же показателем кратности, т. е.

$$k_\alpha \;=\; k_{\overline{\alpha}}.$$

◀ По тереме Безу имеем $f(x) = (x-\alpha)f_1(x)$. По доказанному в теореме имеем

$$0 \;=\; f\left(\overline{\alpha}\right) \;=\; \underset{\neq 0}{(\overline{\alpha} - \alpha)} f_1\left(\overline{\alpha_1}\right),$$

значит $\overline{\alpha}$ — корень многочлена $f_1\left(\overline{\alpha}\right)$. К f_1 применим теорему Безу, тогда

$$f(x) \;=\; (x-\alpha)\left(x-\overline{\alpha}\right) f_2(x) \;=\; \left(x^2 + px + q\right) f_2(x). \tag{8.18}$$

Здесь $x^2 + px + q$ — квадратный трехчлен с вещественными коэффициентами с дискриминантом, меньшим нуля, имеющий α и $\overline{\alpha}$ своими корнями. Но тогда $f_2(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами. Если α — кратный комплексный корень, то множитель x^2+px+q выделяется столько раз, какова кратность корня α — k_α раз. Мы доказали, что $k_\alpha \leqslant k_{\overline{\alpha}}$, но так как $\alpha = \overline{\left(\overline{\alpha}\right)}$, то $k_{\overline{\alpha}} \leqslant k_{\overline{\overline{\alpha}}} = k_\alpha$. ▶

Тогда полное разложение многочлена $f(x)$ с вещественными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{aligned} f(x) \;=\; & a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}\times \\ & \times\left(x^2+p_1x+q_1\right)^{k_{r+1}}\left(x+p_2x+q_2\right)^{k_{r+2}}\dots \\ & \dots\left(x^2+p_sx+q_s\right)^{k_{r+s}}, \end{aligned} \tag{8.19}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_r$ — вещественные корни многочлена $f(x)$, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ — их показатели кратности, $(x^2+p_ix+q_i)$ — квадратные трехчлены с дискриминантами, меньшими нуля, имеющими пары комплексно–сопряженных корней, k_i — их показатели кратности,

$$\deg f \;=\; k_1 + k_2 + \cdots + k_r + 2\,(k_{r+1} + \cdots + k_{r+s})\,.$$

Замечание. Многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет хотя бы один вещественный корень (что является тривиальным следствием теоремы 8.8 и приведенного разложения по корням).

Сформулируем теперь и докажем полную теорему Виета[2], устанавливающую связь между коэффициентами многочлена и его корнями.

Теорема 8.9 (Виета)**.** *Пусть $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ и a_1, a_2, $\ldots$, a_n — набор всех его корней (здесь кратные корни присутствуют столько раз, какова их кратность), тогда имеют место формулы Виета:*

$$\begin{array}{ll} a_{n-1} = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n), \\ a_{n-2} = a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{n-1}a_n, \\ a_{n-3} = -(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + \cdots + a_{n-2}a_{n-1}a_n), \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_0 \quad = (-1)^n a_1a_2\ldots a_n. \end{array} \tag{8.20}$$

◀ Выпишем разложение многочлена $f(x)$ по корням (8.15), учитывая, что $a_n = 1$.

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n). \tag{8.21}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (теорема единственности), получаем формулы Виета. ▶

Замечание. Справедлива и теорема обратная к теореме Виета, однако её доказательство значительно труднее.

[2]Виет Франсуа (1540–1603) — французский математик, по образованию юрист, интересовался астрономией, по необходимости занялся тригонометрией и алгеброй. Виет впервые применил буквенные обозначения не только для неизвестных, но и для коэффициентов алгебраических уравнений. Это позволило говорить о формулах для корней уравнений. Главным свои достижением Ф. Виет считал формулы, устанавливающие связь между корнямми алгебраического уравнения и его коэффициентами (формулы Виета). Благодаря последним имя Виета вошло в историю матемaтематики и всего человечества, так как формулы Виета для квадратных уравнений входят в программу среднего образования во всем мире.

$\boxed{\text{З}}$ **8.1** Найти сумму всех корней n–ой степени из единицы ($n \geqslant 2$).

◀ Корни из единицы — это корни многочлена $x^n - 1$. По теореме Виета имеем

$$-(e_0 + e_1 + \cdots + e_{n-1}) \;=\; a_{n-1} \;=\; 0,$$

т. к. в этом уравнении нет x^{n-1}, т. е. мы доказали, что в случае $n \geqslant 2$ сумма всех корней n–ой степени из единицы равна нулю. ▶

Приведем еще одну теорему, позволяющую «подбирать» целые корни многочлена с целыми коэффициентами.

Теорема 8.10. *Если a — целый корень многочлена с целыми коэффициентами, то a является делителем свободного члена.*

◀ По теореме Безу имеем

$$f(x) \;=\; a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;=\; (x-a)f_1(x).$$

Из алгоритма деления «углом» следует, что $f_1(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Используя следствие 2 из теоремы 8.1, получаем, что

$$a_0 \;=\; (-a)\cdot b_0, \tag{8.22}$$

здесь b_0 — свободный член многочлена $f_1(x)$. ▶

$\boxed{\text{З}}$ **8.2** Решить уравнение $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$.
◀ Так как мы имеем многочлен с целыми коэффициентами, то «претендентами на целые корни» являются делители 10: ±1; ±2; ±5; ±10. $f(1) = 1 - 6 + 13 - 10 \neq 0$; $f(-1) = -1 - 6 - 13 - 10 \neq 0$; $f(2) = 8 - 24 + 26 - 10 = 0$. Применим теорему Безу

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 6x^2 + 13x - 10 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 - 2x^2\phantom{{}+13x-10}} & x^2 - 4x + 5 \\
-4x^2 + 13x\phantom{{}-10} & \\
\underline{-4x^2 + 8x\phantom{{}-10}} & \\
5x - 10 & \\
\underline{5x - 10} & \\
0 &
\end{array}$$

Рассмотрим уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$.

$$x_{1,2} \;=\; 2 \pm \sqrt{4-5} \;=\; 2 \pm i.$$

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + i$, $x_3 = 2 - i$. ▶

В заключение отметим, что формулы для решения квадратных уравнений были известны в глубокой древности, методы решения кубических уравнений (формулы Кардано) и 4–ой степени (метод Ферари) получены в XVI веке. Три последующих столетия были посвящены безуспешным попыткам нахождения формул для алгебраических уравнений более высоких степеней. В 1824 г. Н. Абель доказал неразрешимость в радикалах алгебраических уравнений степени $n \geqslant 5$.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите самостоятельно, что многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ может быть единственным образом разложен по степеням $(x-a)$, где $a \in \mathbb{C}$, т. е.
$$P(x) = a'_n(x-a)^n + a'_{n-1}(x-a)^{n-1} + \cdots + \\ + a'_1(x-a) + a'_0.$$
2. Пусть $P(x)$ — многочлен. Как построить, не находя корни $P(x)$, многочлен $P'(x)$, имеющий те же корни, что и $P(x)$, но кратности, равной 1?
3. По многочлену $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ постройте многочлен, все корни которого в два раза больше корней многочлена $P(x)$.
4. В чем состоит отличие понятия НОД двух натуральных чисел от понятия НОД двух многочленов.
5. Пусть f и g — ненулевые многочлены. $S_1(x)$ и $S_2(x)$ — их наибольшие общие делители. Чему равен НОД(S_1, S_2)?
6. Почему во множестве многочленов не вводится понятие наименьшего общего кратного двух многочленов?

IX

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

9.1. Определение и примеры линейных пространств

Изучая векторы на плоскости и в пространстве, мы заметили, что относительно операций сложения и умножения на число они «ведут себя одинаково», совершенно однотипно вводятся и координаты векторов на плоскости, и в трехмерном пространстве. В этом разделе будет введено общее понятие линейного пространства, базиса линейного пространства, координат векторов и т. п.

Определение 9.1. *Пусть $L(\neq \varnothing)$ — множество, элементы которого будем называть векторами. Говорят, что L образует линейное пространство над $\mathbb{R}$ $(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$, если для любых двух векторов $a, b \in L$ определен элемент $a + b \in L$, и для любого вектора $a \in L$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$ определен вектор λa и при этом выполнены следующие соотношения:*

1) $\forall a \, \forall b \in L \quad a + b = b + a;$
2) $\forall a \, \forall b \, \forall c \in L \quad (a + b) + c = a + (b + c) \stackrel{\text{def}}{=} a + b + c;$
3) $\exists \overline{0} \in L \quad | \quad a + \overline{0} = a;$
4) $\forall a \in L \, \exists (-a) \in L \quad | \quad a + (-a) = \overline{0};$
5) $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}), \ \forall a \, \forall b (\in L) \quad \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b;$
6) $\forall \lambda, \ \forall \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}), \ \forall a \in L \quad (\lambda + \beta)a = \lambda a + \beta b;$
7) $\forall \lambda, \ \forall \beta \in \mathbb{R}(\mathbb{C}, \mathbb{Z}), \ \forall a \in L \quad (\lambda\beta)a = \lambda(\beta a);$
8) $\forall a \in L \quad 1 \cdot a = a.$

Примеры линейных пространств.

1. Пространство V_2 — геометрических векторов на плоскости.
2. Пространство V_3 — геометрических векторов в трехмерном пространстве.
3. Множество матриц $M_{n \times m}(\mathbb{R})$ относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

Линейное пространство матриц-столбцов — $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ ($M_{n\times 1}(\mathbb{C})$) встречается и используется очень часто. Для него принято другое обозначение — $\mathbb{R}_n$ ($\mathbb{C}_n$), а в целях экономии места его элементы обычно записывают не в виде матрицы-столбца, а в виде матрицы-строки, т. е. если $x \in \mathbb{R}_n$ ($\in \mathbb{C}_n$), допустима запись $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а не

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Конечно, правильнее было бы писать $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

4. $P_5(\mathbb{R})$ множество многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше 5–ой образует линейное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число.

Из приведенных примеров видно, что элементы линейных пространств могут быть совершенно различной природы (векторы, матрицы, многочлены).

Отметим простейшие свойства линейных пространств, следующие из определения:

1°. $\forall a \in L \quad 0 \cdot a = \overline{0}$;

2°. $\forall a \in L \quad -1 \cdot a = -a$;

3°. Для каждого $a \in L$ элемент $(-a)$ определен однозначно.

◄ ◄$_1$

$$a \overset{8)\text{ опр.}}{=} 1 \cdot a \;=\; (1+0)\cdot a \overset{7)\text{ опр.}}{=} 1\cdot a + 0\cdot a \;=\; a + 0\cdot a.$$

Мы получили, что

$$a \;=\; a + 0\cdot a. \tag{9.1}$$

Прибавим к обеим частям (9.1) элемент $-a$:

$$\begin{aligned} &a + (-a) \;=\; a + 0\cdot a + (-a), \qquad \text{тогда}\\ &\overline{0} \;=\; (a+(-a)) + 0\cdot a \;=\; \overline{0} + 0\cdot a \;=\; 0\cdot a. \end{aligned}$$ ►$_1$

◄$_2$

$$a + (-1\cdot a) = 1\cdot a + (-1\cdot a) \overset{7)\text{ опр.}}{=} (1+(-1))\,a = 0\cdot a = \overline{0}.$$

Тогда мы имеем

$$\overline{0} \;=\; a+(-a) \qquad \text{и} \qquad a+(-1\cdot a) \;=\; \overline{0},$$

значит

$$a+(-a) \;=\; a+(-1)\cdot a. \tag{9.2}$$

Прибавим к обеим частям (9.2) элемент $-a$, тогда

$$\begin{aligned}
&a+(-a)+(-a) \;=\; a+(-1\cdot a)+(-a), \qquad \text{или}\\
&(a+(-a))+(-a) \;=\; (a+(-a))+(-1\cdot a), \qquad \text{тогда}\\
&\overline{0}+(-a) \;=\; \overline{0}+(-1\cdot a).
\end{aligned}$$

Учитывая соотношение 3) определения, получаем

$$-a \;=\; -1\cdot a. \qquad \blacktriangleright_2$$

$\blacktriangleleft_3$ Допустим противное, т. е. что существует такой элемент $a\in L$, у которого два противоположных элемента $-a_{N_1}$ и $-a_{N_2}$, т. е.

$$\begin{aligned}
&-a_{N_1} \;\neq\; -a_{N_2} \qquad \text{и}\\
&a+(-a_{N_1}) \;=\; \overline{0}, \quad a+(-a_{N_2}) \;=\; \overline{0},
\end{aligned} \tag{9.3}$$

но тогда

$$\begin{aligned}
&-a_{N_1} \;=\; -a_{N_1}+\overline{0} \;=\; -a_{N_1}+(a+(-a_{N_2})) \;=\\
&=\; (-a_{N_1}+a)+(-a_{N_2}) \;=\; \overline{0}+(-a_{N_2}) \;=\; -a_{N_2}.
\end{aligned}$$

Мы получили, что $-a_{N_1}=-a_{N_2}$, что противоречит нашему допущению (9.3). $\blacktriangleright_3$ $\blacktriangleright$

Замечание. В определении линейного пространства поле вещественных чисел можно заменить на произвольное числовое поле P (например, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел или $\mathbb{Z}$ — поле целых чисел). В этом случае говорят о линейном пространстве над полем P. Если поле $P=\mathbb{R}$, линейное пространство называют вещественным.

Определение 9.2. *Пусть L — линейное пространство над P и $M\subset L$ и M обладает свойствами:*

1°. $\forall a\,\forall b\in M \quad a+b\in M$;
2°. $\forall\lambda\in P\,\forall a\in M \quad \lambda a\in M$,

тогда M само является линейным пространством над P, и оно называется линейным подпространством пространства L.

П Примеры

- $P_3(\mathbb{R})$ является линейным подпространством пространства $P_5(\mathbb{R})$.
- Множество матриц вида
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a_{ij} \in \mathbb{R}$$
является линейным подпространством пространства $M_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

Очевидно, ноль-пространство — $\{\overline{0}\}$ и L всегда являются подпространствами L, они называются его несобственными подпространствами. Если у пространства есть и другие подпространства, то они называются собственными.

9.2. Линейная зависимость и линейная независимость

Определение 9.3. *Пусть L — линейное пространство над P. a_1, a_2, ..., $a_k \in L$, λ_1, λ_2, ..., $\lambda_k \in P$. Вектор*
$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i$$
называется линейной комбинацией векторов a_1, a_2, ..., a_k.

Определение 9.4. *Обозначим через $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ множество всех линейных комбинаций векторов a_1, a_2, ..., a_k. Множество $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ называют линейной оболочкой векторов a_1, a_2, ..., a_k.*

Теорема 9.1. *Пусть L — линейное пространство над P, $a_i \in L$, $i = 1, 2, \dots, k$. Линейная оболочка $\mathcal{L}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ является линейным подпространством пространства L.*

◀ Пусть $a \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ и $b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$. Покажем, что $a + b \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ и $\lambda a \in \mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$.

Действительно,
$$a = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i, \quad b = \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i,$$

тогда

$$a + b = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i + \sum_{i=1}^{k} \beta_i a_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta_i) a_i \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \quad \text{и}$$

$$\lambda a = \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=1}^{k} (\lambda \lambda_i) a_i \overset{\lambda\lambda_i = \mu}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \mu_i a_i \in \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k). \quad \blacktriangleright$$

Очевидно, что

1) для любого набора индексов $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant k$ $\mathcal{L}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})$ является подпространством $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$.

2) для любой перестановки $p \in P_k$

$$\mathcal{L}\left(a_{p(1)}, a_{p(2)}, \ldots, a_{p(k)}\right) = \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k).$$

Определение 9.5. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется линейно зависимой, если среди векторов системы существует вектор, являющийся линейной комбинацией остальных.*

Привести пример линейно зависимой системы очень просто. Действительно, возьмем a_1, a_2 — произвольные векторы пространства L, положим $a_3 = 2a_1 + (-3)a_2$. Ясно, что $\{a_1, a_2, a_3\}$ линейно-зависимая система.

Построение линейно-независимых систем и проверка на линейную независимость, как правило, более сложная задача.

Сейчас мы рассмотрим простой, но очень важный пример.

В пространстве $\mathbb{R}_4$ рассмотрим набор векторов $\vec{e}_1 = (1,0,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1,0)$, $\vec{e}_4 = (0,0,0,1)$. Покажем, что $e_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4$ — линейно независимая система. Предположим противное, т. е. что какой–то из векторов $\vec{e}_j$ является линейной комбинацией остальных, но у $\vec{e}_j$ j–я координата равна 1. Линейно комбинируя остальные векторы системы e_1, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$, мы будем получать векторы, j–я координата которых равна 0, значит скомбинировать из таких векторов $\vec{e}_j$ невозможно. Это и доказывает линейную независимость системы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$ в $\mathbb{R}_4$.

Теорема 9.2. *Система векторов a_1, a_2, ..., a_k линейно-независима тогда и только тогда, когда равенство*

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k \;=\; \overline{0} \tag{9.4}$$

выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$.

◀ Пусть a_1, ..., a_k — линейно назависимая система векторов, а равенство (9.4) достигается на наборе λ_1, λ_2, ..., λ_k, в котором $\lambda_{i_0} \neq 0$, но тогда из (9.4) получаем

$$\begin{aligned} a_{i_0} \;=\; &\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{i0}}\right) a_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_{i0}}\right) a_2 + \cdots + \left(-\frac{\lambda_{i_0-1}}{\lambda_{i0}}\right) a_{i_0-1} + \\ &+ \left(-\frac{\lambda_{i_0+1}}{\lambda_{i0}}\right) a_{i_0+1} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_k}{\lambda_{i0}}\right) a_k, \end{aligned}$$

что противоречит линейной независимости системы a_1, a_2, ..., a_k.

Докажем теперь, что если система линейно зависима, то равенство (9.4) достигается не только на нулевом наборе λ_1, λ_2, ..., λ_k. Действительно, если a_{j_0} является линейной комбинацией остальных векторов, т. е.

$$a_{j_0} \;=\; \beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{j_0-1} a_{j_0-1} + \beta_{j_0+1} a_{j_0+1} + \cdots + \beta_k a_k, \quad \text{то}$$
$$\beta_1 a_1 + \cdots + \beta_{j_0-1} a_{j_0-1} + (-1) a_{j_0} + \beta_{j_0+1} a_{j_0+1} + \cdots + \beta_k a_k \;=\; \overline{0},$$

а набор $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{j_0-1}, -1, \beta_{j_0+1}, \ldots, \beta_k$ не нулевой. ▶

9.2 Размерность и базис линейного пространства

По своему строению линейные пространства можно разбить на два типа.

Определение 9.6.

1. *Линейное пространство L называется бесконечномерным, если для любого натурального m в L существует хотя бы одна линейно независимая система, состоящая из m векторов.*
2. *Линейное пространство L называется конечномерным, если существует такое натуральное N_L, что любая система векторов из L, содержащая N_L+1 или более элементов, линейно зависима.*

Определение 9.7. *Размерностью конечномерного линейного пространства L называют наименьшее натуральное N_L, удовлетворяющее п. 2 определения 9.6. Размерность L обозначают $\dim L$.*

В случае, когда L — бесконечномерное пространство, полагают $\dim L = \infty$, в случае, когда $L = \{0\}$, полагают $\dim \{0\} = 0$.

Что означает, что $\dim L = n$? Из определения 9.7 следует, что в L существует хотя бы одна линейно независимая система векторов a_1, a_2, …, a_n, а всякая система из векторов b_1, b_2, …, b_n, b_{n+1} линейно зависима.

Определение 9.8. *Пусть $\dim L = n < \infty$. Базисом L называется линейно независимая система a_1, a_2, …, a_n. Ясно, что*

1) *если $0 < \dim L < \infty$, то в пространстве существует хотя бы один базис;*
2) *все базисы линейного пространства L содержат одинаковое число элементов — $n = \dim L$.*

Теорема 9.3 (О базисе линейного пространства). *Пусть L — линейное пространство и $0 < n = \dim L < \infty$, a_1, a_2, …, a_n — базис L, тогда любой вектор a линейного пространства L может быть единственным образом разложен по базису, т. е. представлен в виде линейной комбинации базисных векторов, т. е.*

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n. \tag{9.5}$$

◀ Рассмотрим систему векторов a_1, a_2, …, a_n, a. Из определения размерности и базиса следует, что эта система векторов линейно зависима. Покажем, что вектор a является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, …, a_n. Допустим, что это не так, но тогда среди векторов a_i должен быть вектор, являющийся линейной комбинацией остальных. Обозначим его a_{i_0}, тогда

$$a_{i_0} = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{i_0-1} a_{i_0-1} + \beta_{i_0+1} a_{i_0+1} + \cdots + \beta_n a_n + \beta_{n+1} a. \tag{9.6}$$

В равенстве (9.6) $\beta_{n+1} \neq 0$, так как иначе мы имели бы, что вектор a_{i_0} является в системе $\{a_i\}_{i=1}^n$ линейной комбинацией остальных, что противоречит ее линейной независимости.

Учитывая, что $\beta_{n+1} \neq 0$, из (9.6) мы можем получить, что

$$a = \left(-\frac{\beta_1}{\beta_{n+1}}\right) a_1 + \left(-\frac{\beta_2}{\beta_{n+1}}\right) a_2 + \cdots + \left(-\frac{\beta_{i_0-1}}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0-1} + \\ + \left(\frac{1}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0} + \left(-\frac{\beta_{i_0+1}}{\beta_{n+1}}\right) a_{i_0+1} + \cdots + \left(-\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\right) a_n.$$

Последнее противоречит нашему допущению о том, что вектор a не является линейной комбинацией базисных векторов.

Покажем теперь единственность представления (9.5). Допустим противное, т. е. что в L существует такой вектор a, у которого по крайней мере два представления (9.5):

$$\begin{aligned} a &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, && (9.6') \\ a &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, && (9.6'') \\ (\alpha_{11}, \alpha_{21} \ldots, \alpha_{n1}) &\neq (\alpha_{12}, \alpha_{22} \ldots, \alpha_{n2}). \end{aligned}$$

Из равенств (9.6′) и (9.6″) получаем

$$(\alpha_{11} - \alpha_{12})\, a_1 + (\alpha_{21} - \alpha_{22})\, a_2 + \cdots + (\alpha_{n1} - \alpha_{n2})\, a_n = \overline{0}. \qquad (9.7)$$

Равенство (9.7) противоречит критерию линейной независимости системы векторов (Теорема 9.2). ►

Доказанная теорема позволяет дать следующее определение.

Определение 9.9. *Пусть L — линейное пространство и $0 < n = \dim L < \infty$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в L. Координатами вектора a в данном базисе называется упорядоченный набор чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ такой, что*

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n.$$

Если a — вектор, $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис, то координаты вектора a в базисе $\{e_i\}_{i=1}^n$ будем записывать в виде вектора–столбца и обозначать $(a)_{\{e_i\}}$, т. е.

$$(a)_{\{e_i\}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

$\boxed{З}$ **9.1** Доказать, что векторы $\vec{u}_1 = (1,1,1,1)^t$, $\vec{u}_2 = (1,0,1,1)^t$, $\vec{u}_3 = (1,1,0,1)^t$, $\vec{u}_4 = (1,1,1,0)^t$ образуют базис в $\mathbb{R}_4$ и найти координаты вектора $a = (4,3,3,3)^t$ в этом базисе.

◄ Пусть (x_1, x_2, x_3, x_4) — неизвестные координаты вектора $(a)_{\{u\}}$, тогда $x_1(1,1,1,1) + x_2(1,0,1,1) + x_3(1,1,0,1) + x_4(1,1,1,0) = (4,3,3,3)$. Приравнивая соответствующие координаты, получаем:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 4 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 = 3 \\ 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 3 \end{cases}$$

Переходя к матричной записи, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \underset{\sim}{\begin{array}{c} c_2 := c_1 - c_2 \\ c_3 := c_1 - c_3 \\ c_4 := c_1 - c_4 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{c_1 := c_1 - c_2 - c_3 - c_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ясно, что матрица системы такова, что система совместна и определена при любой правой части, что и означает, что векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ образуют базис и

$$(a)_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleright$$

Заметим, что если L – n–мерное пространство над $\mathbb{R}$, то $(a)_{\{e_i\}_i} \in \mathbb{R}_n$; при этом имеет место:

1) $\forall a, b \in L \quad \left(a \overset{L}{+} b\right)_{\{e_i\}} = (a)_{\{e_i\}} \overset{\mathbb{R}_n}{+} (b)_{\{e_i\}}$;

2) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall a \in L \quad (\lambda a)_{\{e_i\}} = \lambda (a)_{\{e_i\}}$,

т. е. сложению векторов и умножению вектора на число соответствует сложение их координатных векторов и умножение на число координатного вектора в пространстве $\mathbb{R}_n$.

9.3 Изоморфизм линейных пространств

Определение 9.10. *Два линейных пространства L_1 и L_2 над одним числовым полем P называются изоморфными (пишут $L_1 \simeq L_2$), если существует биективное (взаимно однозначное) отображение $\varphi : L_1 \to L_2$, такое, что*

1. $\forall a\ \forall b\ (\in L_1) \quad \varphi\left(a \overset{L_1}{+} b\right) = \varphi(a) \overset{L_2}{+} \varphi(b)$;
2. $\forall \lambda\ (\in P)\ \forall a\ (\in L_1) \quad \varphi(\lambda a) = \lambda \varphi(a)$.

Из замечания, приведенного выше, следует, что все n–мерные линейные пространства над $\mathbb{R}$ изоморфны $\mathbb{R}_n$ (и изоморфны между собой), более того имеет место

Теорема 9.4. *Для того, чтобы два конечномерных пространства над P были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности совпадали:*

$$L_1(P) \simeq L_2(P) \iff \dim L_1 = \dim L_2.$$

◀ ▶

9.4. Матрица перехода от базиса к базису

Пусть L — линейное пространство размерности n и $\{e_i\}_{i=1}^n$ и $\{u_i\}_{i=1}^n$ – два базиса в L, тогда для любого вектора a можно говорить о его координатах в базисах $\{e_i\}$ — $(a)_{\{e_i\}}$ и $\{u_i\}$ — $(a)_{\{u_i\}}$. Установим связь между координатами вектора $(a)_{\{e_i\}}$ и $(a)_{\{u_i\}}$.

Имеем

$$a = a_{1\{e_i\}}e_1 + a_{2\{e_i\}}e_2 + \dots + a_{n\{e_i\}}e_n. \tag{9.8}$$

Разложим векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ по базису $\{u_i\}$:

$$\begin{array}{l} e_1 = e_{11}u_1 + e_{21}u_2 + \dots + e_{n1}u_n \\ e_2 = e_{12}u_1 + e_{22}u_2 + \dots + e_{n2}u_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ e_n = e_{1n}u_1 + e_{2n}u_2 + \dots + e_{nn}u_n \end{array} \tag{9.9}$$

Подставляя соотношения (9.9) в (9.8), получим

$$\begin{aligned} a \;=\; & a_{1\{e_i\}}\left(e_{11}u_1 + e_{21}u_1 + \dots + e_{n1}u_n\right) + \\ & + a_{2\{e_i\}}\left(e_{12}u_1 + e_{22}u_1 + \dots + e_{n2}u_n\right) + \dots + \\ & + a_{n\{e_i\}}\left(e_{1n}u_1 + e_{2n}u_1 + \dots + e_{nn}u_n\right) = \\ = \; & \left(e_{11}a_{1\{e_i\}} + e_{12}a_{2\{e_i\}} + \dots + e_{1n}a_{n\{e_i\}}\right)u_1 + \\ & + \left(e_{21}a_{1\{e_i\}} + e_{22}a_{2\{e_i\}} + \dots + e_{2n}a_{n\{e_i\}}\right)u_2 + \dots + \\ & + \left(e_{n1}a_{1\{e_i\}} + e_{n2}a_{2\{e_i\}} + \dots + e_{nn}a_{n\{e_i\}}\right)u_n. \end{aligned}$$

Или в матричной записи

$$(a)_{\{u_i\}} = \Big((e_1)_{\{u\}} \; (e_2)_{\{u\}} \; \dots \; (e_n)_{\{u\}}\Big) \; (a)_{\{e_i\}}.$$

Матрица, по столбцам которой стоят координаты векторов базиса $\{e_i\}$ в базисе $\{u_i\}$, называется матрицей перехода от базиса $\{e_i\}$ к базису $\{u_i\}$ и обозначается ${}_{\{u_i\}}T_{\{e_i\}}$ $(T_{e_i \to u_i})$. Мы получили формулу:

$$(a)_{\{u_i\}} = {}_{\{u_i\}}T_{\{e_i\}} \, (a)_{\{e_i\}}. \tag{9.10}$$

Очевидно, имеют место свойства:

1) ${}_{\{e_i\}}T_{\{e_i\}} = E$;
2) $\left({}_{\{u_i\}}T_{\{e_i\}}\right)^{-1} = {}_{\{e_i\}}T_{\{u_i\}}$;
3) ${}_{\{f_i\}}T_{\{u_i\}} \cdot {}_{\{u_i\}}T_{\{e_i\}} = {}_{\{f_i\}}T_{\{e_i\}}$.

Как находить матрицу ${}_{\{u\}}T_{\{e\}}$, если сами базисные векторы заданы своими координатами в каком–то базисе $\{f\}$? Ясно, что нужно составить матричное уравнение

$$\left((u_1)_{\{f\}}\ (u_2)_{\{f\}}\ \ldots\ (u_n)_{\{f\}}\ \middle|(e_1)_{\{f\}}\ (e_2)_{\{f\}}\ \ldots\ (e_n)_{\{f\}}\right).$$

Методом Гаусса привести матрицу к виду $(E|\quad)$, тогда матрица, полученная за чертой и будет матрицей ${}_{\{u\}}T_{\{e\}}$.

Контрольные вопросы и задания

1. Образует ли множество вещественных чисел — $\mathbb{R}$ с операциями $+$ и $\cdot$ линейное пространство?
2. Образует ли множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ с операциями $+, \cdot$ линейное пространство?
3. Образует ли множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операциями $+, \cdot$ линейное пространство?
4. Образует ли множество векторов единичной длины подпространство в пространстве V_3?
5. Приведите примеры нетривиальных подпространств пространства V_3; $P_4(\mathbb{R})$; $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
6. Приведите примеры одномерных, двумерных, трехмерных подпространств пространства $\mathbb{R}_n$; $P_5(\mathbb{R})$; $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
7. Докажите, что в $\mathbb{R}_3$ существует бесконечное множество одномерных; двумерных подпространств.
8. Принадлежат ли векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейной оболочке $\mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$?

X

ВЕКТОРЫ. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

10.1. Сумма векторов и умножение вектора на число

В главе 2 мы уже познакомились с понятием вектора — упорядоченной пары точек, способами задания вектора (координаты вектора), его характеристиками (длина, направление). Теперь на множестве векторов (плоскости, пространства) мы определим алгебраические операции.

10.1.1 Умножение вектора на число

Определение 10.1. *Пусть $\vec{a}$ — вектор, $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\lambda\vec{a}$ вектор, определенный следующим:*

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|,$$

направление $\lambda\vec{a}$ совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. (При $\lambda = 0$ $\lambda\vec{a}$ — нуль–вектор, для которого о направлении говорить не приходится.)

О векторе $\lambda\vec{a}$ говорят, что он получен из вектора $\vec{a}$ умножением на λ.

Очевидно, имеют место следующие свойства:

1°. $\lambda \cdot \vec{a} = \vec{0} \iff$ $(\lambda = 0)$ или $(\vec{a} = 0)$.

2°. $(\mu\lambda)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a}) = \lambda(\mu\vec{a})$.

3°. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$.

10.1.2 Сумма векторов

Определение 10.2. *Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$, который определяется следующим: если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$, т. е. сложение векторов происходит по правилу треугольника (см. рис. 10.1, а).*

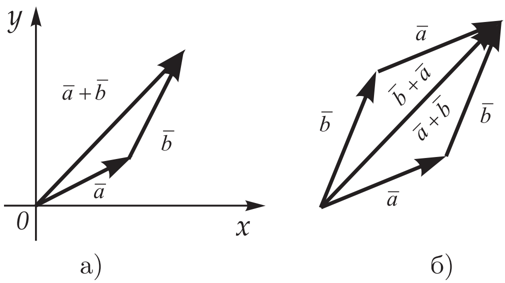


Рис. 10.1

Ясно, что имеют место свойства:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. (см. рис. 10.1, б)

2°. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

3°. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, где $-\vec{a}=-1\cdot\vec{a}$.

4°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$,

т. е. векторы относительно сложения образуют коммутативную группу.

Отметим еще одно свойство операции сложения:

5°. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ — дистрибутивный закон.

Ясно, что если векторы заданы своими координатами, то умножению вектора на число соответствует умножение координат на это число, а сумме векторов — вектор, координаты которого — суммы соответствующих координат слагаемых.

Напомним, что произвольный вектор плоскости (пространства) может быть единственным образом разложен по двум неколлинеарным (трем некомпланарным) векторам, т. е.

$$\vec{d} \;=\; d_a\cdot\vec{a}+d_b\cdot\vec{b}+d_c\cdot\vec{c}. \tag{10.1}$$

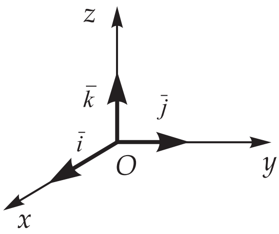


Рис. 10.2.

Коэффициенты d_a, d_b, d_c называются координатами вектора $\vec{d}$ при его разложении по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Если рассматривается декартова система координат и на координатных осях введены единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, соответственно (см. рис. 10.2), то

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j} + z_a \cdot \vec{k}, \qquad (10.2)$$

где x_a, y_a, z_a — декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

10.2 Проекция вектора на ось

Определение 10.3. *Проекцией вектора на ось называется величина направленного отрезка (проекция начала вектора; проекция конца вектора) (см. рис. 10.3). Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l обозначается пр$_l\vec{a}$.*

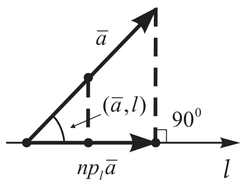


Рис. 10.3.

Очевидно, имеет место формула:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}, l}\right), \qquad (10.3)$$

где $(\vec{a}, l)$ — угол между вектором и осью.

Имеют место следующие свойства проекции:

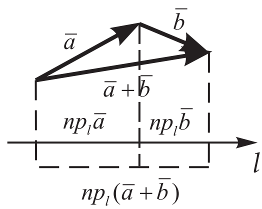


Рис. 10.4.

1) $\text{пр}_l(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_l\vec{a} + \text{пр}_l\vec{b}$ — аддитивность.

2) $\text{пр}_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\text{пр}_l\vec{a}$ — однородность.

3) $\text{пр}_l(\lambda\vec{a} + \mu\vec{b}) = \lambda\text{пр}_l\vec{a} + \mu\text{пр}_l\vec{b}$ — линейность.

Зафиксируем в пространстве декартову систему координат и тройку единичных векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ на координатных осях. Разложим вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \text{пр}_{Ox}\vec{a} \cdot \vec{i} + \text{пр}_{Oy}\vec{a} \cdot \vec{j} + \text{пр}_{Oz}\vec{a} \cdot \vec{k} = \\
&= |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, Ox}\right) \cdot \vec{i} + |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oy}\right) \cdot \vec{j} + |\vec{a}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oz}\right) \cdot \vec{k} = \\
&= |\vec{a}| \left(\cos\left(\widehat{\vec{a}, Ox}\right) \cdot \vec{i} + \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oy}\right) \cdot \vec{j} + \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oz}\right) \cdot \vec{k}\right). \qquad (10.4)
\end{aligned}$$

Вектор $\vec{a}_0 = \cos\left(\widehat{\vec{a}, Ox}\right) \cdot \vec{i} + \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oy}\right) \cdot \vec{j} + \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oz}\right) \cdot \vec{k}$ имеет то же направление, что и вектор $\vec{a}$ (так как вектор $\vec{a}$ получается из него умножением на число $|\vec{a}| \geqslant 0$) и этот вектор имеет единичную длину, действительно

$$|\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{a_0}| \quad \Longrightarrow \quad |\vec{a_0}| = 1.$$

Вектор $\vec{a_0}$ имеет координаты $\left(\cos\left(\widehat{\vec{a}, Ox}\right), \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oy}\right), \cos\left(\widehat{\vec{a}, Oz}\right)\right)$. Они называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$. Учитывая все вышесказанное, имеем:

$$1 = |\vec{a_0}|^2 = \cos^2\left(\widehat{\vec{a}, Ox}\right) + \cos^2\left(\widehat{\vec{a}, Oy}\right) + \cos^2\left(\widehat{\vec{a}, Oz}\right). \tag{10.5}$$

Последнее является обобщением основного тригонометрического тождества $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ на случай пространства.

10.3 Скалярное произведение векторов

Определение 10.4. *Скалярным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b})$ $\left(\vec{a} \cdot \vec{b},\ \vec{a}\vec{b}\right)$ и определяемое равенством*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\left(\widehat{a, b}\right) = np_{\vec{b}}\vec{a} \cdot \left|\vec{b}\right| = np_{\vec{a}}\vec{b} \cdot |\vec{a}|. \tag{10.6}$$

Следствием определения скалярного произведения являются следующие утверждения:

1) Если $|\vec{a}| = 1$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.
2) Если $|\vec{b}| = 1$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.
3) Если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, то $(\vec{a}, \vec{b}) = \cos\left(\widehat{a, b}\right)$.

10.3.1 Свойства скалярного произведения

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a}$ перпендикулярен $\vec{b}$ $(\vec{a} \perp \vec{b})$.

2°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ — симметричность.

3°. $(\lambda\vec{a}, \mu\vec{b}) = \lambda\mu(\vec{a}, \vec{b})$ — однородность по каждому из сомножителей.

4°.

$$\left.\begin{array}{l} (\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{a}, \vec{c}) \end{array}\right\} \text{ — дистрибутивность.}$$

5°. $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \geqslant 0$ $((\vec{a}, \vec{a}) = 0 \iff \vec{a} = 0)$.

Свойства 1–5° или очевидны, или легко доказываются, например

◄4
$$\left(\vec a+\vec b,\vec c\right)\overset{(10.6)}{=}\text{пр}_{\vec c}\left(\vec a+\vec b\right)\cdot|\vec c| = \left(\text{пр}_{\vec c}\vec a+\text{пр}_{\vec c}\vec b\right)\cdot|\vec c| =$$
$$= \text{пр}_{\vec c}\vec a\cdot|\vec c|+\text{пр}_{\vec c}\vec b\cdot|\vec c| \overset{(10.6)}{=} (\vec a,\vec c) + \left(\vec b,\vec c\right).$$
►4

10.3.2 Декартовы координаты вектора и скалярное произведение

Пусть вектор $\vec a$ имеет в декартовой системе координаты (x_a, y_a, z_a), тогда
$$\vec a = x_a\vec i+y_a\vec j+z_a\vec k.$$
Умножим обе части равенства скалярно на векторы $\vec i$, $\vec j$, $\vec k$ соответственно
$$\left(\vec a,\vec i\right)=x_a\underbrace{(\vec i,\vec i)}_{=|i|^2=1}+y_a\underbrace{(\vec j,\vec i)}_{=0}+z_a\underbrace{(\vec k,\vec i)}_{=0}=x_a,$$
$$\left(\vec a,\vec j\right)=x_a\underbrace{(\vec i,\vec j)}_{=0}+y_a\underbrace{(\vec j,\vec j)}_{=|j|^2=1}+z_a\underbrace{(\vec k,\vec j)}_{=0}=y_a,$$
$$\left(\vec a,\vec k\right)=x_a\underbrace{(\vec i,\vec k)}_{=0}+y_a\underbrace{(\vec j,\vec k)}_{=0}+z_a\underbrace{(\vec k,\vec k)}_{=|k|^2=1}=z_a,$$
т. е.
$$\vec a = \left(\vec a,\vec i\right)\vec i+\left(\vec a,\vec j\right)\vec j+\left(\vec a,\vec k\right)\vec k. \tag{10.7}$$
Мы получили выражение декартовых координат вектора через скалярное произведение вектора на единичные орты:
$$\begin{cases} x_a = \left(\vec a,\vec i\right), \\ y_a = \left(\vec a,\vec j\right), \\ z_a = \left(\vec a,\vec k\right). \end{cases} \tag{10.8}$$

10.3.3 Координатная формула для скалярного произведения

Пусть векторы $\vec a$, $\vec b$ даны своими координатами в декартовой системе $\vec a=(x_a,y_a,z_a)$, $\vec b=(x_b,y_b,z_b)$, тогда
$$\left(\vec a,\vec b\right) = \left(x_a\vec i+y_a\vec j+z_a\vec k, x_b\vec i+y_b\vec j+z_b\vec k\right) \underset{\text{и лин.}}{\overset{\text{дистр.}}{=}}$$
$$= x_ax_b\underbrace{\left(\vec i,\vec i\right)}_{=1}+x_ay_b\underbrace{\left(\vec i,\vec j\right)}_{=0}+x_az_b\underbrace{\left(\vec i,\vec k\right)}_{=0}+$$
$$+y_ax_b\underbrace{\left(\vec j,\vec i\right)}_{=0}+y_ay_b\underbrace{\left(\vec j,\vec j\right)}_{=1}+y_az_b\underbrace{\left(\vec j,\vec k\right)}_{=0}+$$
$$+z_ax_b\underbrace{\left(\vec k,\vec i\right)}_{=0}+z_ay_b\underbrace{\left(\vec k,\vec j\right)}_{=0}+z_az_b\underbrace{\left(\vec k,\vec k\right)}_{=1}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b,$$

т. е.

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \tag{10.9}$$

— координатная формула для скалярного произведения.

$\boxed{З}$ **10.1** Даны векторы $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$ $|a| \neq 0$, $|b| \neq 0$. Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

◀ Очевидно, из определения скалярного произведения и формулы (10.10) следует

$$\begin{aligned}\cos(\widehat{a,b}) = \frac{(a,b)}{|a|\cdot|b|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{(a,a)}\cdot\sqrt{(b,b)}} = \\ = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2+z_b^2}}.\end{aligned} \tag{10.10}$$ ▶

10.4 Векторное произведение векторов

Рассмотрим движение твердого тела около неподвижной точки O. Из механики известно, что оно сводится к так называемому мгновенному вращению, которое характеризуется вектором мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}(t)$, направленным вдоль мгновенной оси вращения так, что вращение, наблюдаемое из конца вектора $\vec{\omega}(t)$, происходит против часовой стрелки, а $|\vec{\omega}(t)| = \omega(t)$ — величина угловой скорости (см. рис. 10.5).

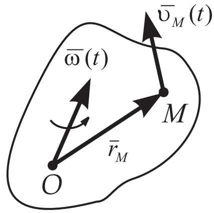


Рис. 10.5.

Пусть $\vec{r}_M$ — радиус–вектор точки M тела, т. е. $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$, тогда вектор мгновенной линейной скорости точки M — $\vec{v}_M(t)$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{\omega}(t)$ и $\vec{r}_M$, образует с ними правую тройку и его длина выражается формулой

$$|\vec{v}_M(t)| = |\vec{\omega}(t)|\cdot|\vec{r}_M(t)|\cdot\sin\left(\widehat{\vec{\omega}(t),\vec{r}_M}\right). \tag{10.11}$$

Решение этой задачи обосновывает целесообразность введения операции векторного произведения векторов.

Определение 10.5. *Векторным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется вектор, обозначаемый $[\vec{a},\vec{b}]$ $\left(\vec{a}\times\vec{b},\ [\vec{a}\times\vec{b}]\right)$, длина которого равна $|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin\left(\widehat{a,b}\right)$, а направление таково, что он ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и образует с ними правую тройку векторов.*

Ясно, что $|[a, b]|$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ как на сторонах.

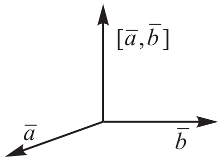


Рис. 10.6.

10.4.1 Свойства векторного произведения

Имеют место следующие свойства векторного произведения:

1° . $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.

2° . $[\vec{a}, \vec{b}] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad$ векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ — коллинеарны.

3° . $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.

3°′. $[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{a}, \vec{c}]$.

4° . $[\lambda\vec{a}, \vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.

4°′. $[\vec{a}, \lambda\vec{b}] = \lambda[\vec{a}, \vec{b}]$.

5° . $[\vec{a}, \vec{a}] = 0$.

Эти свойства следуют из определения векторного произведения и последней фразы предыдущего параграфа.

Составим таблицу векторного умножения единичных ортов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{i}, \vec{i}\right] &= \vec{0}, & \left[\vec{i}, \vec{j}\right] &= \vec{k}, & \left[\vec{i}, \vec{k}\right] &= -\vec{j}, \\
\left[\vec{j}, \vec{i}\right] &= -\vec{k}, & \left[\vec{j}, \vec{j}\right] &= \vec{0}, & \left[\vec{j}, \vec{k}\right] &= \vec{i}, \\
\left[\vec{k}, \vec{i}\right] &= \vec{j}, & \left[\vec{k}, \vec{j}\right] &= -\vec{i}, & \left[\vec{k}, \vec{k}\right] &= \vec{0}.
\end{aligned}$$

Условно это можно записать в таблицу:

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

Пользуясь этой таблицей и свойствами векторного произведения, найдем формулу для выражения векторного произведения через декартовы координаты вектора:

$$
\begin{aligned}
&\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \left[x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}, x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}\right] = \\
&= x_a x_b \underbrace{\left[\vec{i},\vec{i}\right]}_{=0} + x_a y_b \underbrace{\left[\vec{i},\vec{j}\right]}_{=\vec{k}} + x_a z_b \underbrace{\left[\vec{i},\vec{k}\right]}_{=-\vec{j}} + y_a x_b \underbrace{\left[\vec{j},\vec{i}\right]}_{=-\vec{k}} + y_a y_b \underbrace{\left[\vec{j},\vec{j}\right]}_{=0} + \\
&+ y_a z_b \underbrace{\left[\vec{j},\vec{k}\right]}_{=\vec{i}} + z_a x_b \underbrace{\left[\vec{k},\vec{i}\right]}_{=\vec{j}} + z_a y_b \underbrace{\left[\vec{k},\vec{j}\right]}_{=-\vec{i}} + z_a z_b \underbrace{\left[\vec{k},\vec{k}\right]}_{=0} = \\
&= (y_a z_b - z_a y_b)\,\vec{i} + (x_b z_a - x_a z_b)\,\vec{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\,\vec{k} = \\
&\underset{\text{определителей}}{\overset{\text{свойства}}{=}} \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{pmatrix} - \qquad (10.12)
\end{aligned}
$$

— запись векторного произведения в форме определителя 3–го порядка.

$\boxed{\text{П}}$ **10.1** Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках: $A(2,3,1)$, $B(5,6,3)$, $C(7,1,10)$.

◀ Рассмотрим векторы $\overrightarrow{AB} = (5-2, 6-3, 3-1) = (3,3,2)$ и $\overrightarrow{AC} = (7-2, 1-3, 10-1) = (5,-2,9)$. Так как длина вектора $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, то площадь треугольника равна половине длины $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 5 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 31\vec{i} - 17\vec{j} - 21\vec{k}. \\
S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}\sqrt{31^2+17^2+21^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1691} \approx 20,6. \quad ▶
\end{aligned}
$$

Попутно мы получили формулу

$$
\begin{aligned}
&S_{\triangle ABC} = \qquad (10.13) \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} (y_B-y_A) & (z_B-z_A) \\ (y_C-y_A) & (z_C-z_A) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} (x_B-x_A) & (z_B-z_A) \\ (x_C-x_A) & (z_C-z_A) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} (x_B-x_A) & (y_B-y_A) \\ (x_C-x_A) & (y_C-y_A) \end{vmatrix}^2}
\end{aligned}
$$

В случае, когда треугольник ABC лежит в плоскости xOy, формула (10.14) упрощается ($z_A = z_B = z_C = 0$).

$$
S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} (x_B-x_A) & (y_B-y_A) \\ (x_C-x_A) & (y_C-y_A) \end{pmatrix}\right| \qquad (10.14)
$$

10.5. Смешанное произведение векторов

Определение 10.6. *Пусть даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Смешанным произведением векторов называется число, обозначаемое $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ и определяемое формулой*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \overset{\text{def}}{=} \left(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}\right). \tag{10.15}$$

Очевидно, это число равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком «+», если они образуют правую тройку векторов, и со знаком «−», если они образуют левую тройку векторов.

Учитывая формулы для нахождения скалярного и векторного произведения, получаем

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \det\begin{pmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{pmatrix} x_c - \det\begin{pmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{pmatrix} y_c + \\ + \det\begin{pmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{pmatrix} z_c \underset{\text{Лапласа}}{\overset{\text{теорема}}{=}} \det\begin{pmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{pmatrix}. \tag{10.16}$$

Ясно, что справедливы следующие свойства смешанного произведения:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — компланарные векторы.

2) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.

$\boxed{\text{П}}$ **10.2** Найти объем пирамиды с вершинами $O(0,0,0)$, $A(5,2,0)$, $B(2,5,0)$, $C(1,2,4)$.

◀ Известно, что $V_{\text{пирамиды } OABC} = \frac{1}{6} V_{\text{параллелепипеда} \overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}\overrightarrow{OC}}$. Значит

$$V_{\text{пир. } OABC} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right)\right| = \\ = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot 4(25 - 4) = 14 \quad (\text{куб. ед.})$$ ▶

Попутно мы получили формулу:

$$V_{\text{пир. } SABC} = \frac{1}{6}\left|\det\begin{pmatrix} x_A - x_S & y_A - y_S & z_A - z_S \\ x_B - x_S & y_B - y_S & z_B - z_S \\ x_C - x_S & y_C - y_S & z_C - z_S \end{pmatrix}\right|. \tag{10.17}$$

10.6. Прямая и плоскость в пространстве

10.6.1 Уравнения плоскости

Положение плоскости П в пространстве можно задать, указав вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ $(\neq \vec{0})$ – вектор нормали к ней и точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Pi$.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, тогда

$$M \in \Pi \quad \Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{MM_0} \perp \vec{n} \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{MM_0}, \vec{n}\right) = 0.$$

Соотношение

$$\left(\overrightarrow{MM_0}, \vec{n}\right) = 0 \tag{10.18}$$

можно считать векторным уравнением плоскости П. Переходя к координатам, получаем

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \tag{10.19}$$

Это уравнение называется *уравнением плоскости, проходящей через заданную точку и имеющей заданный вектор нормали.*

Преобразуем уравнение (10.19):

$$Ax + By + Cz + \underbrace{(Ax_0 + By_0 + Cz_0)}_{= D} = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

$$Ax \; + \; By \; + \; Cz \; + \; D \; = \; 0. \tag{10.20}$$

Уравнение (10.20) называется *общим уравнением плоскости.*

В случае, когда $D = 0$, плоскость проходит через начало координат, в противном случае — не проходит через начало координат.

Если в общем уравнении $A = 0$, то плоскость параллельна оси Ox, если $B = 0$ — оси Oy, $C = 0$ — оси Oz; если $A = 0$ и $B = 0$, плоскость параллельна плоскости xOy; $A = 0$ и $C = 0$ — плоскости xOz; $B = 0$ и $C = 0$ — плоскости yOz.

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — три различные точки в плоскости П, не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, тогда $M(x, y, z) \in \Pi \Longleftrightarrow$ векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1, M_3}$ компланарны $\Longleftrightarrow$

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) \; = \; 0 \tag{10.21}$$

Переходя к координатам, получаем

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \; = \; 0 \tag{10.22}$$

Последнее уравнение называют *уравнением плоскости, проходящей через три точки.*

По аналогии с прямой на плоскости, уравнение плоскости, пересекающей координатные оси в точках $(a, 0, 0)$; $(0, b, 0)$; $(0, 0, c)$ имеет вид
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \tag{10.23}$$
и называется *уравнением плоскости в отрезках на осях.*

Если обозначить через p расстояние от начала координат до плоскости, а через $n_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ единичный вектор нормали к плоскости ($\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1$, α, β, γ — углы между $\vec{n}_0$ и положительным направлением координатных осей Ox, Oy, Oz), то точка $M_0(p\cos\alpha, p\cos\beta, p\cos\gamma) \in \Pi$, являясь основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на Π.

Составим уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и имеющей вектор нормали n_0 (10.19)

$$\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \cos\beta(y - p\cos\beta) + \cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0 \Leftrightarrow$$
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p\underbrace{(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}_{=|n_0|^2=1} = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \tag{10.24}$$

Последнее и называют *нормальным уравнением плоскости.*

$\boxed{\text{З}}$ **10.2** Найти расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости.
◀ Повторяя рассуждения, проведенные для прямой на плоскости, в этом случае получаем:

$$\begin{aligned}\rho(M_0, \Pi) &= |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},\end{aligned} \tag{10.25}$$

где $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ — нормальное уравнение плоскости Π, а $Ax + By + Cz + D = 0$ — общее уравнение плоскости Π. ▶

Имеет место и теорема о разделении пространства плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ на два полупространства, в одном из которых $Ax + By + Cz + D$ больше нуля, а в другом $Ax + By + Cz + D$ меньше нуля.

10.6.2 Прямая в пространстве

Положение прямой $\mathcal{L}$ в пространстве можно задать, указав точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ и направляющий вектор $\vec{l} = (m, n, p)$, $\vec{l} \neq 0$ этой прямой.

Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка, тогда $M(x, y, z) \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow$ векторы $\vec{l}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны $\Longleftrightarrow$

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad m^2 + n^2 + p^2 \neq 0. \tag{10.26}$$

Уравнения (10.26) называются каноническими уравнениями прямой, проходящей через заданную точку и имеющей заданный направляющий вектор. Обозначив значение отношения в (10.26) t ($\in \mathbb{R}$), получим

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = t \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \tag{10.27}$$

Уравнения (10.27) называют параметрическими уравнениями прямой. Как и для прямой на плоскости, в случае, когда $|\vec{l}| = 1$ параметр t — внутренняя координата на прямой относительно начала в точке M_0.

Мы знаем из элементарной геометрии, что прямая может быть задана как пересечение плоскостей. Пусть $\Pi_1 \colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\Pi_2 \colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — плоскости. Условие их пересечения состоит в том, что $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ — непараллельны, т. е. координаты векторов нормалей плоскости не должны быть пропорциональны, тогда система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{10.28}$$

и определяет прямую $\mathcal{L}$, по которой они пересекаются. Очевидно, что в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ этой прямой можно взять вектор, определенный следующим:

$$\vec{l} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2], \qquad \text{т. е.} \tag{10.29}$$

$$\vec{l} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \tag{10.29'}$$

Точку, принадлежащую прямой $\mathcal{L}$, которая задана (10.28), можно найти как частное решение системы (10.28).

$\boxed{\text{П}}$ **10.3** Найти расстояние от точки $M_0(1,1,1)$ до прямой $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L} \quad : \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

◀ **Первое решение.** Составим уравнение плоскости П, проходящей через точку $M_0 \perp \mathcal{L}$. Ясно, что $\vec{n}_{\text{пл}} = \vec{l} = (2,3,4)$. Тогда П:$2(x-1) + 2(y-1) + 4(z-1) = 0$.

Найдем точку M_1 пересечения прямой $\mathcal{L}$ и плоскости П. Для этого перейдем к параметрическим уравнениям $\mathcal{L}$:

$$\begin{cases} x = \ \ 1 + 2t, \\ y = -2 + 3t, \\ z = \ \ 2 + 4t \end{cases}$$

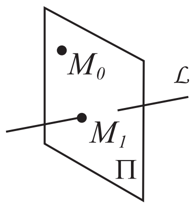


Рис. 10.7.

и подставим правые части параметрических уравнений в уравнение плоскости П.

$$2(1+2t-1) + 3(-2+3t-1) + 4(2+4t-1) = 0$$
$$4t - 9 + 9t + 4 + 16t = 0 \iff 29t = 5; \quad t = \frac{5}{29};$$
$$M_1 = \left(\frac{39}{29}, -\frac{43}{29}, \frac{78}{29}\right)$$

$$d(M_0, \mathcal{L}) = \rho(M_0, M) = \sqrt{\left(1 - \frac{39}{29}\right)^2 + \left(1 + \frac{43}{29}\right)^2 + \left(1 - \frac{78}{29}\right)^2} =$$
$$= \frac{\sqrt{100 + 72^2 + 48^2}}{29} = \frac{\sqrt{7588}}{29} \approx \frac{87,12}{29} \approx 3.$$

Второе решение. Найдем расстояние от точки M_0 до текущей точки $M(t)$ на $\mathcal{L}$.

$$\rho(M_0, M(t)) = \sqrt{(1+2t-1)^2 + (-2+3t-1)^2 + (2+4t-1)^2} =$$
$$= \sqrt{4t^2 + (3t-3)^2 + (4t-1)^2} = \sqrt{29t^2 - 10t + 10}.$$

Найдем значение t, при котором значение расстояния минимально:

$$\begin{aligned} f(t) &= 29t^2 - 10t + 10; \\ f'(t) &= 2 \cdot 29 \cdot t - 10 = 0; \qquad t_{min} = \frac{5}{29}; \\ d(M_0, \mathcal{L}) &= \sqrt{\frac{29 \cdot 25}{(29)^2} - \frac{10 \cdot 5}{29} + 10} = \sqrt{\frac{25}{29} + 10} \approx 3. \end{aligned}$$ ▶

10.7 Поверхности второго порядка

10.7.1 Понятие об общем уравнении поверхности второго порядка и его упрощении

Определение 10.7. *Поверхностью второго порядка называют множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению вида*

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz+ \\ + 2Gx + 2Ly + 2Mz + N = 0, \end{aligned} \tag{10.30}$$

в котором $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + F^2 \neq 0.$

Уравнение (10.30) называют *общим уравнением поверхности второго порядка.* Заметим, что, как и в плоском случае (см. гл. II), может оказаться, что этому уравнению не будут удовлетворять координаты ни одной (или одной) точки пространства. Если совершить преобразование декартовых координат (параллельный перенос осей и поворот), то уравнение (10.30) изменит свой вид, оставаясь уравнением второго порядка, но будет задавать ту же поверхность, как геометрический объект. Как и для кривых 2–го порядка, можно показать, что для каждого уравнения вида (10.30) можно найти специальную систему декартовых координат, в которой оно примет наиболее простой вид, позволяющий исследовать форму этой поверхности. Такой вид уравнений поверхностей 2–го порядка принято называть каноническим.

После полного исследования всех возможных канoничес–ких уравнений, полученных после упрощения уравнения (10.30), можно убедиться, что существуют 17 типов поверхностей 2–го порядка, среди которых есть мнимые, а также распадающиеся на пару плоскостей. Мы ограничимся изучением вещественных нераспадающихся поверхностей второго порядка.

10.7.2 Исследование формы поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям

Эллипсоид

Определение 10.8. *Эллипсоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10.31}$$

где a, b, c — положительные числа, в некоторой декартовой системе координат.

Исследуем форму эллипсоида.

1. Так как уравнение (10.31) содержит только чётные степени x, y, z, то координатные плоскости служат плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат является его центром симметрии.
2. Из уравнения (10.31) следует, что $\dfrac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, $\dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $\dfrac{z^2}{c^2} \leqslant 1$. Значит, $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $|z| \leqslant c$. Это означает, что эллипсоид — ограниченная поверхность, расположенная внутри параллелепипеда: $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$. Точки пересечения эллипсоида с осями координат $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$, $B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, $C_1(0,0,-c)$, $C_2(0,0,c)$ называют вершинами эллипсоида.
3. Дальнейшее исследование формы эллипсоида проведем методом параллельных сечений, выясняя форму линий пересечения его с плоскостями, параллельными одной из координатных плоскостей.

Рассмотрим линии L_h пересечения эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскости xOy, $z = h$ $(|h| < c)$:

$$L_h \ : \ \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases} \tag{10.32}$$

Из (10.32) следует, что в плоскости $z = h$ L_h задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}. \tag{10.33}$$

В правой части уравнения (10.33) стоит положительное число. Разделив на него обе части уравнения (10.33) и обозначив

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}},$$

запишем уравнение (10.33) в виде:

$$\frac{x^2}{(a^*)^2} + \frac{y^2}{(b^*)^2} = 1,$$

а это уравнение эллипса, причем, чем ближе $|h|$ к c, тем меньше размеры этого эллипса.

Аналогично, сечения эллипсоида плоскостями $y = h$ $(|h| < b)$ и $x = h$ $(|h| < a)$ также представляют собой эллипсы.

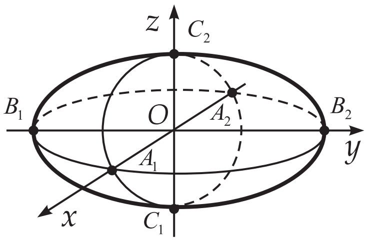


Рис. 10.8.

Используя всё сказанное, можно представить себе пространственную форму эллипсоида (см. рис. 10.8).

Если a, b, c — попарно не равны друг другу, то эллипсоид называют трёхосным. Если, например, $a = b$, то эллипсоид можно получить, вращая эллипс с осями $|B_1B_2| = 2b$ и $|C_1C_2| = 2c$ вокруг оси Oz. Такой эллипсоид называют *эллипсоидом вращения.* Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в сферу $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ с центром в начале координат и радиусом a.

Однополостный гиперболоид

Определение 10.9. *Однополостным гиперболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{10.34}$$

в некоторой декартовой системе координат.

Исследуем форму однополостного гиперболоида.

1. Из уравнения (10.34) следует, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии однополостного гиперболоида, а начало координат — центром его симметрии.
2. Найдём точки пересечения поверхности (10.34) с осями координат;

$$\text{с осью } Ox \ : \begin{cases} y &= 0 \\ z &= 0 \\ x^2 &= a^2 \end{cases}, \quad \text{или } A_1(-a, 0, 0) \text{ и } A_2(a, 0, 0);$$

$$\text{с осью } Oy \ : \begin{cases} x &= 0 \\ z &= 0 \\ y^2 &= b^2 \end{cases}, \quad \text{или } B_1(0, -b, 0) \text{ и } B_2(0, b, 0);$$

Из уравнения (10.34) следует, что точек пересечения с осью Oz нет.

3. Далее используем метод параллельных сечений. Рассмотрим линии L_h пересечения поверхности (10.34) с плоскостями $z = h$. В этой плоскости линия L_h задается уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$
Обозначив
$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}, \quad b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$
запишем последнее уравнение в виде
$$L_h : \frac{x^2}{a^{*2}} + \frac{y^2}{b^{*2}} = 1. \tag{10.35}$$
Уравнение (10.35) задает эллипс. При $h = 0$ полуоси этого эллипса $a_0^* = a$ и $b_0^* = b$ — самые маленькие. Этот эллипс называют горловым эллипсом однополостного гиперболоида.

Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $x = h$ или $y = h$ всегда представляют собой гиперболы, в частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ — это гиперболы
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{10.36}$$
Таким образом, однополостный гиперболоид состоит из одной полости и имеет вид трубки, расширяющейся в положительном и в отрицательном направлении оси Oz (см. рис. 10.9).

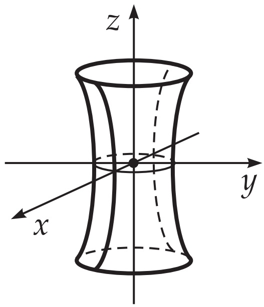


Рис. 10.9.

Как и в случае эллипсоида, когда $a = b$, уравнения (10.35) будут задавать окружности и однополостный гиперболоид можно получить вращением одной из гипербол (10.36) вокруг оси Oz. Такой гиперболоид называют однополостным гиперболоидом вращения.

Заметим еще один интересный факт. Однополостный гиперболоид покрыт двумя семействами прямых линий (прямолинейных образующих), целиком лежащих на нем. Действительно, рассмотрим два семейства прямых, заданных как линии пересечения плоскостей:
$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 - \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right) \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases}$$

где $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$.

Уравнение (10.34) есть следствие каждой из этих систем (результат перемножения уравнений систем) при любых λ, μ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$). Это означает, что любая точка прямой из этих семейств лежит на однополостном гиперболоиде.

Двуполостный гиперболоид

Определение 10.10. *Двуполостным гиперболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{10.37}$$

в некоторой декартовой системе координат.

Исследуем форму двуполостного гиперболоида.

1. Из уравнения (10.37) видно, что координатные плоскости служат плоскостями симметрии поверхности, а начало координат — её центром симметрии.
2. Найдем точки пересечения с осями координат. С осью Oz двуполостный гиперболоид пересекается в точках $C_1(0, 0, -c)$ и $C_2(0, 0, c)$. Эти точки называют его вершинами. Очевидно, с осями Ox и Oy точек пересечения нет. Более того, из уравнения (10.37) следует $|z| \geqslant c$, т. е. между плоскостями $z = \pm c$ нет точек поверхности. Это говорит о том, что поверхность состоит из двух частей (полостей), отсюда происходит название поверхности.
3. Далее применяем метод параллельных сечений. Рассмотрим линии L_h пересечения поверхности (10.37) с плоскостями $z = h$ ($|h| > c$). В каждой такой плоскости L_h задается уравнением:
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1,$$
Обозначив
$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$
запишем последнее уравнение в виде:
$$L_h : \frac{x^2}{{a^*}^2} + \frac{y^2}{{b^*}^2} = 1. \tag{10.38}$$

Уравнение (10.38) задает эллипс. Чем больше $|h|$, тем больше размеры этого эллипса.

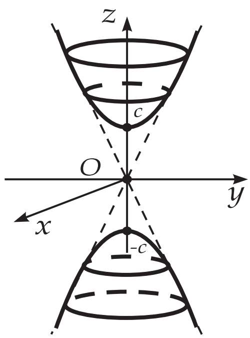


Рис. 10.10.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $x = h$, $y = h$ всегда представляют собой гиперболы, в частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$:

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \tag{10.39}$$

На основании сказанного можно составить представление о форме двуполостного гиперболоида (см. рис. 10.10).

Если в уравнении (10.37) $a = b$, то поверхность можно получить вращением одной из гипербол (10.39) вокруг оси Oz.

Эллиптический параболоид

Определение 10.11. *Эллиптическим параболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad q, p > 0, \tag{10.40}$$

в некоторой декартовой системе координат.

Исследуем форму эллиптического параболоида.

1. Так как в уравнение (10.40) координаты x, y входят в четных степенях, то поверхность имеет две плоскости симметрии: xOz и yOz.

2. Из определения следует, что поверхность проходит через начало координат и целиком располагается выше плоскости xOy (т. к. $z = x^2/2p + y^2/2q \geqslant 0$).

3. Сечения поверхности (10.40) плоскостями $z = h$, $h > 0$ — эллипсы

$$L_h \ : \ \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^{*2}} + \dfrac{y^2}{b^{*2}} = 1, \end{cases}$$

где $a^* = \sqrt{2ph}$, $b^* = \sqrt{2qh}$. Размеры эллипсов L_h увеличиваются при увеличении h.

Сечения поверхности (10.40) плоскостями $y = |h|$ и $x = |h|$ являются параболами. В частности, сечения плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ — это параболы

$$x^2 = 2pz \quad \text{и} \quad y^2 = 2qz.$$

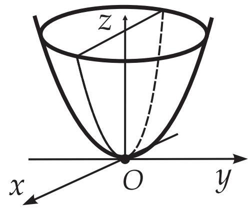


Рис. 10.11.

Представление о форме эллиптического параболоида дает рисунок 10.11.

При $p = q$ получаем параболоид вращения.

Гиперболический параболоид

Определение 10.12. *Гиперболическим параболоидом называют поверхность, задаваемую уравнением*

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad q, p > 0, \tag{10.41}$$

в некоторой декартовой системе координат.

Исследуем форму этой поверхности.

1. Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии: xOz и yOz. Поверхность проходит через начало координат.
2. Сечения L_h плоскостями, параллельными плоскости xOz :

$$L_h : \begin{cases} y = h, \\ x^2 = 2pz + p\dfrac{h^2}{q}. \end{cases}$$

   В плоскости $y = h$ L_h является параболой. Заметим, что все эти параболы имеют одинаковый параметр p и ветви их направлены вверх.

   Сечения плоскостями, параллельными плоскости yOz.

$$M_h : \begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + q\dfrac{h^2}{p}. \end{cases}$$

   В плоскости $x = h$ кривая M_h является параболой. Все эти параболы имеют одинаковый параметр q, и ветви их направлены вниз.

Сечения плоскостями, параллельными плоскости xOy.

$$N_h \ : \ \begin{cases} z \ = \ h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} \ = \ 2h. \end{cases}$$

При $h = 0$ это две пересекающиеся прямые $x = \pm\frac{p}{q}y$, при $h \neq 0$ кривые N_h являются гиперболами.

Из всех названных поверхностей гиперболический параболоид имеет наиболее сложную форму, а именно, форму «седла» (рис. 10.12).

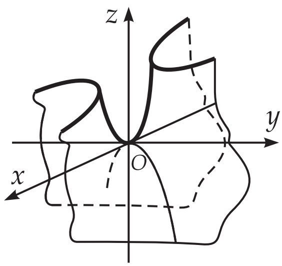


Рис. 10.12.

Поверхность (10.41) замечательна еще и тем, что на ней целиком лежат два семейства прямых линий, среди которых и названные ранее $x = \pm\frac{p}{q}y$. Такие прямые носят название прямолинейных образующих, а задать их можно как линии пересечения плоскостей:

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu, \end{cases} \qquad (10.42)$$

$$\lambda^2 + \mu^2 \ \neq \ 0.$$

Действительно, уравнение (10.41) есть следствие каждой из систем уравнений (10.42) (результат перемножения уравнений системы).

Цилиндры второго порядка

Определение 10.13. *Поверхность называется цилиндрической, если через каждую её точку проходит прямая линия (образующая), принадлежащая поверхности, параллельная заданной прямой и пересекающая заданную кривую (называемую направляющей цилиндрической поверхности).*

Следующая теорема позволяет по уравнению узнавать цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными одной из осей координат, и направляющей, лежащей в координатной плоскости, ортогональной этой оси.

Теорема 10.1. *Уравнением $F(x, y) = 0$ в пространстве задается цилиндрическая поверхность S с образующими, параллельными оси Oz, и направляющей линией γ, заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в плоскости xOy.*

◀ Действительно, если точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, то $F(x_0, y_0) = 0$. Координаты любой точки прямой M_0M_0', $M_0' = (x_0, y_0, 0)$ также удовлетворяют уравнению поверхности S (см. рис. 10.13), кривая

$$\gamma\ :\ \begin{cases} z\ =\ 0 \\ F(x, y)\ =\ 0 \end{cases}$$

принадлежит S и прямые вида M_0M_0' проходят через γ. ▶

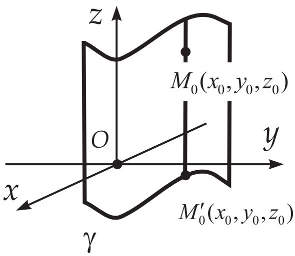


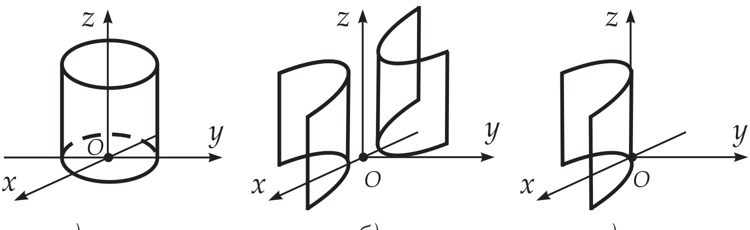
Рис. 10.13.

Выбирая теперь в качестве направляющих линий кривые второго порядка, можно получить уравнения цилиндров второго порядка:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}\ =\ 1$ — эллиптический цилиндр (рис. 10.14, а) ниже);

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}\ =\ 1$ — гиперболический цилиндр (рис. 10.14, б) ниже);

$y^2\ =\ 2px$ — параболический цилиндр (рис. 10.14, в) ниже).



а) *б)* *в)*

Рис. 10.14

Конусы второго порядка

Определение 10.14. *Конической поверхностью называют поверхность, образованную прямыми линиями, проходящими через заданную точку пространства (вершину) и пересекающими заданную кривую (направляющую), не содержащую вершину.*

В отличие от цилиндров второго порядка, если в качестве направляющей конической поверхности выбирать любую кривую второго порядка, то при специальном выборе системы координат уравнение такого конуса будет иметь один и тот же вид. Поэтому эллипс, гиперболу, параболу иногда называют коническими сечениями. Более точно этот факт сформулирован в следующей теореме:

Теорема 10.2. *Уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{10.43}$$

задается коническая поверхность с вершиной в начале координат.

◀ Действительно, если в качестве направляющей в плоскости $z = h$ выбрать эллипс:

$$\gamma : \begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2}, \end{cases}$$

то легко проверить, что координаты X, Y, Z любой точки M прямой OM_0 (точка $M_0 \in \gamma$) удовлетворяют уравнению (10.43) (см. рис. 10.15):

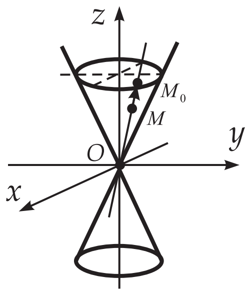


Рис. 10.15.

$$OM_0 : \begin{cases} X = x_0 t \\ Y = y_0 t \\ Z = ht \end{cases},$$

тогда

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{a^2} = t^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - \frac{h^2}{c^2} \right) = 0.$$

Заметим, что в сечениях этой поверхности (10.43) плоскостями, параллельными xOy, лежат эллипсы. Если пересекать эту поверхность плоскостями, параллельными какой-нибудь образующей, то получим параболы. Если же секущая плоскость пересекает обе полости конуса (например, плоскость параллельна оси Oz), то в сечении будет получена гипербола. ▶

10.8 О проблеме обоснования метода координат и оснований геометрии

Лежащий в основе аналитической геометрии метод координат на первый взгляд вводится весьма естественно. На самом деле даже введение координат на прямой требует своего обоснования: тот факт, что каждой точке прямой можно поставить в соответствие некоторое вещественное число и что координаты всех точек исчерпывают всё множество вещественных чисел, вовсе не очевиден.

Обоснование метода координат на прямой производится с помощью системы аксиом элементарной геометрии. Напомним, что система аксиом делится на пять групп.

Группа I содержит три (восемь) аксиом принадлежности планиметрии (стереометрии). Например, к группе I относится аксиома: каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая, которой принадлежат обе эти точки.

Группа II содержит три (четыре) аксиомы порядка планиметрии (стереометрии). Например, к этой группе относится аксиома: среди трех точек одной прямой существует не более одной точки, лежащей между двумя другими.

Группа III содержит пять аксиом конгруэнтности, например: если отрезки $A'B'$ и $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB, то они конгруэнтны между собой.

Группа IV содержит две аксиомы непрерывности (аксиома Архимеда и аксиома линейной полноты).

С помощью этих четырех групп аксиом можно обосновать координатный метод, используемый в аналитической геометрии.

Однако в системе аксиом есть еще одна, из группы V, которая играет фундаментальную роль в обосновании самой геометрии. Это аксиома параллельности: в плоскости, определяемой прямой a и точкой A вне прямой, существует не более одной прямой, проходящей через A и не пересекающей a.

Много столетий (со времен Евклида) геометры разных стран пытались доказать, что аксиома параллельности есть следствие аксиом I–IV групп, посвящая этому всю свою жизнь. История знает, сколько человеческих трагедий было на этом пути. В 1826 г. русский геометр Н. И. Лобачевский сделал доклад о своем открытии, одном из самых революционных в науке. Результат Лобачевского: если к аксиомам I–IV присоединить утверждение, отрицающее аксиому Евклида, то геометрия, построенная на этой системе аксиом, будет логически непротиворечива. Эту геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», а впоследствии ее назвали неевклидовой геометрией Лобачевского.

Какая же геометрия имеет большее право на реальное отражение материального мира? Уже сам Лобачевский ставил вопрос об экспериментальной проверке своей геометрии. Дело в том, что на малых расстояниях заметить разницу в фактах евклидовой геометрии и геометрии Лобачевского практически невозможно. Так, например, утверждением, эквивалентным аксиоме Лобачевского, является: сумма внутренних углов треугольника меньше 2π. Так вот, если рассмотреть треугольник со сторонами, сравнимыми с расстоянием от Земли до Солнца, то сумма его внутренних углов будет меньше 2π всего лишь на $0'', 0003$, т. е. на десятитысячные доли секунды.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое направляющие косинусы вектора?
2. Запишите формулу для вычисления длины вектора в декартовых координатах.
3. Используя смешанное произведение векторов, запишите условие принадлежности четырех точек одной плоскости.
4. Каковы особенности расположения плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, если:

   а) $D=0$; б) $C=0$; в) $B=0$;

   г) $A=0$; д) $C=0$ и $B=0$; е) $A=0$ и $C=0$;

   ж) $A=0$ и $B=0$.
5. Что можно сказать о расположении плоскости
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$
6. Прямая задана параметрическими уравнениями, плоскость задана общим уравнением. Запишите

   а) условие перпендикулярности прямой и плоскости;

   б) условие их параллельности;

   в) условия принадлежности прямой к плоскости.
7. Назовите поверхности второго порядка, которые

   а) имеют один центр симметрии;

   б) не имеют центра симметрии;

   в) имеют бесчисленное множество центров симметрии.

XI

РАНГ МАТРИЦЫ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

11.1. Ранг матрицы и его определения

Сейчас будет введена и изучена одна числовая характеристика матрицы — ранг матрицы. Эта характеристика позволит находить размерности и базисы линейных пространств и подпространств, заданных как линейные оболочки систем векторов.

Определение 11.1. *Пусть A — матрица размера $n \times m$. Столбцовым рангом матрицы A называется величина*

$$\operatorname{rank}_c A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}\left((A)_{\square 1}, (A)_{\square 2}, \ldots, (A)_{\square n}\right),$$

т. е. столбцовый ранг — это максимальное число линейно независмых столбцов матрицы A.

Определение 11.2. *Строчным рангом матрицы A называется величина*

$$\operatorname{rank}_l A \stackrel{\text{def}}{=} \dim \mathcal{L}\left((A)_{1\square}, (A)_{2\square}, \ldots, (A)_{m\square}\right),$$

т. е. строчный ранг — это максимальное число линейно независимых строк матрицы A.

Определение 11.3. *Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $1 \leqslant k \leqslant \min(m,n)$. Минором k–го порядка матрицы A называется определитель подматрицы порядка k, полученной выбором элементов, стоящих на пересечении каких–либо k строк и каких–либо k столбцов.*

Определение 11.4. *Минорным рангом матрицы A называется величина, обозначаемая $\operatorname{rank}_m A$, равная максимальному порядку минора матрицы A, отличного от нуля.*

Что означает, что $\operatorname{rank}_m A = 8$? Это означает, что среди миноров 8–го порядка матрицы A есть минор, отличный от нуля, а все миноры более высоких порядков (если таковые имеются) равны нулю.

Замечание 11.1:

1. Если в матрице A все миноры порядка s равны нулю, то в матрице A все миноры более высоких порядков $(s+1,\ s+2,\ \ldots)$ также равны нулю. Это следует из теоремы Лапласа о вычислении определителя разложением по какой-либо строке или столбцу.
2. Если $\mathrm{rank}_m\, A = r$, то среди миноров, начиная с порядка 1 до порядка r включительно, существует хотя бы по одному минору, отличному от нуля, а все миноры порядка $r+1$ равны нулю.

Из определений 11.1, 11.2, 11.4 следует, что

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}_c(A) &= \mathrm{rank}_l(A^t),\\ \mathrm{rank}_l(A) &= \mathrm{rank}_c(A^t),\\ \mathrm{rank}_m(A) &= \mathrm{rank}_m(A^t),\\ \mathrm{rank}_m(A) &\leqslant \min(m,n). \end{aligned} \tag{11.1}$$

$\boxed{\text{П}}$ **11.1** Пусть

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ -1 & -2 & -3\\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Найти $\mathrm{rank}_l\, A$, $\mathrm{rank}_m\, A$, $\mathrm{rank}_c\, A$.

◄ Найдем минор 2–го порядка, полученный выбором 2–ой и 3–ей строки, 1–го и 3–го столбцов:

$$M_{2,3}^{1,3}(A) \ = \ \det\begin{pmatrix} 4 & 6\\ -1 & -3 \end{pmatrix} \ = \ -12+6 \ = \ -6.$$

Найдем минор 3–го порядка, полученный выбором из матрицы A 2–ой, 3–ей и 4–ой строки и 1–го, 2–го и 3–го столбцов:

$$M_{2,3,4}^{1,2,3}(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6\\ -1 & -2 & -3\\ -4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \overset{c_1:=c_1}{\underset{\substack{c_2:=c_2\\ c_3:=c_3+c_1}}{=}} \det\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6\\ -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Простой анализ матрицы A из примера 11.1 показывает, что $\mathrm{rank}_l\, A = 2$, $\mathrm{rank}_m\, A = 2$, $\mathrm{rank}_c\, A = 2$, так как

$$(A)_{\square 3} = \begin{pmatrix} 3\\ 6\\ -3\\ -6 \end{pmatrix} = -1\cdot(A)_{\square 1} + 2\cdot(A)_{\square 2} = -1\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -1\\ -4 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2\\ 5\\ -2\\ -5 \end{pmatrix}. \ ►$$

Теорема 11.1. *Пусть* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, *тогда*

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant \min(m,n), \tag{11.2}$$
$$\operatorname{rank}_l(A) \leqslant \min(m,n). \tag{11.3}$$

◀ Докажем (11.2). $\operatorname{rank}_c(A) = \dim \mathcal{L}((A)_{\square 1},\ (A)_{\square 2},\ \ldots,\ (A)_{\square n})$. Линейная оболочка в правой части построена на n векторах, значит ее размерность не превосходит n, т. е. мы получили, что

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant n. \tag{11.4}$$

Сами столбцы матрицы A являются элементами пространства $\mathbb{R}_m$, но тогда их линейная оболочка является подпространством $\mathbb{R}_m$ и значит

$$\operatorname{rank}_c(A) = \dim \mathcal{L}\left((A)_{\square 1}, (A)_{\square 2}, \ldots, (A)_{\square n}\right) \leqslant \dim \mathbb{R}_m = m,$$

т. е.

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant m. \tag{11.5}$$

Из (11.4) и (11.5) получаем

$$\operatorname{rank}_c(A) \leqslant \min(m,n).$$

Докажем теперь оценку (11.3):

$$\operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_c(A^t) \overset{(11.2)}{\leqslant} \min(m,n) = \min(n,m). \quad ▶$$

Заметим, что оценки (11.2) и (11.3) могут быть как точными, так и неточными. Действительно, если к матрице дописать нулевые строки и столбцы, то ее ранг не изменится, а размеры и $\min(m,n)$ увеличатся.

Сейчас мы докажем, что для любой матрицы A имеет место равенство:

$$\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A) = \operatorname{rank}_m(A) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank}(A).$$

Теорема 11.2. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{rank}_c(A) = \operatorname{rank}_l(A)$$

◀ Пусть $\operatorname{rank}_c(A) = p$, $\operatorname{rank}_l(A) = q$. Нужно доказать, что $p = q$. Покажем, что варианты а) $p > q$ и б) $q > p$ приводят к противоречию. Рассмотрим вариант а). $\operatorname{rank}_c(A) = p$ означает, что в матрице A

существует p линейно независимых столбцов и любые $p+1$ столбец линейно зависимы. Обозначим через i_1, i_2, …, i_p номера линейно независимых столбцов ($1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leqslant n$). $\mathrm{rank}_c(A^t) = q$ означает (см. (11.1)), что в матрице A существует q линейно независимых строк и любые $q+1$ строки линейно зависимы. Образуем матрицу A', включив в нее из матрицы A столбцы с номерами i_1, i_2, …, i_p

$$A' \;=\; \left((A)_{i_1\square}, (A)_{i_2\square}, \ldots, (A)_{i_p\square}\right).$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $A'x = 0$ с p неизвестными и применим к ней метод Гаусса. Получим

$$A'_{\text{привед}}x \;=\; 0. \tag{11.6}$$

В матрице $A'_{\text{привед}}$ не более q ненулевых строк, значит в системе (11.6) не более q главных неизвестных и значит не менее чем $p-q$ свободных неизвестных, таким образом однородная система линейных уравнений $A'x = 0$ имеет ненулевые решения.

Пусть $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, …, $x_p = \alpha_p$ — какое–нибудь ненулевое решение этой системы уравнений, тогда мы имеем

$$A' \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

— верное равенство, или

$$\alpha_1(A)_{\square i_1} + \alpha_2(A)_{\square i_2} + \cdots + \alpha_p(A)_{\square i_p} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает линейную зависимость столбцов матрицы A с номерами i_1, i_2, …, i_p, что противоречит их выбору. Итак, мы доказали, что вариант $\mathrm{rank}_c(A) > \mathrm{rank}_l(A)$ невозможен.

Перейдем к рассмотрению варианта б). Соотношения (11.1) показывают, что вариант б) для матрицы A — это вариант а) для матрицы $B = A^t$, а невозможность такого варианта для любой матрицы мы уже доказали. ▶

Теорема 11.3. *Имеет место равенство*

$$\mathrm{rank}_c(A) \;=\; \mathrm{rank}_l(A) \;=\; \mathrm{rank}_m(A) \;\stackrel{\text{def}}{=}\; \mathrm{rank}\, A.$$

◀ Пусть $\mathrm{rank}_c(A) = \mathrm{rank}_l(A) = p$. Покажем, что в матрице A есть минор порядка p отличный от нуля, а все миноры порядка $p+1$ (а значит и более высоких порядков (см. замечание 11.1) равны нулю.

Обозначим через i_1, i_2, $\ldots$, i_p номера линейно независимых строк, j_1, j_2, $\ldots$, j_p номера линейно независимых столбцов. Ясно, что

$$M^{j_1, j_2, \ldots, j_p}_{i_1, i_2, \ldots, ß_p} \neq 0.$$

Любой минор порядка $p+1$ содержит элементы $(p+1)$–ой строки матрицы A, а любые $p+1$ строки матрицы A линейно зависимы, а в линейно зависимом наборе присутствует строка, являющаяся линейной комбинацией остальных строк, но тогда такой минор обращается в ноль по критерию равенства нулю определителя (см. гл. VI, § 6.4, свойство 11°). ▶

11.2. Вычисление ранга

В главе V § 5.2 мы ввели гауссовы преобразования уравнений СЛУ. Преобразования такого же типа, выполняемые со строками или столбцами матрицы, будем называть гауссовыми преобразованиями матриц.

Теорема 11.4. *Пусть матрица A' получена из матрицы A с помощью гауссовых преобразований, тогда*

$$\mathrm{rank}(A') = \mathrm{rank}(A).$$

◀ Нетрудно проверить, что если система векторов $\vec{a}'_1$, $\vec{a}'_2$, $\ldots$, $\vec{a}'_k$, получена из $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_k$ гауссовыми преобразованиями, то $\dim \mathcal{L}(\vec{a}'_1, \vec{a}'_2, \ldots, \vec{a}'_k) = \dim \mathcal{L}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Это и гарантирует сохранение ранга при гауссовых преобразованиях. ▶

Теорема 11.5. *Пусть $A_{\text{привед}}$ — приведенная матрица, полученная из матрицы A гауссовыми преобразованиями, которые выполняются при решении системы линейных уравнений методом исключения неизвестных, тогда $\mathrm{rank}\, A$ равен числу ненулевых строк в приведенной матрице $A_{\text{привед}}$.*

◀ Из теоремы 11.4 следует, что достаточно доказать, что $\mathrm{rank}(A_{\text{привед}})$ равен числу ее ненулевых строк.

Образуем матрицу из ненулевых строк $A_{\text{привед}}$ и столбцов, в которых проводилось исключение. С точностью до перемены местами столбцов эта матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \square_{11} & & & & \\ 0 & \square_{22} & & & \\ 0 & 0 & \square_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \square_{rr} \end{pmatrix},$$

где $\square_{ii}$ — ненулевые элементы. Ясно, что ее определитель отличен от нуля. Все миноры матрицы $A_{\text{привед}}$ более высокого порядка равны нулю, так как обязательно содержат нулевую строку. Значит,

$\operatorname{rank} A \overset{\text{т. } 11.4}{=} \operatorname{rank} A_{\text{привед}} = \operatorname{rank}_m(A_{\text{привед}}) =$ «числу её ненулевых строк». ▶

$\boxed{\text{П}}$ **11.2** Найти размерность $\mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$ и его базис, если $\vec{a}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 0, -1, 2)$.

◀ Образуем матрицу, по столбцам которой стоят векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ и методом Гаусса найдем ее ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\dim \mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4) = \operatorname{rank} A = 3$. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют базис. Из вида матрицы $A_{\text{привед}}$ следует, что и векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_4$ образуют базис $\mathcal{L}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3, \vec{a}_4)$. ▶

Следствие (из теоремы 11.5*).* Число ненулевых строк в матрице $A_{\text{привед}}$ не зависит от способа приведения матрицы A.

◀ Действительно, по теореме 11.5 число ненулевых строк в матрице $A_{\text{привед}}$ равно рангу матрицы A. ▶

11.3. Приложения понятия «ранг матрицы»

Очень удобно применять введенное понятие для анализа систем линейных уравнений.

Теорема 11.6 (Кронекера-Капелли). *Для того, чтобы система линейных уравнений $Ax = b$ была совместной, необходимо и достаточно, чтобы*

$$r = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b),$$

причем, если $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = n =$ *«числу неизвестных», система имеет единственное решение, а если $r < n$, то система имеет бесчисленное множество решений.*

◀ Следует из неизменности ранга при гауссовых преобразованиях матриц и метода исключения неизвестных. ▶

В случае однородных систем линейных уравнений вопрос совместности не возникает, так как

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(A \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

и если $\operatorname{rank} A$ равен числу неизвестных, то система имеет только нулевое решение, а если $\operatorname{rank} A$ меньше числа неизвестных, то ОСЛУ имеет и ненулевые решения.

11.4 Пространство решений ОСЛУ

Теорема 11.7. *Пусть $Ax = 0$ — однородная система линейных уравнений с n неизвестными и $r = \operatorname{rank} A$. Множество решений ОСЛУ образует линейное пространство, являющееся подпространством $\mathbb{R}_n$, его размерность равна $n - r$.*

◀ Пусть $\vec{x}$ и $\vec{y}$ – решения однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$.

Покажем, что для любых вещественных α, β $\vec{r} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y}$ также является решением ОСЛУ. Действительно,

$$A\vec{r} = A(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha A\vec{x} + \beta A\vec{y} = \alpha \cdot \vec{0} + \beta \cdot \vec{0} = \vec{0}.$$

Этим самым доказано, что множество решений однородной системы линейных уравнений является подпространством. Для того, чтобы вычислить его размерность, мы найдем его базис.

Определение 11.5. *Фундаментальной системой решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений называется базис пространства ее решений.*

Укажем процедуру, гарантирующую построение ФСР. Применим к ОСЛУ $Ax = 0$ метод исключения неизвестных. Возможны два варианта:

а) $\operatorname{rank} A = r = n$, где n — число неизвестных. Тогда по доказанному пространство решений ОСЛУ тривиально $\{\vec{0}\}$, его размерность равна 0, ФСР — пуста.

б) $r < n$, тогда метод исключения определил r главных неизвестных и $n - r$ свободных неизвестных. При необходимости изменим нумерацию неизвестных так, чтобы x_1, x_2, $\ldots$, x_r были главными, а x_{r+1}, $\ldots$, x_n — свободными. Построим $n - r$ частных решений, придавая свободным неизвестным следующие наборы значений: для первого частного решения $x_{r+1} = 1$, $x_{r+2} = x_{r+3} = \cdots = x_n = 0$, для второго — $x_{r+1} = 0$, $x_{r+2} = 1$, $x_{r+3} = \cdots = x_n = 0$, $\ldots$, для последнего ($n - r$–го) — $x_{r+1} = \cdots = x_{n-1} = 0$, $x_n = 1$. Ясно, что ранг матрицы, образованной из этих решений, равен $n - r$. Значит построенные частные решения ОСЛУ линейно независимы.

Обозначим полученный набор решений $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{n-r}$. Для доказательства базисности этого набора нам осталось доказать, что любое решение $\vec{x}$ ОСЛУ $Ax = 0$ можно представить в виде линейной комбинации решений $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\ldots$, $\vec{x}_{n-r}$.

Пусть

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

покажем, что

$$\vec{x} = \alpha_{r+1}\vec{x}_1 + \alpha_{r+2}\vec{x}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{x}_{n-r}. \tag{11.7}$$

Действительно, правая часть в (11.7) является решением однородной системы линейных уравнений $Ax = 0$ (как линейная комбинация решений), и свободные неизвестные в правой части (11.7) принимают значения α_{r+1}, α_{r+2}, $\ldots$, α_n соответственно, т. е. те же, что и в решении $\vec{x}$. Но значения главных неизвестных в решении однозначно определяются значениями свободных неизвестных. Следовательно, в правой части (11.7) $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \alpha_2$, $\ldots$, $x_r = \alpha_r$. Последнее и доказывает равенство (11.7). ►

$\boxed{\text{П}}$ **11.3** Найти ФСР и общее решение системы $Ax = 0$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \end{pmatrix}$$

◄ Применим метод исключения неизвестных

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_2:=c_2 \\ c_3:=c_3+c_2}}{\overset{c_1:=c_1+c_2}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} x_1, x_2 & \text{глав. неизв.} \\ x_3, x_4 & \text{своб. неизв.} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Фундаментальная система решений:

x_1	x_2	x_3	x_4
-1	0	1	0
0	-1	0	1

$$x_{\text{общ}} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}. \qquad ►$$

Контрольные вопросы и задания

1. Что можно сказать о матрице, если её ранг равен нулю?

2. Изменится ли ранг матрицы при транспонировании? Почему?

3. Что можно сказать о СЛУ, если

   а) $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A|b)$,

   б) $\operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(A|b)$?

4. Почему $\operatorname{rank}(A)$ не может быть больше $\operatorname{rank}(A|b)$?

5. Сколько ФСР имеет неопределенная ОСЛУ?

6. Что можно сказать о рангах матриц $A,\ B$, если $A,\ B \in M_{n\times n}(R)$ и $\det(A \cdot B) = 0$?

XII

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ (ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА)

12.1. Скалярное произведение в $\mathbb{R}_n$

Мы уже знакомы со скалярным произведением в геометрических пространствах векторов плоскости (V_2) и трехмерного пространства (V_3) и знаем, что

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos\varphi. \tag{12.1}$$

Нами были получены формулы для вычисления скалярного произведения векторов, заданных своими координатами в базисе $\vec{i}$, $\vec{j}$ на плоскости и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ в пространстве, где $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$ и $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — попарно ортогональные векторы, эти формулы имеют вид:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b \tag{12.2}$$

в V_2 и

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b \tag{12.3}$$

в V_3 соответственно.

По аналогии с формулами (12.2) и (12.3) введем в линейном пространстве $\mathbb{R}_n$ n–мерных векторов с базисом $\vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$ скалярное произведение формулой

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \stackrel{\text{def}}{=} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n, \tag{12.4}$$

где

$$\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n,$$
$$\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n) = b_1 e_1 + b_2 e_2 + \cdots + b_n e_n.$$

Пространство $\mathbb{R}_n$, с введенным в нём скалярным произведением обозначим V_n.

Очевидно, введенное формулой (12.4) скалярное произведение, обладает свойствами:

1°. $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}), \quad \forall \vec{a},\ \forall \vec{b} \in V_n.$

2°. $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$

3°. $(\lambda \vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{a}, \vec{b}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall \vec{a},\ \forall \vec{b} \in V_n.$

4°. $(\vec{a}, \vec{a}) \geqslant 0, \quad \forall \vec{a} \in V_n.$

5°. $(\vec{a}, \vec{a}) = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} = 0.$

После такого введения скалярного произведения в V_n возникает «элементарная» геометрия.

Определение 12.1. *Длиной вектора $\vec{a} \in V_n$ называется величина, обозначаемая $\|\vec{a}\|$ и определяемая равенством:*

$$\|\vec{a}\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}. \tag{12.5}$$

Определение 12.2. *Определим расстояние между точками A, B в V_n формулой*

$$\rho(A, B) \overset{\text{def}}{=} \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \overset{(12.5)}{=} \sqrt{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right)} \overset{(12.4)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}, \tag{12.6}$$

где $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Определение 12.3. *Косинус угла между векторами $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$, $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$, $\vec{b} \neq 0$ введем формулой*

$$\cos \varphi_{\vec{a}\,\vec{b}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\left(\vec{a}, \vec{b}\right)}{\|\vec{a}\| \cdot \left\|\vec{b}\right\|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}} \tag{12.7}$$

Появление угла между векторами (формула (12.7)) порождает понятие «ортогональность векторов».

Определение 12.4. *Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ в пространстве V_n называются ортогональными (обозначение $\vec{a} \perp \vec{b}$), если*

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0.$$

Замечание 12.1 Ясно, что из свойств 1–5° скалярного произведения в V_n следует, что нуль-вектор $(\vec{0})$ ортогонален любому вектору.

◀ Действительно,

$$\left(\vec{a},\vec{0}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}+\left(-\vec{b}\right)\right) \overset{1^\circ}{=} \left(\vec{b}+\left(-\vec{b}\right),\vec{a}\right) \overset{2^\circ}{=} \left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(-\vec{b},\vec{a}\right) =$$
$$= \left(\vec{b},\vec{a}\right)+\left(-1\cdot\vec{b},\vec{a}\right) \overset{3^\circ}{=} \left(\vec{b},\vec{a}\right)+(-1)\cdot\left(\vec{b},\vec{a}\right) =$$
$$= \left(\vec{b},\vec{a}\right)-\left(\vec{b},\vec{a}\right) = 0. \quad ▶$$

12.2 Евклидовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского

12.2.1 Евклидовы пространства

Пусть L — линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$.

Определение 12.5. *Скалярным произведением называется отображение $f : L\times L \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее следующим свойствам:*

1°. $f(x,y) = f(y,x)$, $\quad\forall x,\ \forall y(\in L)$ *(симметричность).*
2°. $f(x+y,z) = f(x,z)+f(y,z)$, $\quad\forall x,\ \forall y,\ \forall z(\in L)$ *(аддитивность по первой переменной).*
3°. $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y) \quad \forall\lambda\in\mathbb{R},\ \forall x\in L$ *(однородность по первой переменной).*
4°. $f(x,x)\geqslant 0 \quad \forall x\in L.$
5°. $f(x,x)=0 \iff x=0.$

Определение 12.6. *Евклидовым пространством $\mathcal{E}$ называется линейное пространство L над полем вещественных чисел с введенным в нем скалярным произведением векторов $f(x,y)$.*

Как видно, мы в определении скалярного произведения аксиоматизировали свойства 1–5° скалярного произведения в V_n (см. (12.4)).

Обычно, как и в случае V_n $(\mathbb{R}_n)$, вместо обозначения $f(x,y)$ для скалярного произведения применяют обозначение (x,y).

Замечание 12.2 Если в пространстве L над $\mathbb{R}$ удается ввести хотя бы одно скалярное произведение $(x,y)_{N_1}$, то на нем можно ввести сколь угодно скалярных произведений. Действительно, например, $(x,y)_{N_2} \overset{\text{def}}{=} 2(x,y)_{N_1}$

удовлетворяет условиям 1–5° определения 12.5 и значит является скалярным произведением.

Замечание 12.3 Из симметричности скалярного произведения и его аддитивности и однородности по первой переменной следует его аддитивность и однородность по второй переменной. (Докажите это самостоятельно.)

Как задать в конечномерном пространстве L_n над $\mathbb{R}$ скалярное произведение?

Зафиксируем в L_n, $n = \dim L$ какой–нибудь базис $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Обозначим через (x, y) скалярное произведение в L_n, которое мы хотим определить.

Пусть

$$\begin{aligned}(x)_{\{f\}} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t,\\ (y)_{\{f\}} &= (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t\end{aligned}$$

— координаты векторов x и y в этом базисе, тогда

$$\begin{aligned}(x, y) &= (x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n, y_1 f_1 + y_2 f_2 + \cdots + y_n f_n) = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f_i, \sum_{j=1}^{n} y_j f_j \right) \underset{\text{и замечание 12.3}}{\overset{\text{св-ва } 2^\circ, 3^\circ \text{ скал.произ.}}{=}} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \,(f_i, f_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (A)_{ij},\end{aligned} \tag{12.8}$$

где $(A)_{ij} \overset{\text{def}}{=} (f_i, f_j)$.

Если мы потребуем, чтобы $(A)_{ij} = (A)_{ji}$, то свойства 1°–3° скалярного произведения, определенного произвольной симметричной $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ по формуле (12.8), будут выполнены (обеспечены).

Матрица A должна дополнительно удовлетворять условиям:

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (A)_{ij} \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{12.9}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j (A)_{ij} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0 \tag{12.10}$$

Неравенство (12.9) обеспечит выполнение свойства 4° для скалярного произведения, а равенство (12.10) – свойство 5°.

Замечание 12.4 Скалярное произведение, введенное с помощью симметрической матрицы A, удовлетворяющей условиям (12.9), (12.10), компактно записывается в матричном виде:

$$(x, y) = (x)^t_{\{f\}} \, A \, (y)_{\{f\}} .$$

Замечание 12.5 Введение скалярного произведения с помощью симметрической матрицы, удовлетворяющей условиям (12.9), (12.10), это фактически задание скалярного произведения на всевозможных парах базисных векторов ($(A)_{ij} = (f_i, f_j)$).

Так как базисные векторы ненулевые, то необходимо, чтобы $(A)_{ii} = (f_i, f_i) > 0$ — диагональные элементы матрицы A были больше нуля.

Замечание 12.6 Если для произвольного базиса в L_n $\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n\}$ взять в качестве матрицы A единичную матрицу, т. е. положить

$$(f_i, f_j) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

то условия 1–5° для скалярного произведения будут выполнены и формула (12.8) примет вид

$$(x, y) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{12.11}$$

где

$$\begin{aligned} (x)_{\{f\}} \;&=\; (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t\,, \\ (y)_{\{f\}} \;&=\; (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t\,, \end{aligned}$$

т. е. такой же, как для скалярного произведения в $V_n(\mathbb{R}_n)$ (см. формулу (12.4)).

12.2.2 Неравенство Коши-Буняковского

Сейчас будет доказано одно из самых фундаментальных неравенств в теории евклидовых пространств.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ — два произвольных вектора евклидова пространства $\mathcal{E}$, t — произвольное вещественное число. Из свойств скалярного произведения следует, что

$$\left(\vec{a} + t\vec{b}, \vec{a} + t\vec{b}\right) \;\geqslant\; 0.$$

Преобразуем левую часть неравенства, используя линейность и аддитивность скалярного произведения,

$$\left(\vec{b}, \vec{b}\right) t^2 + 2 \left(\vec{a}, \vec{b}\right) t + (\vec{a}, \vec{a}) \;\geqslant\; 0.$$

Мы получили квадратный трехчлен по переменной t, который принимает неотрицательные значения при всех $t \in \mathbb{R}$, значит его дискриминант меньше, либо равен нулю:

$$\mathcal{D} \;=\; \left(\vec{a}, \vec{b}\right)^2 - (\vec{a}, \vec{a}) \left(\vec{b}, \vec{b}\right) \;\leqslant\; 0.$$

Преобразуя последнее неравенство, получаем
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2 \leqslant (\vec{a},\vec{a})\left(\vec{b},\vec{b}\right). \tag{12.12}$$

Вспоминая, что $(\vec{a},\vec{a}) = \|\vec{a}\|^2$, $(\vec{b},\vec{b}) = \|\vec{b}\|^2$, имеем
$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)^2 \leqslant \|\vec{a}\|^2 \cdot \left\|\vec{b}\right\|^2. \tag{12.12$'$}$$

Это неравенство и называют неравенством Коши-Буняковского[1]. Можно доказать, что равенство в нем достигается только в том случае, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллиненарны ($\vec{a} = \lambda\vec{b}$).

Следствием из неравенства Коши–Буняковского является неравенство треугольника в абстрактном евклидовом пространстве:
$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\| \leqslant \|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|. \tag{12.13}$$

◀ $$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + 2\left(\vec{a},\vec{b}\right) + \left(\vec{b},\vec{b}\right) =$$
$$\|\vec{a}\|^2 + 2\left|(\vec{a},b)\right| + \left\|\vec{b}\right\|^2 \leqslant \|a\|^2 + 2\sqrt{(a,\vec{a})}\cdot\sqrt{\left(\vec{b},\vec{b}\right)} + \left\|\vec{b}\right\|^2 =$$
$$= \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\cdot\left\|\vec{b}\right\| + \left\|\vec{b}\right\|^2 = \left(\|\vec{a}\| + \left\|\vec{b}\right\|\right)^2.$$

Здесь для оценки мы применили неравенство Коши-Буняковского.▶

[1]Коши Огюстен Луи (1789–1857) — французский математик, член Парижской академии наук, окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог. Преподавал в Политехнической школе, Сорбонне и Коллеж де Франс. О. Коши был чрезвычайно многосторонним и плодотворням математиком (свыше 800 научных работ). Его «Курс анализа», «Лекции по приложениям анализа к геометрии» стали образцом изложения математического анализа. Коши в области теории функци комплексного переменного принадлежит развитие основ теории аналитических функций, начатое Л. Эйлером и Ж. Даламбером, ему принадлежит знаменитое представление аналитической функции в точке в виде интеграла по кривой, содержащей эту точку (интеграл Коши), разработка теории вычетов и их приложений. Основополагающие результаты О. Коши в области дифференциальных уравнений общеизвестны: постановка одной из важнейших общих задач теории дифференциальных уравнений — задача Коши, основные теоремы существования решений и многое другое.

Буняковский Виктор Яковлевич (1804–1889) — российский математик, член Петербургской АН (с 1830 г.) и ее вице-президент (1864–1889). В 1820–1825 гг. учился в Париже, где преподавали П. Лаплас, Ж. Фурье, С. Пуассон, О. Коши, А. Лежандр и др. В Париже защитил докторскую диссертацию (1825 г.). Преподавал в Петербурге в I–ом кадетском корпусе, морском корпусе, институте путей сообщения, университете. Известны труды по теории чисел, теории вероятностей и статистике. Интегральное неравенство $\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx \geqslant \int_a^b (f(x)\cdot g(x))^2 dx$ называют неравенством Шварца-Буняковского.

Рассмотрим теперь, что будет, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны ($\Leftrightarrow$ $(\vec{a}\vec{b}) = 0$) :

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \left(\vec{a}+\vec{b},\vec{a}+\vec{b}\right) = (\vec{a},\vec{a}) + 2\underbrace{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}_{=0} + \left(\vec{b},\vec{b}\right) =$$
$$= (\vec{a},\vec{a}) + \left(\vec{b},\vec{b}\right) = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2,$$

т. е. если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то

$$\left\|\vec{a}+\vec{b}\right\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \left\|\vec{b}\right\|^2. \tag{12.14}$$

Последнее равенство называют теоремой Пифагора в абстрактном евклидовом пространстве.

12.3. Ортогональный базис. Ортогонализация. Проекция вектора на подпространство. Ортогональная составляющая, расстояние до подпространства

Мы уже заметили, что если в конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ выбран базис $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ такой, что

$$(u_i, u_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \tag{12.15}$$

то скалярное произведение векторов x, y вычисляется через их координаты в этом базисе по очень простой формуле (12.11) — сумма произведений соответствующих координат.

Базис, удовлетворяющий условиям (12.15) называют ортонормированным (так как базисные векторы имеют единичную норму и попарно ортогональны).

Теорема 12.1. *В любом конечномерном евклидовом пространстве существует хотя бы один ортонормированный базис.*

◀ Возьмем в $\mathcal{E}_n$ произвольный базис векторов $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ и применим к нему процесс ортогонализации Гильберта–Шмидта[2], т. е. про-

[2]Гильберт Давид (1862–1943) — выдающийся немецкий математик. Окончил Кенингсбергский университет и 2 года работал в нем профессором, с 1895 г. по 1930 г. — профессор Геттингенского университета. Гильберта по праву считают одним из создаталей современной математики, в том числе теории интегральных уравнений, спектральной теории линейных операторов, важнейшей части функционального анализа. Гильберту принадлежит идея логического обоснования математики, имеющая непреходящее значение и нетривиальное развитие.

Шмидт Эрхард (1876–1959) — немецкий математик, работал в Берменском университете. Основоположник (вместе с Д. Гильбертом) геометрии линейных пространств.

цесс перестроения его в ортонормированный базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Положим
$$e_1 = \frac{f}{\|f_1\|},$$
что обеспечит нормированность вектора e_1 ($\|f_1\| \neq 0$, т. к. $f_1 \neq 0$ как базисный вектор). Построим вектор e_2' в виде $e_2' = f_2 + \alpha_{21} e_1$, где α_{21} ($\in \mathbb{R}$) выберем из условия
$$(e_2', e_1) = 0 \tag{12.16}$$

Для α_{21} из (12.16) получаем
$$(f_2, e_1) + \alpha_{21} \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} = 0$$
или
$$\alpha_{21} = -(f_2, e_1).$$
Значит вектор e_2' определен условием (12.16). Положим
$$e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|},$$
это обеспечит нормированность вектора e_2.

Вектор e_3' будем искать в виде $e_3' = f_3 + \alpha_{31} e_1 + \alpha_{32} e_2$, где α_{31} и α_{32} выберем из условия
$$(e_3', e_1) = 0 \quad \text{и} \quad (e_3', e_2) = 0. \tag{12.17}$$

Из (12.17) с учетом ортогональности векторов e_1 и e_2 получаем
$$\begin{aligned} (e_3', e_1) &= (f_3, e_1) + \alpha_{31} \underbrace{(e_1, e_1)}_{=1} = 0 \\ (e_3', e_2) &= (f_3, e_2) + \alpha_{32} \underbrace{(e_2, e_2)}_{=1} = 0. \end{aligned}$$

тогда, если
$$\begin{aligned} \alpha_{31} &= -(f_3, e_1), \\ \alpha_{32} &= -(f_3, e_2), \end{aligned}$$
то вектор e_3' ортогонален векторам e_1 и e_2. Положим
$$e_3 = \frac{e_3'}{\|e_3'\|},$$
это обеспечит нормированность вектора e_3.

Если с помощью процесса ортогонализации векторы $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k\}$ уже построены, то

$$e'_{k+1} \ = \ f_{k+1} + \alpha_{k+1\ 1}e_1 + \cdots + \alpha_{k+1\ k}e_k$$

и числа $\alpha_{k+1\ 1},\ \alpha_{k+1\ 2},\ \ldots,\ \alpha_{k+1\ k}$ выбираются из условия:

$$\left(e'_{k+1}, e_1\right) = 0,\ \left(e'_{k+1}, e_2\right) = 0,\ \ldots,\ \left(e'_{k+1}, e_k\right) = 0.$$

Учитывая ортонормированность набора $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k\}$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1\ 1} &= -\left(f_{k+1}, e_1\right), \\ \alpha_{k+1\ 2} &= -\left(f_{k+1}, e_2\right), \\ \ldots \quad & \qquad \ldots \\ \alpha_{k+1\ k} &= -\left(f_{k+1}, e_k\right). \end{aligned}$$

Положим

$$e_{k+1} \ = \ \frac{e'_{k+1}}{\left\|e'_{k+1}\right\|},$$

что обеспечит нормированность вектора e_{k+1}.

Покажем, что в результате процесса ортогонализации мы получим базис. Для этого нам достаточно доказать, что полученная система векторов $\{e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n\}$ линейно–независима. Предположим противное, т. е. что существует ненулевой набор чисел $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ $\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0\right)$ такой, что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n \ = \ 0. \tag{12.18}$$

Умножая скалярно обе части равенства (12.18) на $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ соответственно, получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_1) &= 0, \\ (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_2) &= 0, \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad & \ \ldots \\ (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_n) &= 0. \end{aligned} \tag{12.19}$$

Преобразуем i–е равенство из (12.19)

$$0 \ = \ (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n, e_i) \ = \ \sum_{j=1}^n \lambda_j \left(e_j, e_i\right) \underset{\text{нормированности}}{\overset{\text{условие орто-}}{=}} \lambda_i.$$

Итак, мы показали, что $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, а это противоречит нашему допущению $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \neq 0$. ►

Задача 12.1 В конечномерном евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$ задано подпространство $\mathcal{E}'$ и вектор a. Требуется найти проекцию вектора a на подпространство $\mathcal{E}'$ и ортогональную составляющую вектора a к подпространству $\mathcal{E}'$, т. е. представить вектор a в виде

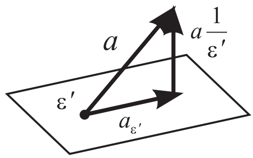


Рис. 11.1.

$$a \;=\; a_{\mathcal{E}'} \;+\; a^{\perp}_{\mathcal{E}'}, \qquad (12.20)$$

где $a_{\mathcal{E}'} \in \mathcal{E}'$, а вектор $a^{\perp}_{\mathcal{E}'}$ ортогонален любому вектору из $\mathcal{E}'$.

◀ Решение задачи получается из простых геометрических соображений и проводится в несколько шагов.

1. Выберем произвольный базис в $\mathcal{E}'$ — $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, расширим его до базиса в $\mathcal{E}_n$ — $\{f_1, f_2, \ldots, f_m, f_{m+1}, \ldots, f_n\}$.

2. Подвергнем базис $\{f_1, \ldots, f_n\}$ процессу ортогонализации. В полученном ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторы $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ образуют ортонормированный базис $\mathcal{E}'$, а векторы $e_{m+1}, \ldots, e_n$ ортогональны подпространству $\mathcal{E}'$.

3. Найдем координаты вектора a в базисе $\{e_i\}$ — $(a)_{\{e_i\}} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^t$, т. е.
$$a \;=\; a_1 e_1 + a_2 \vec{e}_2 + \cdots + a_n e_n.$$

4. Очевидно, что

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{E}'} \;&=\; a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_m e_m, \\ a^{\perp}_{\mathcal{E}'} \;&=\; a_{m+1} e_{m+1} + a_{m+2} e_{m+2} + \cdots + a_n e_n. \end{aligned}$$

▶

Контрольные вопросы и задания

1. Почему в пространстве $\mathbb{R}_2$ нельзя ввести скалярное произведение по формуле:
$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = a_1 b_1 - a_2 b_2\,?$$

2. Докажите, что в неравенстве Коши-Буняковского равенство обеспечивается тогда и только тогда, когда векторы линейно зависимы.

3. Какими особенностями обладает базис в $\mathcal{E}$, если скалярное произведение в координатной форме в нем вычисляется по формуле:
$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \lambda_1 a_1 b_1 + \lambda_2 a_2 b_2 + \cdots + \lambda_n a_n b_n,$$
где все $\lambda_i > 0$?

4. Что такое ортогональная проекция вектора на подпространство? Как найти ортогональную составляющую вектора, если известна его проекция?

5. В чем смысл процесса ортогонализации?

XIII

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

13.1 Линейный оператор

Среди отображений, действующих из линейного пространства L_1 над P в линейное пространство L_2 над P важнейшую роль играют так называемые линейные отображения ($\Leftrightarrow$ линейные операторы).

В большинстве физических задач и задачах других естественных наук в нелинейных случаях стараются задачу линеаризовать ($\Leftrightarrow$ или заменить саму задачу более простой, но с линейным оператором, или приблизить (огрубить) нелинейный оператор линейным).

Определение 13.1. *Отображение $A : L_1 \to L_2$ (L_1, L_2 — линейные пространства над одним полем P) называется линейным оператором, если для него выполнено:*

1°. $A(x + y) = A(x) + A(y) \quad \forall x, y \in L_1$;
2°. $A(\lambda x) = \lambda A(x) \quad \forall \lambda \in P,\ \forall x \in L_1$.

Ясно, что условия 1°, 2° в определении линейного оператора можно заменить на условие

$$A(\lambda x + \mu y) \;=\; \lambda A(x) + \mu A(y), \quad \forall \lambda, \forall \mu \in P,\ \forall x, \forall y \in L_1.$$

$\boxed{\text{П}}$ **13.1** Пусть $L_1 = L_2 = V_2$ $(\mathbb{R}_2)$ — пространство векторов плоскости (координатное пространство $\mathbb{R}_2$). Обозначим через $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ — оператор поворота на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки относительно начала координат. Ясно, что $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ — линейный оператор.

$\boxed{\text{П}}$ **13.2** Пусть $L_1 = L_2$ — произвольное линейное пространство. Обозначим через E тождественный оператор в L_1, т. е.

$$E(x) \overset{\text{def}}{=} x, \qquad \forall x \in L_1.$$

Ясно, что E — линейный оператор.

$\boxed{\text{П}}$ **13.3** Пусть $L_1 = L_2 = P_n(\mathbb{R})$ — линейное пространство многочленов степени, меньшей либо равной n, $n \geqslant 1$ с вещественными коэффициентами. Рассмотрим оператор $\mathcal{D} : P_n \to P_n$ по правилу $(\mathcal{D}f)(x) = f'(x)$, где через $f'(x)$ обозначена производная от многочлена $f(x)$. Из свойств производной, изученных в школе, следует линейность оператора $\mathcal{D}$.

Приведем пример действия оператора $\mathcal{D}$ на конкретный многочлен. Пусть

$$f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 3,$$

тогда

$$(\mathcal{D}f)(x) = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 1.$$

$\boxed{\text{П}}$ **13.4** Пусть L_1, L_2 — произвольные линейные пространства. Обозначим через O нуль–оператор ($O : L_1 \to L_2$), действующий из L_1 в L_2 по правилу

$$O(x) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{0}, \quad \forall x \in L_1.$$

Ясно, что O — линейный оператор.

$\boxed{\text{П}}$ **13.5** Пусть $L_1 = L_2$ — произвольное линейное пространство над P, $\alpha \in P$ — произвольное фиксированное число из P. Обозначим через αE оператор ($\alpha E : L_1 \to L_1$), действующий по правилу

$$\alpha E(x) = \alpha x.$$

Ясно, что оператор αE — оператор умножения на число α — является линейным оператором.

Замечание 13.1 Для линейных операторов вместо записи «$A(x)$» принята запись Ax.

13.2 Линейные операторы в конечномерных пространствах и их матрицы

Пусть L_1 и L_2 — конечномерные пространства над $\mathbb{R}$, $\dim L_1 = n$, $\dim L_2 = m$, $A : L_1 \to L_2$ — линейный оператор.

Зафиксируем в L_1 базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ и в L_2 базис $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_m\}$. Тогда, если $x \in L_1$, то

$$(\vec{x})_{\{\vec{e}\}} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}_n,$$
$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \cdots + x_n\vec{e}_n.$$

Если $y \in L_2$, то

$$(\vec{y})_{\{\vec{f}\}} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^t \in \mathbb{R}_m,$$
$$\vec{y} = y_1\vec{f_1} + y_2\vec{f_2} + \dots + y_m\vec{f_m}.$$

Фиксация базисов $\{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ и $\{\vec{f_1}, \dots, \vec{f_m}\}$ устанавливает изоморфизм пространства L_1 пространству $\mathbb{R}_n$ и пространства L_2 пространству $\mathbb{R}_m$.

Рассмотрим действие оператора A на вектор $\vec{x}$:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= A\left(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n\right) \overset{\text{линейность}}{=} \\ &= x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \dots + x_nA\vec{e}_n. \end{aligned} \tag{13.1}$$

Формула (13.1) показывает, что действие линейного оператора на произвольный вектор пространства фактически определяется его действием на базисные векторы.

Продолжим рассуждения. Векторы $A\vec{e}_1$, $A\vec{e}_2$, $\dots$, $A\vec{e}_n$ являются векторами пространства L_2, и поскольку в L_2 зафиксирован базис $\{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots, \vec{f_m}\}$, их можно разложить по этому базису:

$$\begin{aligned} A\vec{e}_1 &= a_{11}\vec{f_1} + a_{21}\vec{f_2} + \dots + a_{m1}\vec{f_m}, \\ A\vec{e}_2 &= a_{12}\vec{f_1} + a_{22}\vec{f_2} + \dots + a_{m2}\vec{f_m}, \\ \dots & \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ A\vec{e}_n &= a_{1n}\vec{f_1} + a_{2n}\vec{f_2} + \dots + a_{mn}\vec{f_m}, \end{aligned} \tag{13.2}$$

Здесь через a_{ij} обозначена j–я координата вектора Ae_i в базисе $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}, \dots, \vec{f_m}$.

Обозначим через ${}_fA_e$ матрицу размера $m \times n$ с элементами a_{ij}, определенными формулами (13.2). Эта матрица называется матрицей линейного оператора A в паре базисов $\{\vec{e}\}$, $\{\vec{f}\}$.

Подставим формулы (13.2) в (13.1)

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= x_1A\vec{e}_1 + x_2A\vec{e}_2 + \dots + x_nA\vec{e}_n = \\ &= x_1\left(\sum_{i=1}^m a_{i1}\vec{f_i}\right) + x_2\left(\sum_{i=1}^m a_{i2}\vec{f_i}\right) + \dots + x_n\left(\sum_{i=1}^m a_{in}\vec{f_i}\right) = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\vec{f_i}\right) = \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\vec{f_i}\right) = \\ &= \sum_{i=1}^m\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)\vec{f_i}. \end{aligned} \tag{13.3}$$

Нами получено разложение вектора $A\vec{x}$ по базису $\{f\} = \{\vec{f_1},\ \vec{f_2},\ \ldots,\ \vec{f_m}\}$. Значит, в последней сумме в скобках стоит i–я координата вектора $A\vec{x}$ в базисе $\{f\}$ и мы получили следующее:

1. Формулу (13.4), описывающую действие оператора на произвольный вектор $\vec{x}$, когда в L_1 и L_2 зафиксированы базисы.
2. Формула (13.4) может быть истолкована, используя правила умножения матриц, следующим образом:

$$(A\vec{x})_{\{f\}} \; = \; {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot (\vec{x})_{\{e\}}\,, \tag{13.4}$$

   т. е. действие оператора A на координаты вектора $\vec{x}$ свелось к умножению на матрицу ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$ в паре базисов $\{e\}$, $\{f\}$.

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, leftrightarrow, "\{e\}\text{изом.}"'] & L_2 \arrow[d, leftrightarrow, "\{f\}\text{изом.}"] \\ \mathbb{R}_n & \mathbb{R}_m \end{tikzcd}$$

Рис. 13.1

Рассмотрим диаграмму на рис. 13.1.

Фактически оператор умножения вектора столбца $(\vec{x})_{\{e\}}$ на матрицу ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$ (формула (13.4)) замыкает эту диаграмму в рис. 13.2.

Одновременно мы показали, что линейные операторы, действующие из $\mathbb{R}_n$ в $\mathbb{R}_m$, это операторы умножения на матрицу размером $m \times n$.

Что произойдет с матрицей линейного оператора, если изменить пару базисов $\{e\}$, $\{f\}$ на пару $\{e'\}$, $\{f'\}$?

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, "A"] \arrow[d, leftrightarrow, "\{e\}"'] & L_2 \arrow[d, leftrightarrow, "\{f\}"] \\ \mathbb{R}_n \arrow[r, "{}_{\{f\}}A_{\{e\}}"] & \mathbb{R}_m \end{tikzcd}$$

Рис. 13.2

Мы знаем, что

$$\begin{aligned} (\vec{x})_{\{e\}} &= {}_eT_{e'}\,(\vec{x})_{\{e'\}}\,, \\ (\vec{y})_{\{f'\}} &= {}_{f'}T_f\,(\vec{y})_{\{f\}}\,, \end{aligned} \tag{13.5}$$

Подставляя (13.5) в (13.4), получим

$$\begin{aligned} (A\vec{x})_{\{f'\}} \; &= \; {}_{\{f'\}}T_{\{f\}}\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot \left({}_{\{e\}}T_{\{e'\}} \cdot (\vec{x})_{\{e'\}}\right)\right) \; = \\ &= \; \left({}_{\{f\}}T_{\{f'\}} \cdot {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\right) \cdot (\vec{x})_{\{e'\}}\,. \end{aligned} \tag{13.6}$$

С другой стороны, по формуле (13.4) для пары базисов $\{e'\}$, $\{f'\}$ имеем

$$(A\vec{x})_{\{f'\}} \; = \; {}_{\{f'\}}A_{\{e'\}}\,(\vec{x})_{\{e'\}}\,. \tag{13.7}$$

Из (13.6) и (13.7) получаем

$${}_{\{f'\}}A_{\{e'\}} \; = \; {}_{\{f'\}}T_{\{f\}} \cdot {}_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}} \tag{13.8}$$

Формула (13.8) называется *формулой преобразования матрицы линейного оператора при замене базисов.*

13.3. Композиция линейных операторов

Определение 13.2. *Пусть* $A : L_1 \to L_2$ *— линейный оператор,* $B : L_2 \to L_3$ *— линейный оператор. Композицией линейных операторов* A, B *называется оператор, обозначаемый* BA *и действующий из* L_1 *в* L_3 *по правилу*

$$BA\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} B\,(A\vec{x})\,.$$

Пусть L_1, L_2, L_3 — конечномерные пространства. Зафиксируем в L_1 базис $\{e\}$, в L_2 базис $\{f\}$, в L_3 базис $\{g\}$.

Ясно, что BA — линейный оператор и

$$_{\{g\}}\,(BA)_{\{e\}} \;=\; _{\{g\}}B_{\{f\}} \cdot {}_{\{f\}}A_{\{e\}}. \tag{13.9}$$

Формула (13.9) служит еще одним подтверждением «разумности» определения операции умножения матриц.

Замечание 13.2 В литературе вместо обозначения $_{\{f\}}A_{\{e\}}$ для матрицы линейного оператора применяют обозначение $A_{\{e\}\to\{f\}}$. Нам кажется, что в приведенных обозначениях формулы (13.8) и (13.9) выглядят более естественно, кроме этого, студенты, слушавшие лекции по линейной алгебре у одного из авторов этой книги, придумали свое название для этих матриц и формул — «ушастые матрицы и правила обращения с ними».

13.4. Собственные значения и собственные векторы

В этом параграфе мы будем рассматривать только линейные операторы в линейном пространстве L (т. е. действующие из L в L). Самыми «простыми» линейными операторами в L являются операторы умножения на число ($\lambda E,\ \lambda \in P$), для более сложных операторов иногда удается найти такие направления (подпространства в L), в которых действие оператора сводится к умножению на число. Это позволяет ясно представить себе действие линейного оператора в таких подпространствах.

Определение 13.3. *Собственным вектором линейного оператора* A*, действующего в линейном пространстве* L *над* P*, отвечающим собственному значению (⇔ числу)* λ $(\in P)$*, называется* $\underline{\vec{x} \neq 0}$ *(подчеркнутое очень важно), для которого имеет место*

$$A\vec{x} \;=\; \lambda \cdot \vec{x}. \tag{13.10}$$

П 13.6 (тривиальный). Пусть $L\ (\neq \{\vec{0}\})$ — произвольное линейное пространство. λ_0 — фиксированное число из P. Ясно, что оператор $\lambda_0 E$ имеет единственное собственное значение λ_0 и любой ненулевой вектор $\vec{x}$ из L является собственным вектором оператора $\lambda_0 E$.

Следствием этого факта является следующее:

1. Тождественный оператор E в любом пространстве $L\ (\neq \{\vec{0}\})$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$, а все ненулевые векторы пространства — собственные векторы тождественного оператора.

2. Нуль-оператор O $(O\vec{x} = \vec{0}, \forall \vec{x} \in L)$ в любом линейном пространстве $L\ (\neq \{\vec{0}\})$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$, и все ненулевые векторы пространства — собственные векторы нуль–оператора.

П 13.7 Рассмотрим оператор $\mathcal{D}$ примера 13.3. Ясно, что единственым собственным значением оператора дифференцирования в пространстве многочленов над полем вещественных чисел является $\lambda = 0$, и собственными векторами являются многочлены нулевой степени — константы, отличные от нуля.

Замечание 13.3 В определении 13.3 собственным вектором, отвечающим собственному значению λ, назван ненулевой вектор, удовлетворяющий соотношению (13.10), так как нуль–вектор $\vec{0}$ удовлетворяет соотношению (13.10) при любом λ, т. е. для него собственное значение не определено.

Как находить собственные значения и собственные векторы линейного оператора в конечномерном случае? Зафиксируем в пространстве L базис $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, тогда соотношение (13.10) перейдет в

$$_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot (\vec{x})_{\{e\}} \ = \ \lambda\,(\vec{x})_{\{e\}}\,, \tag{13.11}$$

перенося в левую часть, получим

$$\left(_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda\,_{\{e\}}E_{\{e\}}\right)(\vec{x})_{\{e\}} \ = \ \left(\vec{0}\right)_{\{e\}}. \tag{13.12}$$

Учитывая, что $_{\{e\}}E_{\{e\}} = E$ в любом базисе (E — единичная матрица), имеем однородную систему линейных уравнений

$$\left(_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right)(\vec{x})_{\{e\}} \ = \ \vec{0}, \tag{13.12$'$}$$

содержащую параметр λ. Нас интересуют такие значения параметра λ, при которых ОСЛУ ($13.12'$) имеет ненулевые решения. В рассматриваемой ОСЛУ n уравнений и n неизвестных, значит к ней применим критерий наличия ненулевых решений у квадратной однородной системы линейных уравнений (теорема 6.8). Получаем, что ОСЛУ ($13.12'$) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\det\left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right) \;=\; 0. \tag{13.13}$$

Значит собственными значениями оператора A являются те и только те λ, которые являются решениями уравнения (13.13) (λ — обозначение неизвестного).

Определение 13.4. *Уравнение*

$$\det\left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right) \;=\; 0.$$

называется характеристическим уравнением оператора A.

Докажите самостоятельно, что при замене базиса характеристическое уравнение не меняется.

Замечание 13.4 Можно показать, что когда $\dim\, L = n$, характеристическое уравнение является алгебраическим уравнением n–ой степени.

Определение 13.5. *Левая часть характеристического уравнения* (13.13) *называется характеристическим многочленом оператора A.*

Когда собственные значения оператора A найдены, отвечающие им собственные векторы можно найти как решения однородной системы линейных уравнений ($13.12'$).

Замечание. Можно доказать, что если $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ — собственные векторы оператора A, отвечающие одному и тому же значению λ, то для любых α и β вектор $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ также является собственным вектором, отвечающим тому же собственому значению λ (если, конечно, $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2 \neq \vec{0}$).

Иными словами, множество всех собственных векторов оператора A, отвечающих одному и тому же собственному значению, пополненное нуль–вектором, образует линейное подпространство в L. Поэтому задача об отыскании собственных векторов, отвечающих данному λ, — это задача отыскания базиса этого линейного подпространства, и значит, нам достаточно для однородной системы линейных уравнений (13.12) найти фундаментальную систему решений.

$\boxed{\text{П}}$ **13.8** Для линейного оператора A, действующего в $\mathbb{R}^3$ и заданного в базисе $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ матрицей

$$_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

найти собственные значения и собственные векторы.

◀ Составим характеристическое уравнение:

$$\det \begin{pmatrix} (1-\lambda) & -2 & 0 \\ 1 & (4-\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & (3-\lambda) \end{pmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по последней строке, получаем

$$\begin{aligned} (3-\lambda)\det\begin{pmatrix} (1-\lambda) & -2 \\ 1 & (4-\lambda) \end{pmatrix} &= 0, \\ (3-\lambda)\left((1-\lambda)(4-\lambda)+2\right) &= 0, \\ (3-\lambda)(\lambda^2-5\lambda+6) &= 0, \\ \lambda_{1,2} = 3; \qquad \lambda_3 &= 2. \end{aligned}$$

Найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda = 3$. Выпишем матрицу ОСЛУ ($\lambda = 3$)

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{c_1:=c_2 \\ c_2:=c_1+2c_2}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{ll} x_1 & \text{гл. неизв.} \\ x_2, x_3 & \text{св. неизв.} \end{array}$$

Найдем фундаментальную систему решений:

x_1	x_2	x_3
-1	1	0
0	0	1

Она состоит из двух векторов: $(-1, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Таким образом, в качестве базиса в подпространстве собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda = 3$, можно взять собственные векторы $(-1, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$. Проверим, что найденные векторы — собственные:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие $\lambda = 2$.

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3:=c_1+c_2 \\ c_2:=c_3}}{\overset{c_1:=c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_3 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array}.$$

x_1, x_3 — главные неизвестные, x_2 — свободное неизвестное. Фундаментальная система решений состоит из одного вектора

x_1	x_2	x_3
-2	1	0

Проверим, что вектор $(-2, 1, 0)$ — собственный.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleright$$

Как будет выглядеть матрица линейного оператора A в базисе $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$, если f_j — собственный вектор оператора A, отвечающий собственному значению λ_j? Мы знаем, что $\left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)_{\square j} = (Af_j)_{\{f\}}$, но тогда

$$\left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ \lambda_j, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

т. е. j–ый столбец матрицы ${}_{\{f\}}A_{\{f\}}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_j \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-ое место} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Значит мы доказали теорему

Теорема 13.1. *Матрица линейного оператора в некотором базисе диагональна тогда и только тогда, когда все базисные векторы являются собственными векторами линейного оператора, при этом диагональные элементы матрицы линейного оператора являются собственными значениями линейного оператора.*

Как отыскивать линейно-независимые собственные векторы, отвечающие одному собственному значению, мы уже знаем (см. пример 13.8), а как обеспечить линейную независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям? Оказывается, об этом не нужно заботиться, они всегда линейно независимы.

Теорема 13.2. *Собственные векторы линейного оператора, отвечающие его различным собственным значениям, линейно независимы.*

◀ Докажем это утверждение по индукции. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собственные значения оператора A и x_1, x_2 — собственные векторы, им отвечающие. Предположим, что они линейно зависимы, тогда существует $\mu \neq 0$ такое, что

$$x_2 \ = \ \mu x_1. \tag{13.14}$$

Подействуем на обе части последнего равенства оператором A :

$$Ax_2 \ = \ A\left(\mu x_1\right).$$

Учитывая линейность A и то, что x_1, x_2 собственные векторы, получим

$$\lambda_2 x_2 \ = \ \mu\lambda_1 x_1. \tag{13.15}$$

Подставим в (13.15) выражение для x_2 из (13.14)

$$\lambda_2\mu x_1 \ = \ \mu\lambda_1 x_1 \quad \text{или} \quad \mu(\lambda_2 - \lambda_1)x_1 \ = \ \vec{0}. \tag{13.16}$$

Учитывая, что $x_1 \neq 0$ (x_1 — собственный вектор) и $\mu \neq 0$, получаем

$$\lambda_2 - \lambda_1 \ = \ 0 \qquad \text{или} \qquad \lambda_1 = \lambda_2,$$

что противоречит тому, что λ_1 и λ_2 — различные собственные значения.

Допустим, что любой набор собственных векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$, отвечающих различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ оператора A, линейно независим. Докажем, что тогда и любой набор $k+1$ собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям, линейно независим.

Предположим, что это неверно, т. е. существует ненулевой набор чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k+1}$ таких, что

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k + \alpha_{k+1} x_{k+1} \ = \ 0. \tag{13.17}$$

Ясно, что α_{k+1} должно быть не равно нулю, иначе (13.17) означало бы линейную зависимость $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Преобразуем (13.17):

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\frac{\alpha_1}{\alpha_{k+1}}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{k+1}}x_2 - \cdots - \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}}x_k = \\ &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k. \end{aligned} \tag{13.18}$$

Ясно, что

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \cdots + \beta_k^2 \neq 0. \tag{13.19}$$

Подействуем на обе части (13.19) оператором A :

$$Ax_{k+1} = A\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k\right).$$

Учитывая, линейность A и то, что $x_1, x_2, \ldots, x_{k+1}$ — собственные векторы оператора A, получаем

$$\lambda_{k+1}x_{k+1} = \beta_1\lambda_1 x_1 + \beta_2\lambda_2 x_2 + \cdots + \beta_k\lambda_k x_k. \tag{13.20}$$

Подставим в левую часть (13.20) выражения для x_{k+1} из (13.19)

$$\lambda_{k+1}\left(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k\right) = \beta_1\lambda_1 x_1 + \beta_2\lambda_2 x_2 + \cdots + \beta_k\lambda_k x_k$$

или

$$\beta_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})x_1 + \beta_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})x_2 + \cdots + \beta_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})x_k = 0. \tag{13.21}$$

Учитывая, что $\lambda_1 - \lambda_{k+1} \neq 0$, $\lambda_2 - \lambda_{k+1} \neq 0, \ldots, \lambda_k - \lambda_{k+1} \neq 0$ и (13.19), получаем из (13.21), что векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ линейно зависимы, а это противоречит индуктивному предположению. ▶

Теперь, когда доказана такая «мощная» теорема, кажется, что для любого линейного оператора должен существовать базис, в котором матрица оператора диагональна, т. е. базис пространства, составленный из собственных векторов линейного оператора. Простой пример, приведенный ниже, разбивает наши иллюзии «в пух и прах».

$\boxed{\text{П}}$ **13.9** Линейный оператор A в $\mathbb{R}_2$ имеет в базисе $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ матрицу ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Доказать, что для оператора A не существует базиса, в котором его матрица диагональна.

◀ Найдем собственные значения оператора A.

$$\det\begin{pmatrix} (4-\lambda) & 1 \\ -1 & (2-\lambda) \end{pmatrix} = 0 \text{ или}$$
$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 + 1 = 0,\ (\lambda-3)^2 = 0,\ \lambda_{1,2} = 3,$$

т. е. оператор A имеет только одно собственное значение $\lambda = 3$. Найдем собственные векторы, отвечающие этому собственному значению. Составим и решим соответствующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_2:=c_2+c_1}{\overset{c_1:=c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x_2 & \text{— свободное неизвестное} \\ x_1 & \text{— главное неизвестное} \end{matrix}$$

Фундаментальная система решений ОСЛУ состоит из одного вектора

x_1	x_2
-1	1

Значит имеется только один линейно-независимый собственный вектор $f_1 = (-1, 1)$, а из него не построить базис пространства $\mathbb{R}_2$ ($\dim \mathbb{R}_2 = 2$). ▶

Следствие из теоремы 13.2. Если линейный оператор A в n–мерном вещественном пространстве имеет n различных вещественных собственных значений, λ_1, λ_2, $\dots$, λ_n, то каждому собственному значению соответствует только один линейно независимый собственный вектор и эти векторы образуют базис пространства и матрица оператора A в этом базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

13.5. Ядро и образ линейного оператора. Линейные уравнения в конечномерных пространствах

13.5.1 Ядро линейного оператора

Определение 13.6. *Ядром оператора A называется множество, обозначаемое* $\operatorname{Ker} A$ ($\subset L_1$) *определяемое следующим соотношением*

$$x \in \operatorname{Ker} A \iff Ax = \vec{0}. \tag{13.22}$$

Ясно, что $\ker A \neq \varnothing$ для любого линейного оператора A, так как $\vec{0} \in \operatorname{Ker} A$. Действительно,

$$A\vec{0} = A\,(0 \cdot \vec{x}) = 0 \cdot A\vec{x} = \vec{0}. \tag{13.23}$$

Здесь $\vec{x}$ — произвольный элемент пространства L_1. Второй переход в цепочке равенств (13.23) выполнен на основании п. 2 определения 13.1. В том случае, когда $\mathrm{Ker}\ A = \{\vec{0}\}$, говорят, что оператор A имеет тривиальное ядро, в противном случае говорят, что оператор A имеет нетривиальное ядро.

П 13.10

1. Рассмотрим оператор $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ из примера 13.1. Ясно, что его ядро тривиально, т. е. $\mathrm{Ker}\ \Pi_{\frac{\pi}{2}} = \{\vec{0}\}$.
2. Очевидно, что тождественный оператор — I имеет тривиальное ядро, т. е. $\mathrm{Ker}\ I = \{\vec{0}\}$.
3. Для нуль-оператора $O\ :\ L_1 \to L_2$ (пример 13.4) справедливо $\mathrm{Ker}\ O = L_1$, т. е. в случае, когда $L_1 \neq \{\vec{0}\}$ ядро нуль-опеартора нетривиально.
4. Рассмотрим оператор дифференцирования $\mathcal{D}$ (см. пример 13.3). Ясно, что ядро оператора $\mathcal{D}$ — это множество многочленов степени не выше нулевой (т. е. множество постоянных многочленов).

Имеет место следующая теорема:

Теорема 13.3. *Ядро линейного оператора $A\ :\ L_1 \to L_2$ является линейным подпространством пространства L_1.*

◀ Пусть x_1, $x_2 \in \mathrm{Ker}\ A$ и λ, μ — произвольные числа, покажем, что $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathrm{Ker}\ A$. Действительно,

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) \overset{A\text{— лин. оператор}}{=} \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}. \quad ▶$$

Как находить $\mathrm{Ker}\ A$, его размерность и базис ядра оператора?

Зафиксируем в L_1 и‘L_2 базисы $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ соответственно.

Условие $x \in \mathrm{Ker}\ A$ равносильно условию

$$_{\{f\}}A_{\{e\}} \cdot (x)_{\{e\}} \ = \ \vec{0}. \qquad (13.24)$$

Таким образом, ядро оператора A — это пространство решений ОСЛУ (13.24), а базис оператора A — ФСР этой ОСЛУ. Из доказанного ранее (см. § 11.3) мы получаем, что

$$\dim \mathrm{Ker}\ A = n - \mathrm{rang}\,_{\{f\}}A_{\{e\}} = \dim L_1 - \mathrm{rang}\,_{\{f\}}A_{\{e\}}. \qquad (13.25)$$

В равенстве (13.25) левая часть не зависит от выбора базисов, значит и правая часть не зависит от выбора базисов, тем самым мы доказали, что ранг матрицы линейного оператора не зависит от выбора базисов, а определяется самим оператором A.

Определение 13.7. *Рангом линейного оператора A называется величина* $\operatorname{rang} A$, *определяемая равенством*

$$\text{rank } A \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rang}_{\{f\}} A_{\{e\}}. \tag{13.26}$$

Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 13.4. *Справедлива формула*

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim L_1 - \operatorname{rang} A. \tag{13.27}$$

13.5.2 Образ линейного оператора

Определение 13.8. *Пусть A — линейный оператор, действующий из L_1 в L_2. Образом оператора A называется множество, обозначаемое* $\operatorname{Im} A$ ($\subset L_2$) *и определяемое следующим*

$$y \in \operatorname{Im} A \iff \exists x (\in L_1)\ (Ax = y). \tag{13.28}$$

$\boxed{\Pi}$ **13.11**

1. Рассмотрим оператор $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$ (см. пример 13.1). Ясно, что

$$\operatorname{Im} \Pi_{\frac{\pi}{2}} = V_2.$$

2. Очевидно, что $\operatorname{Im} I = L$. Здесь I — тождественный оператор, действующий из L в L.

3. Ясно, что для нуль-оператора $O : L_1 \to L_2$ (см. пример 13.4) имеет место равенство

$$\operatorname{Im} I = \left\{\vec{0}\right\}, \quad \vec{0} \in L_2.$$

4. Для оператора $\mathcal{D}$ (см. пример 13.3) имеет место равенство

$$\operatorname{Im} \mathcal{D} = P_2(R).$$

Очевидно, имеет место следующая теорема:

Теорема 13.5. *Образ линейного оператора $A : L_1 \to L_2$ является линейным подпространсвтом пространства L_2.*

◀ Пусть y_1, $y_2 \in \mathrm{Im}\ A$, λ, μ — произвольные числа. Покажем, что $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathrm{Im}\ A$.

Действительно, $y_1 \in \mathrm{Im}\ A$ ($y_2 \in \mathrm{Im}\ A$) означает, что существует $x_1 \in L_1$ ($x_2 \in L_1$) такое, что $Ax_1 = y_1$ ($Ax_2 = y_2$). Рассмотрим элемент $\lambda x_1 + \mu x_2$ пространства L_1. Имеем

$$A(\lambda x_1 + \mu x_2) \overset{A\text{— лин. оператор}}{=} \lambda A x_1 + \mu A x_2 = \lambda y_1 + \mu y_2.$$

Тем самым мы показали, что для элемента $\lambda y_1 + \mu y_2$ пространства L_2 нашелся элемент $\lambda x_1 + \mu x_2$ пространства L_1 такой, что

$$A\left(\lambda x_1 + \mu x_2\right) = \lambda y_1 + \mu y_2. \tag{13.29}$$

Равенство (13.29) и означает, что $\lambda y_1 + \mu y_2 \in \mathrm{Im}\ A$. ▶

Как находить $\mathrm{Im}\ A$, его размерность и базис образа оператора?

Зафиксируем в L_1 и L_2 базисы $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. $y \in \mathrm{Im}\ A$ означает, что существует $x \in L_1$ такой, что

$${}_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.30}$$

Пусть x_1, x_2, $\ldots$, x_n — координаты вектора x в базисе $\{e\}$, тогда равенство (13.30) равносильно следующему равенству:

$$x_1 \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1} + x_2 \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2} + \cdots + x_n \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.31}$$

Равенство (13.31) означает, что $y \in L\left(\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1}, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2}, \ldots, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n}\right)$. Тем самым мы доказали, что

$$\mathrm{Im}\ A = L\left(\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1}, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2}, \ldots, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n}\right). \tag{13.32}$$

Заметим, что левая часть в равенстве (13.32) не зависит от выбора базисов $\{e\}$, $\{f\}$, значит и правая часть в (13.32) не зависит от выбора базисов $\{e\}$, $\{f\}$. Из (13.32) следует, что

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{Im}\ A &= \dim\left(\left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 1}, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square 2}, \ldots, \left({}_{\{f\}}A_{\{e\}}\right)_{\square n}\right) = \\ &= \mathrm{rang}\,{}_{\{f\}}A_{\{e\}} \overset{(13.26)}{=} \mathrm{rang}\, A, \end{aligned} \tag{13.33}$$

а базис $\operatorname{Im} A$ образуют базисные столбцы матрицы линейного оператора.

Из формул (13.27) и (13.33) следует равенство

$$\dim \operatorname{Ker} A + \dim \operatorname{Im} A = \dim L_1, \tag{13.33$'$}$$

которое устанавливает связь между $\dim \operatorname{Ker} A$, $\dim \operatorname{Im} A$ и $\dim L_1$ (размерностью пространства, из которого действует линейный оператор).

13.5.3 Линейные уравнения в конечномерных пространствах

Пусть A — линейный оператор, действующий из L_1 в L_2. Рассмотрим однородное уравнение

$$Ax = \vec{0} \tag{13.34}$$

и неоднородное уравнение

$$Ax = y, \qquad y \neq \vec{0}, \tag{13.35}$$

порожденные оператором A. После фиксации базисов $\{e\}$ и $\{f\}$ в L_1 и L_2 соответственно, уравнение (13.34) превращается в ОСЛУ:

$$_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = \vec{0}, \tag{13.36}$$

а неоднородное уравнение (13.35) в СЛУ:

$$_{\{f\}}A_{\{e\}}(x)_{\{e\}} = (y)_{\{f\}}. \tag{13.37}$$

Вспоминая факты, известные для ОСЛУ и СЛУ, получаем следующие утверждения.

Теорема 13.6. *Однородное уравнение* (13.34) *всегда имеет решения, при этом, если* $\operatorname{rank} A = \dim L_1$, *это уравнение имеет только нулевое решение, а если* $\operatorname{rang} A < \dim L_1$, *уравнение* (13.34) *имеет* $k = \dim L_1 - \operatorname{rang} A$ *линейно независимых решений* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *которые могут быть найдены как ФСР ОСЛУ* (13.36). *Общее решение уравнения* (13.34) — $x_{\text{общ.одн.}}$ *может быть записано в следующем виде:*

$$x_{\text{общ.одн.}} = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{P}. \tag{13.38}$$

Теорема 13.7. *Неоднородное уравнение* (13.35) *имеет решения тогда и только тогда, когда* $y \in \operatorname{Im} A$ *и в этом случае общее решение этого уравнения —* $x_{\text{общ.неод.}}$ *может быть записано в виде:*

$$x_{\text{общ.неод.}} = x_{\text{частн. неод.}} + x_{\text{общ.одн.}} \tag{13.39}$$

Заметим, что условие $y \in \operatorname{Im} A$ *сводится к равенству рангов матрицы системы* (13.37) *и расширенной матрицы системы* (13.37) *(см. теорему* 11.6 *Кронекера-Капелли).*

«Работа» сформулированных здесь теорем 13.6 и 13.7 будет продемонстрирована в разделе «Дифференциальные уравнения».

Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры нелинейных операторов.

2. Как изменится матрица линейного оператора A — ${}_{\{f\}}A_{\{e\}}$, если:

   а) в базисе $\{e\}$ поменять местами два вектора?

   б) в базисе $\{f\}$ поменять местами два вектора?

   в) в базисе $\{e\}$ i–й базисный вектор умножит на число $\alpha \neq 0$?

   г) в базисе $\{f\}$ j–й базисный вектор умножить на число $\beta \neq 0$?

3. Приведите примеры, доказывающие, что для собственного значения линейного оператора его кратность как корня характеристического уравнения и размерность подпространства собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, между собой не связаны.

4. Почему при доказательстве теоремы 13.2, делая допущение о линейной зависимости x_1, x_2 мы утверждаем, что в равенстве (13.14) $\mu \neq 0$?

5. Можно ли выделить случай, когда кратность собственных значений, как корней характеристического уравнения, однозначно определяет размерность подпространств собственных векторов? (Ответ сравните с ответом на вопрос 3.)

6. Докажите, что подпространство $\operatorname{Ker} A$ линейного оператора A, действующего из L в L, совпадает с подпространством собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$.

XIV

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В этой главе мы изучим более подробно алгебру линейных операторов $L(X, X)$, X – евклидово пространство, т. е. линейное пространство со скалярным произведением. При этом мы ограничимся конечномерным случаем, хотя большинство результатов справедливо и в случае, когда X – бесконечномерное пространство.

14.1 Сопряженный оператор и его матрица

Понятие сопряженного оператора, как мы увидим в дальнейшем, связано с понятием «транспонированная матрица», которое мы ввели (определение 4.11) и изучили в § 4.3. Изучая алгебру матриц, мы, фактически, осваивали технику, а её смысл станет ясен только сейчас.

Определение 14.1. *Пусть A – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве X $(A \in L(X, X))$, сопряженным оператором к оператору A называют оператор, обозначаемый A^*, действующий в пространстве X и определенный следующим равенством:*

$$\forall x \in X, \forall y \in X, \quad (Ax, y) = (x, A^*, y). \qquad (14.1)$$

Из равенства (14.1) не следует, что сопряженный оператор существует. Прежде чем доказать его существование, покажем, что он в случае существования является линейным оператором.

Теорема 14.1. *Сопряженный оператор является линейным оператором.*

◀Пусть $x, y, z \in X$ – произвольные векторы пространства X, тогда действие сопряженного оператора A^* на элемент $y + z$ определяется равенством (14.1):

$$(x, A^*(y + z)) = (Ax, y + z) = (Ax, y + (Ax, z) = (x, A^*y) + (x, A^*z) =$$
$$= (x, A^*y + A^*z)\,.$$

В силу произвольности $x, y, z \in X$ мы получили, что

$$A^*(y+z) = A^*y + A^*z.$$

Пусть $x, y\,(\in X)$ – произвольные векторы пространства X, $\lambda\,(\in R)$ – произвольное число, тогда

$$(x, A^*(\lambda y)) = (Ax, \lambda y) = \lambda \cdot (Ax, y) = \lambda \cdot (x, \lambda A^* y) = (x, \lambda A^* y).$$

В силу произвольности x и λ, получаем, что $A^*(\lambda y) = \lambda \cdot A^* y$. Линейность сопряженного оператора доказана.▶

После того как линейность сопряженного оператора нами доказана, для доказательства его существования достаточно найти его матрицу в каком-нибудь базисе. Мы знаем, что формула для вычисления скалярного произведения векторов проще всего выглядит в том случае, когда выбран ортонормированный базис. А именно, в этом случае скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений соответствующих координат векторов-сомножителей. Зафиксируем в пространстве X ортонормированный базис $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ и возьмем x, y $(\in X)$ произвольные векторы, тогда

$$\begin{aligned}
(x, A^*y) = (Ax, y) &= \sum_{i=1}^{n} (Ax)_{\{f\}i}\, y_{\{f\}i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} {}_{\{f\}}A_{\{f\}ij} \cdot x_{\{f\}j} \right) \cdot y_{\{f\}i} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} {}_{\{f\}}A_{\{f\}ij} \cdot x_{\{f\}j} \cdot y_{\{f\}i} = \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_{\{f\}j} \left(\sum_{i=1}^{n} {}_{\{f\}}A_{\{f\}ij}\, y_{\{f\}i} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_{\{f\}j} \left(\sum_{i=1}^{n} ({}_{\{f\}}A_{\{f\}})^t_{ij} \cdot y_{\{f\}i} \right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_{\{f\}j} \cdot \left(({}_{\{f\}}A_{\{f\}})^t \cdot y_{\{f\}} \right).
\end{aligned}$$

Последнее равенство означает, что вектор x умножается скалярно на какой-то вектор и скалярное произведение вычисляется в координатах ортонормированного базиса $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$. Учитывая, что мы вычисляли на самом деле $(x, A^* y)$, мы доказали равенство

$$(A^* y)_{\{f\}} = \left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)^t \cdot y_{\{f\}}. \tag{14.2}$$

Последнее означает, что

$${}_{\{f\}}A^*{}_{\{f\}} = \left({}_{\{f\}}A_{\{f\}}\right)^t. \tag{14.3}$$

Таким образом мы доказали следующую теорему:

Теорема 14.2. *Сопряженный оператор A^* существует и его матрица в ортонормированном базисе $\{f\} = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ выражается через матрицу оператора A по формуле* (14.3).

Из формулы (14.3) и свойств операции транспонирования матриц (теорема 4.6) получаем, что справедлива теорема:

Теорема 14.3. *(свойства сопряженных операторов). Справедливы следующие свойства:*

1°. $(A^*)^* = A$;
2°. $(\lambda \cdot A)^* = \lambda \cdot A^*$;
3°. $(A + B)^* = A^* + B^*$;
4°. $(A \cdot B)^* = B^* \cdot A^*$.

Теперь мы в состоянии привести примеры сопряженных операторов в конкретных пространствах.

$\boxed{\text{П}}$ 14.1

- $E^* = E$ в любом евклидовом пространстве.
- $O^* = O$ в любом евклидовом пространстве.
- Рассмотрим в пространстве V_3 оператор поворота вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки – $\Pi_{\frac{\pi}{2}}$. Его матрица в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда матрица сопряженного оператора $\left(\Pi_{\frac{\pi}{2}}\right)^*$ в этом же базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, мы показали, что $\left(\Pi_{\frac{\pi}{2}}\right)^* = \Pi_{-\frac{\pi}{2}}$, т.е. является оператором поворота вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{2}$ по часовой стрелке (заметим, что в этом случае сопряженный оператор совпал с обратным оператором).

Контрольные вопросы и задания

1. Доказать, что формула (14.3) справедлива только для ортонормированного базиса.
2. Доказать, что $(A^n)^* = (A^*)^n$.
3. Доказать, что $(A^*)^* = A$.
4. Как связаны между собой $\dim ImA$ и $\dim ImA^*$, $\dim\ker A$ и $\dim\ker A^*$?

14.2 Ортогональные матрицы и ортогональные преобразования

Определение 14.2. *Квадратная матрица A называется ортогональной, если для неё имеет место равенство:*

$$A \cdot A^t = A^t \cdot A = E. \tag{14.4}$$

Например, матрица $\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$ является ортогональной.

Замечание. Ясно, что в соотношении (14.4) достаточно требовать выполнения одного из равенств: $A \cdot A^t = E$, $A^t \cdot A = E$. (Подумайте, почему?)

Теорема 14.4. *(свойства ортогональных матриц). Имеют место следующие свойства:*

1°. *Если A – ортогональная матрица, то* $\det A = \pm 1$*;*

2°. *Если A и B ортогональные матрицы, то $A \cdot B$ – ортогональная матрица.*

◀ Из (14.4) и теоремы об определителе произведения квадратных матриц, получаем:

$$1 = \det E = \det(A \cdot A^t) = \det A \cdot \det A^t = (\det A)^2\,.$$

Покажем, что произведение ортогональных матриц является ортогональной матрицей. Действительно,

$$(A\cdot B)^t\cdot(A\cdot B) = (B^t\cdot A^t)\cdot(A\cdot B) = B^t\cdot(A^t\cdot A)\cdot B = B^t\cdot E\cdot B = B^t\cdot B = E.$$

Аналогично показывается, что $(A\cdot B)\cdot(B^t\cdot A^t) = E$. ►

Ясно, что справедлива теорема:

Теорема 14.5. *Матрица ортогональна тогда и только тогда, когда её столбцы, рассматриваемые как координаты векторов в евклидовом пространстве, образуют ортонормированный базис.*

Следующая теорема имеет большое значение для всей теории линейных операторов в евклидовом пространстве:

Теорема 14.6. *Матрица перехода от ортонормированного базиса к ортонормированному базису ортогональна.*

◄ Это следует из «конструкции» матрицы перехода и формул для умножения матриц и вычисления скалярного произведения в случае ортонормированного базиса. ►

Следствие из теоремы (14.6) Если $\{e\}$ и $\{f\}$ – ортонормированные базисы в конечномерном евклидовом пространстве, то имеет место равенство:

$$_{\{f\}}T_{\{e\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t. \tag{14.5}$$

14.3 Самосопряженные операторы

В этом параграфе будет определен важнейший класс операторов в евклидовых пространствах – класс самосопряженных операторов. Эти операторы обладают рядом уникальных свойств, выделяющих их из всего множества линейных операторов. Самосопряженность – важное свойство, которое часто встречается в приложениях.

Определение 14.3. *Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве X ($A \in L(X,X)$), называется самосопряженным оператором, если для него выполнено равенство:*

$$A = A^* \tag{14.6}$$

Ясно, что из теоремы 14.2 следует:

Теорема 14.7. *(Критерий самосопряженности оператора) Для того, чтобы оператор* A *был самосопряжен необходимо и достаточно чтобы его матрица в произвольном ортонормированном базисе* $\{u\}$ *была симметрической, т.е. выполнялось равенство:*

$$_{\{u\}}A^t_{\{u\}} = {}_{\{u\}}A_{\{u\}}. \tag{14.7}$$

◀ Эта теорема – прямое следствие из определения самосопряженного оператора и теоремы 14.2. ▶

Ясно, что тождественный оператор и ноль-оператор в произвольном евклидовом пространстве являются самосопряженными операторами, любой скалярный оператор (оператор умножения на число) является самосопряженным оператором.

Рассмотрим в пространстве V_3 оператор симметрии относительно плоскости, проходящей через биссектрису первого и третьего координатных углов плоскости $x0y$ и ось $0z$. Его матрица в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ имеет вид: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ясно, что этот оператор самосопряжен.

Имеет место следующая теорема:

Теорема 14.8. *Если* A, B *– самосопряженные операторы в евклидовом пространстве* X, *то*

- $A + B$ *– самосопряженный оператор;*
- $\alpha \cdot A$ *– самосопряженный оператор при любом* $\alpha \in R$.

◀ Доказательство этой теоремы непосредственно следует из теоремы 14.7 и свойств операции транспонирования матриц. ▶

14.4 Спектральная теория самосопряженных операторов

В этом параграфе мы покажем, что все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора вещественны и существует ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов самосопряженного оператора. В этом базисе матрица самосопряженного оператора диагональна, а её диагональные элементы – собственные числа оператора.

Теорема 14.9. *Собственные векторы самосопряженного оператора, отвечающие различным собственным числам ортогональны.*

◀Пусть λ, μ, $(\lambda \neq \mu)$ – собственные числа самосопряженного оператора A, x, y – отвечающие им собственные векторы. Тогда

$$(Ax, y) = \lambda(x, y);\ (Ax, y) = (x, A^* y) = (x, Ay) = (x, \mu y) = \mu(x, y).$$

Мы получили, что $\lambda(x, y) = \mu(x, y)$. Или $(\lambda - \mu) \cdot (x, y) = 0$. Учитывая, что $\lambda - \mu \neq 0$, получаем $(x, y) = 0$.

Для доказательства вещественности корней характеристического уравнения самосопряженного оператора нам потребуется:

Лемма. Пусть $\lambda = \alpha + \beta i$ $(\beta \neq 0)$ – корень характеристического уравнения линейного оператора A, действующего в конечномерном вещественном линейном пространстве L. Тогда существуют такие неравные нулю одновременно векторы $\vec{x}$, $\vec{y}$ пространства L, для которых выполнены равенства:

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \\ A\vec{y} &= \beta\vec{x} + \alpha\vec{y}. \end{aligned} \tag{14.8}$$

◀ Зафиксируем в пространстве l базис $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Рассмотрим ОСЛУ $\left({}_{\{e}A_{\{e\}} - \lambda E\right) z = 0$ в комплексном пространстве C^n. Поскольку $\det\left({}_{\{e}A_{\{e\}} - \lambda E\right) = 0$ квадратная ОСЛУ имеет в C^n ненулевое решение $z = x + iy$, где x, y – неравные нулю одновременно векторы из R^n. Тогда мы имеем:

$$\left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E\right) z = \left({}_{\{e\}}A_{\{e\}} - (\alpha + \beta i)E\right)(x + iy) = 0.$$

Приравнивая нулю вещественную и мнимую части последнего равенства, получаем:

$$\begin{aligned} {}_{\{e\}}A_{\{e\}}x &= \alpha x - \beta y; \\ {}_{\{e\}}A_{\{e\}}y &= \beta x + \alpha y. \end{aligned} \tag{14.9}$$

Будем считать, что вектор $\vec{x}$ из пространства R^n определен равенством $(\vec{x})_{\{e\}} = x$, а вектор $\vec{y}$ – равенством $(\vec{y})_{\{e\}} = y$. Тогда равенства (14.9) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} {}_{\{e\}}A_{\{e\}}(\vec{x})_{\{e\}} &= \alpha(\vec{x})_{\{e\}} - \beta(\vec{y})_{\{e\}}; \\ {}_{\{e\}}A_{\{e\}}(\vec{y})_{\{e\}} &= \beta(\vec{x})_{\{e\}} + \alpha(\vec{y})_{\{e\}}. \end{aligned} \tag{14.10}$$

Последнее и есть координатная форма равенств (14.8). ▶

Теорема 14.10. *Все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора вещественны.*

◀ Пусть A – самосопряженный оператор, а $\lambda = \alpha + \beta i\,(\beta \neq 0)$ – комплексный корень его характеристического многочлена. Тогда по лемме существуют неравные нулю одновременно векторы $\vec{x}, \vec{y}$ пространства L, для которых выполнены равенства (14.7). Так как оператор A самосопряжен, то $(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A\vec{y})$. Подставим в последнее равенство вместо $A\vec{x}$ и $A\vec{y}$ правые части равенств (14.7): $(\alpha\vec{x} - \beta\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{x}, \beta\vec{x} + \alpha\vec{y})$. Преобразуем последнее равенство: $\alpha(\vec{x}, \vec{y}) - \beta(\vec{y}, \vec{y}) = \beta(\vec{x}, \vec{x}) + \alpha(\vec{x}, \vec{y})$. Тогда $\beta\left((\vec{y}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{x})\right) = 0$. Учитывая, что $\beta \neq 0$, получаем $(\vec{y}, \vec{y}) = (\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Последнее равносильно равенству $\vec{y} = \vec{x} = 0$, что противоречит лемме. ▶

Теорема 14.11. *(Основная спектральная теорема для самосопряженного оператора). Для любого самосопряженного оператора в конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов. В этом базисе матрица самосопряженного оператора диагональна, а её диагональные элементы – собственные числа оператора.*

◀ Теорему будем доказывать по индукции, взяв в качестве параметра индукции n – размерность пространства. В случае $n = 1$ теорема тривиальна, предположим, что утверждение теоремы справедливо для $n_0\,(\geq 2)$, докажем, что тогда она справедлива и для $n_0 + 1$. Пусть A – самосопряженный оператор в пространстве размерности $n_0 + 1$, λ – вещественный корень его характеристического многочлена, найдем собственный вектор x, отвечающий этому корню. Рассмотрим вектор $e_1 = \frac{x}{|x|}$. Ясно, что это вектор – собственный отвечающий собственному числу λ. Построим ортонормированный базис пространства, приняв за первый базисный вектор вектор e_1. Рассмотрим матрицу ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}$ оператора A. Ясно, что её первый столбец имеет вид $(\lambda\ 0\ 0 \ldots\ 0)^t$. Матрица ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}$ – симметрическая (теорема 14.7). Значит её первая строка имеет вид $(\lambda\ 0\ 0 \ldots\ 0)$. Тогда мы имеем равенство:

$$
{}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n_0+1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n_0+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & a_{n_0+12} & a_{n_0+13} & \ldots & a_{n_0+1n_0+1} \end{pmatrix}.
$$

Матрица, стоящая на пересечении строк и столбцов, начиная со второго номера, – симметрическая. Это означает, что все пространство распалось в ортогональную прямую сумму пространств $L_1 = l(e_1)$ и $L_2 = l(e_2, e_3, \ldots, e_{n_0+1})$, каждое из которых является инвариантным подпространством для оператора A. В первом из них оператор A действует как оператор умножения на число λ. Внутри пространства $L_2 = l(e_2, e_3, \ldots, e_{n_0+1})$, действие оператора определяется симметрической матрицей

$$
{}_{\{e'\}}A'_{\{e\}} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & 0 \ \ldots & a_{2n_0+1} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \ldots & a_{3n_0+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \ \vdots & \\ a_{n_0+12} & a_{n_0+13} & \ldots & a_{n_0+1n_0+1} \end{pmatrix}.
$$

Поскольку пространство $L_2 = l(e_2, e_3, \ldots, e_{n_0+1})$ имеет размерность n_0, то для индуцированного оператора (т.е. такого, действие которого внутри L_2 совпадает с действием исходного оператора) справедливо предположение индукции. ▶

Заметим, что внутри доказательства теоремы мы рассуждали не очень строго, в частности, понятия «индуцированный оператор» и «инвариантное относительно оператора подпространство» мы не определили четко, а остались на их интуитивном восприятии.

Следствие из теоремы 14.11 Размерность линейного подпространства построенного на собственных векторах самосопряженного оператора, отвечающих одному собственному числу, равна его кратности как корня характеристического многочлена.

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что в одномерном случае любой линейный оператор самосопряжен.
2. Приведите пример несамосопряженного оператора.
3. Докажите, что любую вещественную симметрическую матрицу можно представить в виде $A = U^t DU$, где D – диагональная матрица, U – ортогональная матрица.
4. Докажите, что степени самосопряженного оператора являются самосопряженными операторами.
5. Как связаны между собой собственные числа самосопряженного оператора и собственные числа степеней этого оператора?
6. Как связаны между собой собственные векторы самосопряженного оператора и собственные векторы его степеней?

XV

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Частным случаем билинейной формы является скалярное произведение. Теория квадратичных форм возникла в первую очередь как аппарат, необходимый в аналитической геометрии при исследовании кривых и поверхностей второго порядка. В последующем она была применена в математическом анализе при решении задач на экстремум для функций многих переменных.

Изложение в этом разделе местами отличается от традиционного, поскольку мы для получения основных результатов о диагонализуемости симметрической билинейной формы и о приводимости квадратичной формы к каноническому виду используем теорию самосопряженных операторов, изученную в предыдущей главе.

15.1 Билинейная форма и её матрица

Определение 15.1. *Пусть L – конечномерное линейное пространство над полем вещественных чисел. Билинейной формой над L будем называть отображение $F : L\times L \to R$, если оно удовлетворяет следующим условиям:*

1. *Для любых $x_1, x_2, y \in L$ имеет место равенство*
$$F(x_1 + x_2, y) = F(x_1, y) + F(x_2, y);$$
2. *Для любых $x, y \in L$, $\lambda \in R$ имеет место равенство*
$$F(\lambda x, y) = \lambda F(x, y);$$
3. *Для любых $x, y_1, y_2 \in L$ имеет место равенство*
$$F(x, y_1 + y_2) = F(x, y_1) + F(x, y_2);$$
4. *Для любых $x, y \in L$, $\lambda \in R$ имеет место равенство*
$$F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y).$$

Иными словами, билинейность – это линейность по первой переменной при фиксированной второй (1,2) и линейность по второй переменной при фиксированной первой (3,4).

Ясно, что скалярное произведение является билинейной формой (см. определение 12.5).

Матрица билинейной формы

Пусть F – билинейная форма над L. Зафиксируем в L базис $\{e\} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ найдем значение билинейной формы F на паре элементов x, y:

$$\begin{aligned}F(x,y) &= F\left(x_{1\{e\}}e_1 + x_{2\{e\}}e_2 + \cdots + x_{n\{e\}}e_n,\, y\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(x_{i\{e\}}e_i,\, y) = \sum_{i=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot F(e_i,\, y) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot F(e_i, y_{1\{e\}}e_1 + +y_{2\{e\}}e_2 + \cdots + y_{n\{e\}}e_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} F(e_i, y_{j\{e\}}e_j)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot \left(y_{j\{e\}} \cdot \sum_{j=1}^{n} F(e_i, e_j)\right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot y_{j\{e\}} \cdot F(e_i, e_j).\end{aligned}$$

Итак, мы показали, что имеет место формула:

$$F(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} x_{i\{e\}} \cdot y_{j\{e\}} \cdot F(e_i, e_j). \tag{15.1}$$

Из полученной формулы следует, что для того чтобы задать действие квадратичной формы на произвольную пару векторов необходимо и достаточно задать действие формы на всевозможные пары базисных векторов. (Сравните с линейными операторами (§ 13.2).)

Образуем квадратную матрицу ${}_{\{e\}}M_{F\{e\}}$ порядка n (n – размерность пространства), положив

$$\left({}_{\{e\}}M_{F\{e\}}\right)_{ij} = F(e_i, e_j). \tag{15.2}$$

Определение 15.2. *Матрицей квадратичной формы F в базисе $\{e\}$ называется матрица ${}_{\{e\}}M_{F\{e\}}$, определенная равенством* (15.2).

Очевидно, формула (15.1) с использованием операции умножения матриц может быть записана в виде:

$$F(x,y) = \left(x_{\{e\}}\right)^t \cdot {}_{\{e\}}M_{F\{e\}} \cdot e_{\{e\}}. \tag{15.3}$$

Посмотрим, что происходит с матрицей квадратичной формы при замене базиса. Зафиксируем в пространстве L «новый» базис $\{g\} = \{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$. Тогда, имеют место равенства:

$$y_{\{e\}} = {}_{\{e\}}T_{\{g\}} \cdot y_{\{e\}} \cdot \left(x_{\{e\}}\right)^t = \left({}_{\{e\}}T_{\{g\}} \cdot x_{\{g\}}\right)^t = \left(x_{\{g\}}\right)^t \cdot \left({}_{\{e\}}T_{\{g\}}\right)^t.$$

Подставляя их в (15.3), получим:

$$_{\{g\}}M_{F\{g\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{g\}}\right)^t \cdot {}_{\{e\}}M_{F\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{g\}}. \tag{15.4}$$

Полученная формула (15.4) называется формулой перехода от базиса к базису в матрице билинейной формы (сравните с формулой (13.9)).

Контрольные вопросы и задания

1. Докажите, что отображение ставящее в соответствие векторам x, y произведение их первых координат в некотором базисе является билинейной формой.
2. Найдите матрицу билинейной формы из вопроса 1.
3. Найдите матрицу билинейной формы, ставящей в соответствие в некотором базисе $\{e\}$ векторам x, y произведение второй координаты вектора x на сумму координат вектора y.
4. Для билинейной формы вопроса 3 найдите её матрицу в базисе $\{f\} = \{e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \ldots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n\}$.

15.2 Симметрические билинейные формы

Определение 15.3. *Билинейная форма F называется симметрической, если имеет место равенство $F(x, y) = F(y, x)$ для любых векторов x, y из линейного пространства L.*

Ясно, что скалярное произведение является симметричной билинейной формой. Из формулы (15.1) и определения матрицы билинейной формы следует

Теорема 15.1. *Билинейная форма является симметрической тогда и только тогда, когда её матрица симметрична*

$$\left({}_{\{e\}}M_{F\{e\}}\right)^t = {}_{\{e\}}M_{F\{e\}}.$$

Теорема 15.2. *Для любой симметрической билинейной формы существует базис, в котором матрица формы диагональная.*

◀ Будем считать, что наше пространство L – евклидово, для этого введем скалярное произведение в исходном базисе $\{e\}$ формулой $(x,\, y) = \sum_{i=1}^{n} x_{i\{e\}} y_{i\{e\}}$. Заметим, что базис $\{e\}$ при этом получился ортонормированный. Вместе с формой F рассмотрим линейный оператор A, действующий из L в L, заданный следующим ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = {}_{\{e\}}M_{F\{e\}}$, ясно что этот оператор самосопряженный. По теореме 14.10 существует ортонормированный базис $\{g\}$, в котором матрица этого оператора диагональная. Выпишем формулу перехода для матрицы оператора и выполним некоторые преобразования:

$$ {}_{\{g\}}A_{\{g\}} = {}_{\{g\}}T_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{g\}} = \left({}_{\{g\}}T_{\{g\}}.\right)^{t} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{g\}}. $$

Последнее равенство получено с использованием формулы (14.5). Вспомним, что ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = {}_{\{e\}}M_{F\{e\}}$.

Значит матрица $\left({}_{\{g\}}T_{\{e\}}\right)^{t} \cdot {}_{\{e\}}M_{F\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{g\}}$ – диагональная, вспоминая связь между матрицами билинейной формы в разных базисах (формула (15.4)), получаем: ${}_{\{g\}}M_{F\{g\}} = \left({}_{\{g\}}T_{\{e\}}\right)^{t} \cdot {}_{\{e\}}M_{F\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{g\}}$ – диагональная матрица. ▶

Контрольные вопросы и задания

1. Какой смысл имеют элементы матрицы билинейной формы в её диагональном виде? Как они связаны с характеристическим многочленом матрицы формы?

2. Возможно ли приведение к диагональному виду в случае несимметрической билинейной формы?

3. Рангом билинейной формы называют ранг её матрицы. Докажите, что определение ранга корректно (не зависит от базиса).

4. Какой смысл для симметрической билинейной формы имеет её ранг? Свяжите это с диагональной матрицей формы.

15.3 Квадратичные формы и их матрицы

Определение 15.4. *Квадратичной формой от вещественных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют функцию $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданную равенством*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}. \tag{15.5}$$

Так как $x_i x_j = x_j x_i$, то дополнительно полагают, что

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{15.6}$$

Матрицу $A_F = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$, образованную коэффициентами a_{ij}, называют матрицей квадратичной формы.

$\boxed{\text{П}}$ **15.1** Пусть

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_1x_3 + x_2^2 -$$
$$-6x_2x_3 + 3x_2x_4 + 2x_3x_4 - x_4^2;$$
$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5/2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 3/2 \\ -5/2 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 3/2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что из условия (15.6) следует, что матрица квадратичной формы симметрическая, т. е. $A_F = A_F^t$.

Ранг матрицы A_F называют рангом квадратичной формы, т. е.

$$\operatorname{rank} F \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{rank} A_F. \tag{15.7}$$

В случае, когда rank F равен числу переменных, форма называется невырожденной.

Если ввести в рассмотрение вектор столбец $\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то, используя правила умножения матриц, получаем, что

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \vec{x}^t \cdot A_F \cdot \vec{x}. \tag{15.8}$$

Последнее называют матричной записью квадратичной формы.

Будем считать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ зафиксирован какой–то базис $\{e\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, тогда вектор $\vec{x}$ можно считать координатами точки в $\mathbb{R}^n$ в этом базисе и квадратичная форма F задает формулой (15.8) отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$).

Введем более аккуратные обозначения:

$(A_F)_{\{e\}}$ — матрица квадратичной формы в базисе $\{e\}$,
$(\vec{x})_{\{e\}}$ — координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\{e\}$.

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\vec{x})^t_{\{e\}} \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot (\vec{x})_{\{e\}}. \qquad (15.8')$$

Зафиксируем в $\mathbb{R}^n$ другой базис — $\{f\} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_n\}$, тогда

$$(\vec{x})_{\{e\}} = {}_{\{e\}}T_{\{f\}} (\vec{x})_{\{f\}}.$$

Подставляя последнее соотношение в правую часть (15.8′), получаем

$$\begin{aligned} &\left({}_{\{e\}}T_{\{f\}} \cdot (\vec{x})_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}} (\vec{x})_{\{f\}} = \\ &= \left((\vec{x})^t_{\{f\}} \cdot \left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t\right) (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}} (\vec{x})_{\{f\}} = \\ &= (\vec{x})^t_{\{f\}} \cdot \left(\left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right) (\vec{x})_{\{f\}}. \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$(A_F)_{\{f\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{f\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{f\}}. \qquad (15.9)$$

Формула (15.9) называется формулой преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса.

15.4 Канонический вид квадратичной формы

Определение 15.5. *Говорят, что квадратичная форма F в базисе $\{f\}$ имеет канонический вид, если матрица квадратичной формы в этом базисе $(A_F)_{\{f\}}$ диагональна ($\Leftrightarrow$ в записи квадратичной формы отсутствуют произведения разных переменных).*

Из сказанного в предыдущем параграфе следует, что квадратичная форма это тоже самое, что сужение симметрической билинейной формы на диагональ ($x = y$). И значит, из теоремы о диагонализуемости симметрической билинейной формы (теорема 15.1) следует теорема о приводимости квадратичной формы к каноническому виду, которую мы приводим с доказательством, основанным на другой идее (метод выделения полных квадратов конструктивен, он не требует нахождения корней характеристического уравнения):

> **Теорема 15.3.** *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет канонический вид.*

◀ Метод, применяемый при доказательстве, называется методом выделения полных квадратов. Метод этот алгоритмичен, т. е. состоит из отдельных шагов и шагов этих для достижения результата выполняется конечное число. Шаги метода двух типов: а) «выделение полного квадрата», б) «создание квадрата переменной». Опишем каждый шаг отдельно:

Шаг а) применяется к квадратичной форме, если существует такая переменная x_{i_0}, для которой $a_{i_0i_0} \neq 0$ и существует $a_{i_0j} \neq 0$ $j \neq i_0$. Легко проверить, что выражение

$$a_{i_0i_0}^{-1}\left(a_{i_0i_0}x_{i_0} + a_{i_01}x_1 + a_{i_02}x_2 + \cdots + a_{i_0i_0-1}x_{i_0-1} + \right.$$
$$\left. + a_{i_0i_0+1}x_{i_0+1} + \cdots + a_{i_0n}x_n\right)^2 = a_{i_0i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j\right)^2$$

является квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$, содержащей такие же члены с переменной x_{i_0}, как и исходная квадратичная форма $F(x_1, \ldots, x_n)$, поэтому разность

$$g(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) - a_{i_0i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j\right)^2$$

является квадратичной формой от переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, $\ldots$, x_n. Тогда

$$F(x_1, \ldots, x_n) = a_{i_0i_0}^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j\right)^2 + g(x_1, \ldots, x_{i_0-1}, x_{i_0+1}, \ldots, x_n).$$

Обозначим $x'_1 = x_1, x'_2 = x_2, \ldots, x'_{i_0-1} = x_{i_0-1}$, $x'_{i_0} = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i_0j}x_j\right)$, $x'_{i_0+1} = x_{i_0+1}$, $\ldots$, $x'_n = x_n$. Тогда в переменных x'_1, x'_2, $\ldots$, x'_n форма примет вид

$$a_{i_0i_0}^{-1}\left(x'_{i_0}\right)^2 + g(x'_1, \ldots, x'_{i_0-1}, x'_{i_0+1}, \ldots, x'_n).$$

Переход к переменным $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ это замена базиса с матрицей перехода от старого базиса к новому, имеющей следующий вид:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccc} \phantom{a_{i_01}} & \phantom{a_{i_02}} & & \phantom{a_{i_0i_0-1}} & i_0 & \phantom{a_{i_0i_0+1}} & & \phantom{a_{i_0n}} \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
a_{i_01} & a_{i_02} & \dots & a_{i_0i_0-1} & a_{i_0i_0} & a_{i_0i_0+1} & \dots & a_{i_0n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

В переменных $x_1', x_2', \dots, x_n'$ форма содержит квадрат переменной x_{i_0}' и не содержит слагаемых вида $a_{i_0j}x_{i_0}'x_j$ $(j \neq i_0)$.

Шаг б) применяется к квадратичной форме, когда все $a_{ii} = 0$ и существует хотя бы один коэффициент $a_{i_0j_0} \neq 0$ $(i_0 \neq j_0)$.

В этом случае осуществим переход к переменным x_1', x_2', $\dots$, x_n' по формулам

$$
\begin{aligned}
x_k &= x_k', & k \neq i_0, j_0 \\
x_{i_0} &= x_{i_0}' + x_{j_0}', & \\
x_{j_0} &= x_{i_0}' - x_{j_0}'. &
\end{aligned}
$$

Матрица перехода от переменных x_1', $\dots$, x_n' к переменным x_1, $\dots$, x_n имеет вид

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} & & & & i_0 & & & & j_0 & & & \end{array} \\
\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i_0 \\ \\ \\ \\ j_0 \\ \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

В результате такой замены возникают квадраты переменных x_{i_0}' и x_{j_0}', так как $(x_{i_0}' + x_{j_0}')(x_{i_0}' - x_{j_0}') = (x_{i_0}')^2 - (x_{j_0}')^2$.

Опишем алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду, использующий шаги а) и б).

Предварительно, пока это возможно, применяются шаги типа а), если применение шага а) невозможно, то применяется один шаг типа б) и снова возвращаются к применению шагов типа а). Невозможность выполнения шагов типа а) и б) возникает в случае, когда форма приведена к каноническому виду. Процесс обязательно обрывается, так как после каждого шага типа а) число переменных, «находящихся в работе» (т. е. подлежащих преобразованию), уменьшается по крайней мере на единицу. ►

$\boxed{\text{П}}$ **15.2** Привести форму $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_3x_1$ к каноническому виду. Найти матрицу перехода от исходного базиса к базису, в котором форма имеет канонический вид.

◄ Так как к форме $2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ шаг типа а) неприменим, то применим шаг типа б):

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + x_2', \\ x_2 &= x_1' - x_2', \\ x_3 &= x_3'. \end{aligned}$$

Получаем

$$\begin{aligned} F(x_1', x_2', x_3') \ &= \ 2(x_1' + x_2')(x_1' - x_2') - 6(x_1' - x_2')x_3' + \\ +2(x_1' + x_2')x_3' \ &= \ 2\left(x_1'\right)^2 - 2\left(x_2'\right)^2 - 4x_1'x_3' + 8x_2'x_3'. \end{aligned}$$

Выполним то же самое в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}, \quad {}_{\{e\}}T_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A_F)_{\{e'\}} \ = \ \left({}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Применим теперь шаг а) по переменной x_1' :

$$2\left(x_1' - x_3'\right)^2 - 2\left(x_3'\right)^2 - 2\left(x_2'\right)^2 + 8x_2'x_3'.$$

Заменим переменные по формулам

$$\begin{aligned} x_1'' \ &= \ x_1' - x_3', \\ x_2'' \ &= \ x_2', \\ x_3'' \ &= \ x_3'. \end{aligned} \qquad \text{т. е.} \qquad {}_{\{e''\}}T_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$F(x_1'', x_2''x_3'') \ = \ 2\left(x_1''\right)^2 - 2\left(x_2''\right)^2 - 2\left(x_3''\right)^2 + 8x_2''x_3''.$$

Найдем матрицу ${}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} = \left({}_{\{e''\}}T_{\{e'\}}\right)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{c_2:=c_2\\ c_3:=c_3}}{\overset{c_1:=c_1+c_3}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right);$$

$${}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним переход от переменных x'_1, x'_2, x'_3 к переменным x''_1, x''_2, x''_3 в матричном виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Выполним еще один шаг типа а) по переменной x''_2 :

$$2\left(x''_1\right)^2 - 2\left(x''_2 - 2x''_3\right)^2 + 8\left(x''_3\right)^2 - 2\left(x''_3\right)^2 =$$
$$= 2\left(x''_1\right)^2 - 2\left(x''_2 - 2x''_3\right)^2 + 6\left(x''_3\right)^2.$$

Введем переменные

$$x'''_1 = x''_1,$$
$$x'''_2 = x''_2 - 2x''_3,$$
$$x'''_3 = x''_3,$$

имеем

$$F(x'''_1, x'''_2, x'''_3) = 2\left(x'''_1\right)^2 - 2\left(x'''_2\right)^2 + 6\left(x'''_3\right)^2.$$

Это — форма канонического вида.

Вычислим ${}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}}$.

$${}_{\{e'''\}}T_{\{e''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$${}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e'''\}}T_{\{e''\}}\right)^{-1};$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{c_3:=c_3}{\overset{\substack{c_1:=c_1\\ c_2:=c_2+2c_3}}{\sim}} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$${}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполним последний шаг в матричном виде:

$$(A_F)_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e''\}} \cdot {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь ${}_{\{e\}}T_{\{e'''\}}$:

$${}_{\{e\}}T_{\{e'''\}} = {}_{\{e\}}T_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e'\}}T_{\{e''\}} \cdot {}_{\{e''\}}T_{\{e'''\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка

$$(A_F)_{\{e'''\}} = \left({}_{\{e\}}T_{\{e'''\}}\right)^t \cdot (A_F)_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'''\}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}. \qquad ►$$

В упрощении квадратичной формы от канонического вида можно пойти дальше — к нормальному виду, т. е. так изменить масштаб, чтобы в новом базисе коэффициенты при квадратах присутствующих переменных были равны ± 1.

Очевидно, справедлива

Теорема 15.4. *Для любой квадратичной формы существует базис, в котором она имеет нормальный вид.*

П 15.3 Продолжим пример 15.2 и приведем квадратичную форму к нормальному виду.

◀ Очевидно, достаточно перейти от базиса $\{e'''\}$ к базису $\{e''''\}$, положив

$$
{}_{\{e'\}}T_{\{e'''\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix};
$$

$$
(A_F)_{\{e''''\}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} =
$$

$$
= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad ▶
$$

15.5 Классификация квадратичных форм. Знакоопределенные формы

Ясно, что любая квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ обладает свойством:

$$
F(0, 0, \ldots, 0) = 0.
$$

Определение 15.6. *Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно определенной (отрицательно определенной), если на любом ненулевом наборе значений переменных она принимает положительное (отрицательное) значение.*

Ясно, что для того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы в её каноническом виде присутствовали квадраты всех ее переменных и все коэффициенты при квадратах переменных были положительны (отрицательны).

Мы видели (пример 15.2), что приведение формы к каноническому виду — дело трудоемкое и значит сказанное выше не всегда эффективно.

Оказывается, можно провести анализ квадратичной формы на положительную (отрицательную) определенность, не приводя форму к каноническому виду.

Пусть

$$
(A_F)_{\{e\}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

— матрица квадратичной формы в некотором базисе.

Введем в рассмотрение следующий набор чисел

$$M_1(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} a_{11}, \quad M_2(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

$$M_3(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \ldots,$$

$$M_n(A_F) \stackrel{\text{def}}{=} \det\,(A_F)_{\{e\}}\,.$$

Этот набор чисел $(M_1(A_F), M_2(A_F), \ldots, M_n(A_F))$ называют набором главных миноров квадратичной формы F.

Теорема 15.5 (Критерий Сильвестра[1]). *Для того, чтобы квадратичная форма была положительно (отрицательно) определенной, необходимо и достаточно, чтобы в ее наборе главных миноров все числа были положительны (чтобы в ее наборе главных миноров происходило чередование знаков, начиная с минуса, т. е.* $M_1(A_F) < 0$, $M_2(A_F) > 0$, $M_3(A_F) < 0$, $M_4(A_F) > 0$, ...).

П 15.4 Исследовать на знаковую определенность квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) \ = \ 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_3^2 - 2x_2x_3 + 6x_4^2.$$

◀ Выпишем матрицу квадратичной формы:

$$(A_F)_{\{e\}} \ = \ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_1(A_F) = 2 > 0, \quad M_2(A_F) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0,$$

$$M_3(A_F) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix} = 36 + 4 + 4 - 12 - 24 - 2 = 6 > 0$$

[1]Сильвестр Дж. (1814–1897) — английский математик, член Лондонского королевского общества, иностранный член–корреспондент Петербургской академии наук, окончил Кембриджский университет, одно время был адвокатом, затем преподавал в английских университетах, работал в страховой компании математиком. С 1876 г. по 1881 г. — профессор в университете г. Балтимор (США), с 1884 года заведовал кафедрой в Оксфордском университете (Великобритания). Областями деятельности Сильвестра были алгебра, теория чисел, теория вероятностей, механика, математическая физика. Наиболее интересные результаты получены им в теории квадратичных форм, в том числе критерии знаковой определенности, носящие его имя.

По критерию Сильвестра форма F положительно определена.

Для проверки приведем форму к каноническому виду:

$$\begin{aligned}
&2x_1^2+4x_1x_2-4x_1x_3+3x_2^2-2x_2x_3+6x_3^2 \;= \\
&= \;2\,(x_1+x_2-x_3)^2-2x_2^2-2x_3^2+4x_2x_3+3x_2^2-2x_2x_3+6x_3^2 \;= \\
&= \;2\,(x_1')^2+(x_2')^2+2x_2'x_3'+4(x_3')^2 \;= \\
&= \;2\,(x_1')^2+(x_2'+x_3')^2+3\,(x_3')^2 \;=\; 2\,(x_1'')^2+(x_2'')^2+3\,(x_3'')^2\,.
\end{aligned}$$

Ясно, что форма положительно определена, так как в ее каноническом виде все коэффициенты положительны. ►

Контрольные вопросы и задания

1. Пусть $F(x,y,z)$ – положительно определенная квадратичная форма. Какую поверхность в $\mathbb{R}^3$ задает уравнение $F(x,y,z)=a$, $a\in\mathbb{R}$?

2. Пусть $F(x,y,z)$ – отрицательно определенная квадратичная форма. Какую поверхность в $\mathbb{R}^3$ задает уравнение $F(x,y,z)=a$, $a\in\mathbb{R}$?

3. Проверьте, является квадратичная форма
$$F(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+3x_3^2$$
вырожденной или невырожденной.

4. Единственным ли образом можно привести квадратичную форму к каноническому виду, используя метод выделения полных квадратов? Объясните.

5. Что можно сказать о знакоопределенности квадратичной формы
$$F(x_1,x_2,\dots x_n)=x_1^2-x_2^2+x_3^2-\dots+(-1)^{n-1}x_n^2\ ?$$

6. Какой должна быть квадратичная форма $F(x,y)$, чтобы уравнение $F(x,y)=d^2$, $(d\neq 0)$ задавало эллипс?

XVI. Практикум по геометрии

Г1. Прямая линия на плоскости

Заметим, что не существует алгоритмов решения геометрических задач. Однако, решение любой задачи можно свести к последовательности простейших задач. Поэтому, сначала мы приведем решения таких простейших задач.

Напомним основные виды уравнения прямой (см. гл. II. Прямая на плоскости):

$$y = kx + b \tag{Г1.1}$$

уравнение прямой с угловым коэффициентом k,

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{Г1.2}$$

уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), с угловым коэффициентом k,

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{Г1.3}$$

уравнение прямой по двум точкам (x_1, y_1) и (x_2, y_2),

$$Ax + By + C = 0, \quad A^2 + B^2 \neq 0, \tag{Г1.4}$$

общее уравнение прямой, $\vec{n} = (A, B)$ — вектор нормали прямой,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \tag{Г1.5}$$

общее уравнение прямой с известной точкой,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{Г1.6}$$

уравнение прямой в отрезках на осях,

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0, \tag{Г1.7}$$

нормальное уравнение прямой,

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 \neq 0, \tag{Г1.8}$$

уравнение пучка прямых, заданного двумя пересекающимися прямыми:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad \text{и} \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

$\boxed{З}$ **Г1.1** Составить уравнение прямой a, проходящей через точку $M_0(1;2)$ параллельно прямой b: $3x+5y-1=0$.

При решении задачи на составление уравнения прямой прежде всего надо выбрать тот вид уравнения, который наиболее удобен в данных условиях.

Так как прямая b задана общим уравнением, то нам известен её вектор нормали $\vec{n}=(3;5)$. Так как прямая a параллельна прямой b, то $\vec{n}$ является и её вектором нормали. Поэтому удобнее выбрать уравнение вида (Г1.5), получим

$$a\colon\ 3(x-1)+5(y-2)=0 \quad \text{или} \quad 3x+5y-13=0.$$

Ответ: a: $3x+5y-13=0$.

$\boxed{З}$ **Г1.2** Составить уравнение прямой a, проходящей через точку $M_0(5;-1)$ перпендикулярно прямой b: $y=6x-7$.

Из уравнения прямой b находим ее угловой коэффициент $k_b=6$. Так как $a\perp b$, то $k_a=-1/k_b$. Поэтому удобнее выбрать уравнение вида (Г1.2), получим

$$a\colon\ y+1=-\frac{1}{6}(x-5) \quad \text{или} \quad x+6y+1=0.$$

Ответ: a: $x+6y+1=0$.

$\boxed{З}$ **Г1.3** Составить уравнение прямой a, проходящей через точку $M_0(7;-2)$ перпендикулярно прямой b: $5x+3y+1=0$.

Задача отличается от задачи ЗГ 1.2 только видом уравнения прямой b. В этом случае можно воспользоваться условием перпендикулярности двух прямых, заданных общими уравнениями, $A_1A_2+B_1B_2=0$, получим

$$5A_2+3B_2=0, \quad \text{или} \quad \frac{A_2}{B_2}=-\frac{3}{5}.$$

Пусть, например, $A_2=3$, $B_2=-5$. Теперь удобно записать уравнение прямой a вида (Г1.5): a: $3(x-7)-5(y+2)$, или $3x-5y-31=0$.

Ответ: a: $3x-5y-31=0$.

Замечание. Если у одной из двух перпендикулярных прямых вектор нормали $\vec{n}_1=(A;B)$, то у второй вектором нормали может служить вектор $\vec{n}_2=(B;-A)$.

$\boxed{З}$ **Г1.4** Найти точку M пересечения двух прямых a: $3x-y+1=0$ и b: $x+2y=0$.

Координаты точки пересечения должны удовлетворять уравнению прямой a и уравнению прямой b. Поэтому, следует решить систему уравнений:

$$(\cdot)\ M\colon \begin{cases} 3x-y+1=0, \\ x+2y=0. \end{cases} \implies \begin{cases} x=-2y, \\ -6y-y+1=0. \end{cases} \implies \begin{cases} x=-2/7, \\ y=1/7. \end{cases}$$

$\boxed{З}$ **Г1.5** Составить уравнение прямой a, проходящей через точку пересечения прямых c: $11x-13y+6=0$, b: $7x+8y-15=0$ и через начало координат.

Будем искать прямую a как прямую из пучка, заданного прямыми c и b. Уравнение прямой a запишем в виде (Г1.8)

$$a\colon\ \lambda(11x-13y+6)+\mu(7x+8y-15)=0.$$

Так как начало координат $O(0;0)$ принадлежит прямой a, то координаты $(0;0)$ должны удовлетворять уравнению прямой a, отсюда следует

$$6\lambda-15\mu=0, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{\mu}=-\frac{5}{2}.$$

Пусть $\lambda=5$, $\mu=-2$. Подставим эти значения в уравнение пучка

$$a\colon\ 5(11x-13y+6)-2(7x+8y-15)=0,$$

или

$$a\colon\ 41x-81y=0.$$

Ответ: a: $41x-81y=0$.

$\boxed{З}$ **Г1.6** Найти тангенс угла между прямыми a: $x+2y-1=0$ и b: $2x+3y+5=0$.

Найдем угловые коэффициенты прямых. Для этого перепишем уравнения прямых в виде (Г1.1).

$$a\colon\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \quad k_a=-\frac{1}{2}, \qquad b\colon\ y=-\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}, \quad k_b=-\frac{2}{3}.$$

Воспользуемся формулой для нахождения тангенса угла между прямыми $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{6}}{1+\frac{1}{3}} = -\frac{1}{8}.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -1/8$.

Замечание. В этой задаче мы воспользовались формулой для нахождения ориентированного угла между прямыми. Если ориентация угла не важна, то верным будет также ответ $\operatorname{tg}\alpha = 1/8$.

$\boxed{З}$ **Г1.7** Найти расстояние от точки $M_0(5;6)$ до прямой $a\colon y = 5x-6$. Воспользуемся формулой для нахождения расстояния от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $a\colon Ax + By + C = 0$

$$d(M_0;a) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Запишем уравнение прямой a в общем виде $a\colon 5x - y - 6 = 0$. Тогда

$$d(M_0;a) = \frac{|5\cdot 5 - 6 - 6|}{\sqrt{25+1}} = \frac{13}{\sqrt{26}}.$$

Ответ: $d(M_0;a) = 13/\sqrt{26}$.

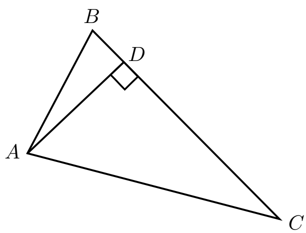
Рассмотрим теперь решение более сложных типовых задач. Решение этих задач следует начинать с плана действий, в котором задача будет разбита на простейшие задачи — это и есть самая важная часть решения.

$\boxed{З}$ **Г1.8** Даны координаты вершин треугольника $A(1;2)$, $B(3;-2)$, $C(4;5)$. Составить уравнение высоты AD треугольника.

План решения:

1) Найдем уравнение прямой BC по двум точкам.

2) Составим уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BC.



$$BC\colon\ \frac{x-3}{4-3} = \frac{y+2}{5+2},$$

или $7x - y - 23 = 0$ (мы воспользовались формулой (Г1.3)).

$$AD\colon\ 1\cdot(x-1) + 7\cdot(y-2) = 0,$$

или $x + 7y - 15 = 0$ (см. задачу 15.3).

Ответ: $AD\colon x + 7y - 15 = 0$.

$\boxed{З}$ **Г1.9** Даны две прямые a: $x+2y-1=0$ и b: $3x-y-3=0$. Найти прямую c так, чтобы прямая b была биссектрисой угла между прямыми a и c.

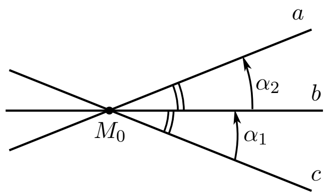
План решения:

1) Найдем точку M_0 пересечения прямых a и b,

2) Найдем угловые коэффициенты прямых a и b,

3) Воспользуемся равенством углов α_1 и α_2: $\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\alpha_2$. Найдем k_c.

4) Составим уравнение прямой c вида (Г1.2)
$y-y_0=k_c(x-x_0)$.



1) M_0: $\begin{cases} x+2y-1=0, \\ 3x-y-3=0. \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=0. \end{cases}$ $M_0(1;0)$.

2) a: $y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$, $k_a=-\dfrac{1}{2}$, $\quad b$: $y=3x-3$, $k_b=3$.

3) $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Longrightarrow \dfrac{k_b-k_c}{1+k_b\cdot k_a} = \dfrac{k_a-k_b}{1+k_a\cdot k_b} \Longrightarrow \dfrac{3-k_c}{1+3k_c} = \dfrac{-1/2-3}{1-3/2} \Longrightarrow k_c=-\dfrac{2}{11}$.

4) c: $y-0=-\dfrac{2}{11}(x-1)$ или $2x+11y-2=0$.

Ответ: c: $2x+11y-2=0$.

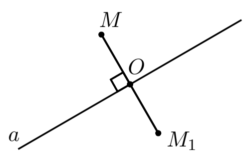
$\boxed{З}$ **Г1.10** Найти точку M', симметричную точке $M(2;3)$ относительно прямой a: $2x+3y-8=0$.

План решения:

1) Составим уравнение прямой MM', проходящей через точку M перпендикулярно прямой a,

2) Найдем точку O пересечения прямых a и MM',

3) Так как $|MO|=|OM'|$, то воспользуемся формулами деления отрезка MM' точкой O пополам.



1) MM': $3(x-2)-2(y-3)=0$, или $3x-2y-12=0$.

2) O: $\begin{cases} 2x+3y-8=0, \\ 3x-2y-12=0. \end{cases} \Longrightarrow O(4;0)$.

3) $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y_0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \Longrightarrow 4 = \dfrac{2 + x_2}{2}$, $O = \dfrac{3 + y_2}{2} \Longrightarrow$ $x_2 = 6$, $y_2 = -3$.

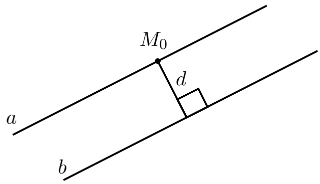
Ответ: $M'(6; -3)$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г1.11** Найти расстояние между прямыми a: $3x - 2y + 5 = 0$ и b: $6x - 4y - 7 = 0$.

Заметим, что так как коэффициенты при x, y в уравнениях прямой пропорциональны $\dfrac{3}{6} = \dfrac{-2}{-4}$, то прямые параллельны.

План решения:

Будем искать расстояние между параллельными прямыми как расстояние от точки M_0 на прямой a до прямой b.



1) Выберем произвольную точку M_0 на прямой a. Для этого зададим произвольно x_0, например, $x_0 = -1$, подставим в уравнение a и найдем y_0: $y_0 = 1$, $M_0(-1; 1)$.

2) Найдем $d(M_0; b)$:

$$d(M_0, b) = \frac{|6 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 - 7|}{\sqrt{36 + 16}} = \frac{17}{\sqrt{52}} = \frac{17}{2\sqrt{13}}.$$

Ответ: $d(a, b) = \dfrac{17}{2\sqrt{13}}$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г1.12** Треугольник ABC задан координатами вершин $A(1; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(3; 5)$. Найти площадь треугольника.

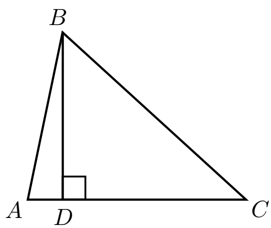
План решения:

1) Найдем длину стороны AC.

2) Найдем уравнение прямой AC.

3) Найдем длину высоты BD как расстояния от точки B до прямой AC.

4) Найдем площадь треугольника по формуле



$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD|.$$

1) $|AC| = \sqrt{(3-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{13}$.

2) AC: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{5-2}$, или $3x - 2y + 1 = 0$.

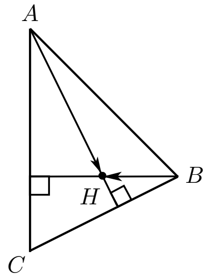
3) $|BD| = d(B; AC) = \dfrac{|3\cdot(-1) - 2\cdot 4 + 1|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{10}{\sqrt{13}}$.

4) $S = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\dfrac{10}{\sqrt{13}} = 5$ (кв. ед.).

Ответ: $S = 5$.

$\boxed{З}$ **Г1.13** Известны две вершины треугольника $A(6; 5)$, $B(10; 1)$ и точка $H(8; 1)$ пересечения его высот. Найти координаты вершины C.

План решения:



Будем искать точку C как точку пересечения двух прямых AC и BC. Для этого

1) Найдем вектор $\overline{AH}$ — вектор нормали прямой BC.

2) Составим уравнение прямой BC вида (Г1.5).

3) Найдем вектор $\overline{BH}$ — вектор нормали прямой AC.

4) Составим уравнение прямой AC вида (Г1.5).

5) Найдем точку C пересечения прямых BC и AC.

1) $\overline{AH} = (8-6; 1-5) = (2; -4)$.

2) BC: $2(x-10) - 4(y-1) = 0$, или $x - 2y - 8 = 0$.

3) $\overline{BH} = (8-10; 1-1) = (-2; 0)$.

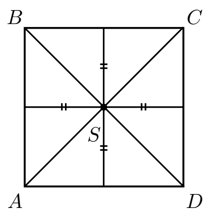
4) AC: $-2\cdot(x-6) + 0\cdot(y-5) = 0$, или $x - 6 = 0$.

5) C: $\begin{cases} x - 2y - 8 = 0, \\ x - 6 = 0. \end{cases} \Longrightarrow C(6; -1)$.

Ответ: $C(6; -1)$.

$\boxed{З}$ **Г1.14** Дано уравнение одной из сторон квадрата $3x - 4y + 1 = 0$ и точка $S(1; -1)$ пересечения его диагоналей. Составить уравнения остальных сторон.

План решения:



Пусть дано, например, уравнение стороны AB: $3x - 4y + 1 = 0$.

1) Найдем $d(S; AB)$.

2) Составим общее уравнение стороны CD, учитывая, что $CD \parallel AB$ и $d(S; CD) = d(S; AB)$.

3) Составим общие уравнения сторон BC и AD, учитывая, что они перпендикулярны прямой AB и $d(S; BC) = d(S; AD) = d(S; AB)$.

1) $d(S; AB) = \dfrac{|3\cdot 1 - 4\cdot(-1)+1|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{8}{5}$.

2) CD: $3x-4y+C=0$, $d(S; CD) = \dfrac{8}{5} \Longrightarrow \dfrac{|3\cdot 1 - 4\cdot(-1)+C|}{5} = \dfrac{8}{5}$ $\Longrightarrow |C+7| = 8 \Longrightarrow C_1 = 1,\ C_2 = -15 \Longrightarrow CD$: $3x-4y-15=0$ (при $C_1 = 1$ получим известную сторону AB).

3) BC: $4x+3y+C=0$, $d(S; BC) = \dfrac{8}{5} \Longrightarrow \dfrac{|4\cdot 1 + 3\cdot(-1)+C|}{5} = \dfrac{8}{5}$ $\Longrightarrow |C+1| = 8 \Longrightarrow C_1 = 7,\ C_2 = -9 \Longrightarrow$ пусть BC: $4x+3y+7=0$, AD: $4x+3y-9=0$.

Для следующих задач мы приведем планы решения — разбивку на простейшие задачи, которые предлагаем решить самостоятельно.

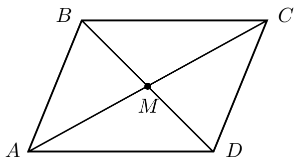
З **Г1.15** Даны уравнения двух сторон параллелограмма

$$x-2y+1=0 \qquad \text{и} \qquad 3x+5y-8=0$$

и точка пересечения его диагоналей $M(1;2)$. Составить уравнения двух других сторон.

План решения:

Заметим, что даны непараллельные стороны, например, AB: $x-2y+1=0$, BC: $3x+5y-8=0$.



1) Найдем точку B пересечения прямых AB и BC.

2) Найдем точку D, учитывая, что точка M — середина отрезка BD.

3) Через точку D проведем прямую CD параллельно AB и прямую AD параллельно BC.

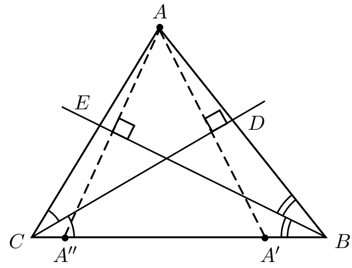
Ответ: CD: $x-2y+5=0$, AD: $3x+5y-18=0$.

З **Г1.16** Вершина треугольника находится в точке $A(-2;9)$, а биссектрисами двух его углов служат прямые $2x-3y+18=0$, $y+2=0$. Составить уравнение стороны, противоположной вершине A.

Заметим, что точка A не лежит на заданных прямых, т. к. ее координаты не удовлетворяют уравнениям этих прямых. Пусть, например, CD: $2x-3y+18=0$, BE: $y+2=0$.

План решения:

1) Т. к. биссектриса угла является его осью симметрии, то точка A', симметричная точке A относительно прямой CD лежит на прямой BC. Найдем точку A'.



2) Аналогично, найдем A'', симметричную точке A относительно прямой BE. Она также лежит на прямой BC.

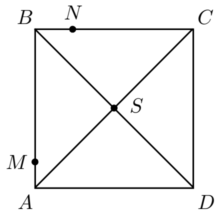
3) Составим уравнение прямой BC по двум точкам A' и A''.

Ответ: BC: $4x - y - 5 = 0$.

$\boxed{З}$ **Г1.17** Составить уравнения сторон квадрата $ABCD$, зная его центр $S(1; 6)$ и по точке на двух непараллельных сторонах: $M(4; 9)$ на стороне AB, $N(-5; 4)$ на стороне BC.

План решения:

1) Будем искать уравнение прямой AB в виде (Г1.2): $y - y_M = k(x - x_M)$, ищем k.



2) Так как $BC \perp AB$, то уравнение BC ищем также в виде (Г1.2): $y - y_N = -\dfrac{1}{k}(x - x_N)$.

Тем самым уже обеспечено, что $ABCD$ — прямоугольник.

3) Так как S — центр квадрата, то $d(S; AB) = d(S; BC)$. Из этого условия найдем k. Так как в формуле для расстояния от точки до прямой содержится знак модуля, то получим два варианта решения.

Ответ: A_1B_1: $3x + 5y - 57 = 0$, B_1C_1: $5x - 3y + 37 = 0$,
C_1D_1: $3x + 5y - 9 = 0$, D_1A_1: $5x - 3y - 11 = 0$;
A_2B_2: $9x - y - 27 = 0$, B_2C_2: $x + 9y - 31 = 0$,
C_2D_2: $9x - y + 21 = 0$, D_2A_2: $x + 9y - 79 = 0$.

Г1.1 Задачи для самостоятельного решения

Г.1.1 Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y = 0$ и $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин $(4; -1)$, составить уравнение двух других сторон.

Ответ: $x - 3y - 7 = 0$, $2x + 5y - 3 = 0$.

Г.1.2 Даны две стороны треугольника $x+3y-1=0$, $3x+5y-6=0$ и точка пересечения его высот $(0;0)$. Найти уравнение третьей стороны.

Ответ: $39x-9y-4=0$.

Г.1.3 Найти проекцию точки $(-5;6)$ на прямую $7x-13y-105=0$.

Ответ: $(2;-7)$.

Г.1.4 Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Составить уравнение остальных сторон, зная, что точка $(-9;-1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

Ответ: $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.

Г.1.5 Найти расстояние между параллельными прямыми $12x-16y-480$ и $3x-4y+43=0$.

Ответ: 11.

Г.1.6 Составить уравнение сторон квадрата $ABCD$, зная по точке на каждой из сторон: $P(2;1)$ на AB; $Q(0;1)$ на BC, $R(3;5)$ на CD, $S(-3;-1)$ на DA.

Ответ: Два решения:

$$A_1B_1\colon 7x+y-15=0,\quad B_1C_1\colon x-7y+7=0,$$
$$C_1D_1\colon 7x+y-26=0,\quad D_1A_1\colon x-7y-4=0;$$

$$A_2B_2\colon x-3y+1=0,\quad B_2C_2\colon 3x+y-1=0,$$
$$C_2D_2\colon x-3y+12=0,\quad D_2A_2\colon 3x+y+10=0.$$

Г2. Кривые второго порядка элементарная теория)

Приведем основные факты, необходимые для решения задач

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \tag{Г2.1}$$

каноническое уравнение эллипса;

$$c^2 = a^2 - b^2,$$

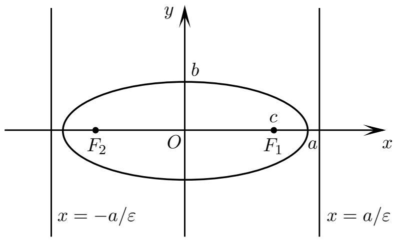
$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ — фокусы эллипса;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет;

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — директрисы;

$A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ — условие касания эллипса и прямой $Ax + By + C = 0$;

$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ — уравнение касательной с известной точкой $(x_0; y_0)$ касания.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{Г2.2}$$

каноническое уравнение гиперболы;

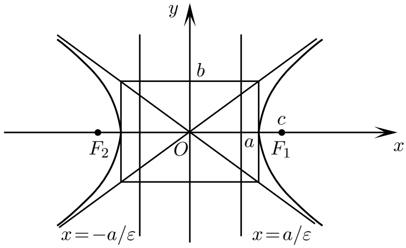
$c^2 = a^2 + b^2$, $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$ — фокусы гиперболы;

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ — эксцентриситет;

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ — директрисы;

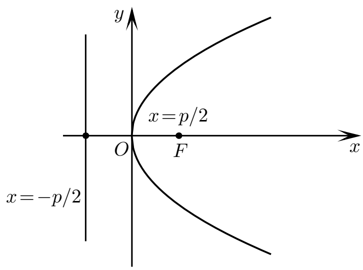
$y = \pm\frac{b}{a}x$ — асимптоты;

$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$ — условие касания гиперболы и прямой $Ax + By + C = 0$;



$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ — уравнение касательной с известной точкой $(x_0; y_0)$ касания.

$$y^2 = 2px \quad (p > 0)$$



каноническое уравнение параболы;

$F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$ — фокус;

$x = -\dfrac{p}{2}$ — директриса;

$pB^2 = 2AC$ — условие касания параболы и прямой $Ax + By + C = 0$;

$yy_0 = p(x + x_0)$ — уравнение касательной с известной точкой $(x_0; y_0)$ касания.

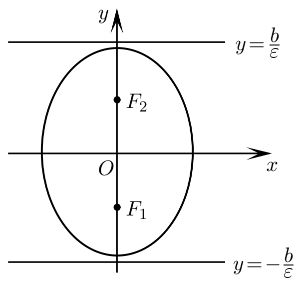
$\boxed{З}$ **Г2.1** Найти фокусы, эксцентриситет, директрисы эллипса

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$a = 5$, $b = 4$, $c = \sqrt{25 - 16} = 3$, $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$, эксцентриситет $\varepsilon = c/a$, или $\varepsilon = 3/5$ (заметим, что эксцентриситет эллипса $\varepsilon < 1$). Директрисы $x = \pm a/\varepsilon$, или $x = \pm 5/3$.

$\boxed{З}$ **Г2.2** Найти фокусы, эксцентриситет, директрисы эллипса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$



Заметим, прежде всего, что $a = 3$, $b = 5$ и $b > a$. Следовательно большая ось эллипса лежит на оси Oy (обратите внимание на чертеж). Поэтому фокусы расположены на оси Oy.

$c = \sqrt{25 - 9} = 4$, $F_1(0; -4)$, $F_2(0; 4)$, $\varepsilon = c/b$, или $\varepsilon = 4/5$. Директрисы параллельны малой оси эллипа, т. е. в этом случае они параллельны оси Oy $y = \pm b/\varepsilon$, или $y = \pm 5/4$.

$\boxed{З}$ **Г2.3** Составить каноническое уравнение эллипса, зная его фокус $(2; 0)$ и эксцентриситет $\varepsilon = 1/2$.

Фактически нужно найти полуоси a и b эллипса. Воспользуемся определениями фокусов и эксцентриситета:

$$F_2(c, 0), \quad \text{или} \quad F_2(2; 0) \quad \Longrightarrow \quad c = 2,$$

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = 4.$$

Учтем, кроме того, связь a, b, c:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 16 - 4 = 12.$$

Ответ: $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1.$

$\boxed{\text{З}}$ **Г2.4** Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, параллельных прямой ℓ: $3x - 2y + 5 = 0$.

Уравнения прямых, параллельных ℓ, имеют вид $3x - 2y + C = 0$. Потребуем выполнение условия касания $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \Longrightarrow$

$$9 \cdot 6 + 4 \cdot 4 = C^2 \quad \Longrightarrow C = \pm\sqrt{70}.$$

Ответ: Две касательные: $3x - 2y + \sqrt{70} = 0$ и $3x - 2y - \sqrt{70} = 0$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г2.5** Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 2y^2 = 8$, проходящих через точку $M(2; \sqrt{2})$.

Проверим, лежит ли точка M на эллипсе: $2^2 + 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 8$ — это верное равенство, значит точка M лежит на эллипсе, т. е. является точкой касания. В этом случае через точку M проходит единственная касательная и можно записать уравнение касательной с известной точкой касания:

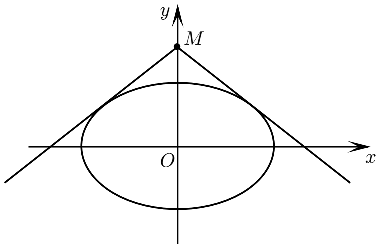
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Сначала уравнение эллипса перепишем в виде $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, тогда $\dfrac{2x}{8} + \dfrac{\sqrt{2}y}{4} = 1$ — уравнение касательной.

Ответ: $\dfrac{x}{4} + \dfrac{\sqrt{2}y}{4} = 1.$

$\boxed{\text{З}}$ **Г2.6** Составить уравнения касательных к эллипсу $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, проходящих через точку $M(0; 6)$.

Проверим, лежит ли точка M на эллипсе: $\frac{0}{8}+\frac{36}{4}\neq 1$, следовательно точка M не лежит на эллипсе. В этом случае есть две касательные, проходящие через точку M. Будем искать уравнение касательной в виде $y-y_0=k(x-x_0)$, или $y-6=kx$ — эта прямая должна касаться эллипса. Потребуем выполнение условие касания $A^2a^2+B^2b^2=C^2$, или



$$k^2\cdot 8+4=36,\quad k^2=4,\quad k=\pm 2.$$

Ответ: $2x-y+6=0$, $-2x-y+6=0$.

$\boxed{З}$ **Г2.7** Найти фокусы, эксцентриситет, директрисы, асимптоты гиперболы

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$$

Из уравнения гиперболы находим $a=4$, $b=3$.

$F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, $c=\sqrt{16+9}=5$, следовательно, фокусы: $F_1(-5;0)$, $F_2(5;0)$. Эксцентриситет по определению $\varepsilon=c/a$, или $\varepsilon=5/4$ (заметим, что для гиперболы $\varepsilon>1$). Директрисы: $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, или $x=\pm\frac{16}{5}$. Асимптоты: $y=\pm\frac{b}{a}x$, или $y=\pm\frac{3}{4}x$.

$\boxed{З}$ **Г2.8** Составить уравнение гиперболы с асимптотами $y=\pm x$ и директрисами $x=\pm\sqrt{6}$.

Из определения асимптот $y=\pm\frac{b}{a}x$ и директрис $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ следует, что в данной задаче $\frac{b}{a}=1$, $\frac{a}{\varepsilon}=\sqrt{6}$, или

$$\begin{cases} a=b,\\ a^2=\sqrt{6}c. \end{cases}$$

Так как $c^2=a^2+b^2$, то получим систему уравнений

$$\begin{cases} a=b,\\ a^2=\sqrt{6}c,\\ c^2=a^2+b^2. \end{cases}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} c^2=2\sqrt{6}c,\\ a^2=\sqrt{6}c,\\ a=b. \end{cases}$$

Учитывая, что $c \neq 0$, находим

$$\begin{cases} c^2 = 2\sqrt{6}, \\ a^2 = b^2 = 12. \end{cases}$$

Ответ: Уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

$\boxed{З}$ **Г2.9** Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, перпендикулярных прямой $x + 2y = 0$.

Уравнения всех прямых, перпендикулярных прямой $x + 2y = 0$, имеют вид $2x - y + C = 0$. Потребуем выполнение условия касания $A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$, или $4 \cdot 9 - 1 \cdot 4 = C^2$, $C^2 = 32$, $C = \pm 4\sqrt{2}$.

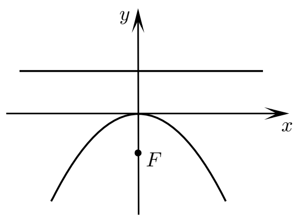
Ответ: $2x - y + 4\sqrt{2} = 0$, $2x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

$\boxed{З}$ **Г2.10** Найти фокус и директрису параболы $y^2 = 32x$.

Из определения фокуса и директрисы $F\left(\dfrac{p}{2}; 0\right)$, $x = -\dfrac{p}{2}$ следует, что для данной параболы фокус $F(8; 0)$ (обратите внимание, $p = 16$), директриса $x = -8$.

$\boxed{З}$ **Г2.11** Найти фокус и директрису параболы $x^2 = -16y$.

Обратите внимания на чертеж. По определению фокус параболы в этом случае $F\,(0; -p/2)$, директриса $y = p/2$, или $F(0; -4)$, $(p = 8)$, $y = 4$.



$\boxed{З}$ **Г2.12** Составить уравнения касательных к параболе $y^2 = 24x$, проходящих через точку $M(-2; 4)$.

Проверим, лежит ли точка M на параболе: $16 \neq 24 \cdot (-2)$, следовательно точка M не является точкой касания. Будем искать уравнение касательной в виде $y - 4 = k(x + 2)$, или $kx - y + 2k + 4 = 0$. Потребуем выполнения условия касания $pB^2 = 2AC$, или $12 = 2 \cdot k \cdot (2k + 4)$, $k^2 + 2k - 3 = 0$, $k_1 = -3$; $k_2 = 1$.

Ответ: $3x + y + 2 = 0$, $x - y + 6 = 0$.

Г2.1 Задачи для самостоятельного решения

Г2.1.1 Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b = 3$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Г2.1.2 На эллипсе $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти точку, расстояние которой от правого фокуса (r_1) в четыре раза больше ее расстояния от левого фокуса (r_2)

Указание. Воспользоваться формулами для фокальных радиус-векторов $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Ответ: $\left(-\dfrac{15}{4}; \pm\dfrac{\sqrt{63}}{4}\right).$

Г2.1.3 Составить уравнения касательных к эллипсу $x^2 + 4y^2 = 20$, перпендикулярных биссектрисе первого координатного угла.

Ответ: $x + y \pm 5 = 0.$

Г2.1.4 Найдите фокусы, эксцентриситет, директрисы и асимптоты гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = -1.$

Указание. Обратите внимание на знак правой части уравнения гиперболы и сделайте чертеж.

Ответ: $F_1(0;-5)$, $F_2(0;5)$, $\varepsilon = \dfrac{5}{4}$, $y = \pm\dfrac{16}{5}$; $y = \pm\dfrac{4}{3}x.$

Г2.1.5 Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось $a = 2\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{1{,}2}$.

Ответ: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Г2.1.6 Найти эксцентриситет гиперболы, асимптота которой составляет с вещественной осью угол 60°.

Ответ: $\varepsilon = 2.$

Г2.1.7 Составить уравнения касательных к гиперболе $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{6} = 1$, параллельных прямой $5x - 2y + 1 = 0$.

Ответ: $5x - 2y \pm \sqrt{26} = 0.$

Г2.1.8 Найти фокус и директрису параболы $x^2 - 4y = 0$.

Ответ: $F(0;1)$, $y = -1$.

Г2.1.9 На параболе $y^2 = 6x$ найти точку, расстояние которой от фокуса равно 4,5.

Ответ: $(3; \pm 3\sqrt{2})$.

Г2.1.10 Составить уравнение касательной к параболе $y^2 = 8x$, параллельной прямой $x + y - 5 = 0$.

Ответ: $x + y + 2 = 0$.

Г3. Общая теория кривых второго порядка

В этом разделе приведены решения задач двух основных типов:

1) составить общее уравнение кривой по заданным геометрическим условиям.

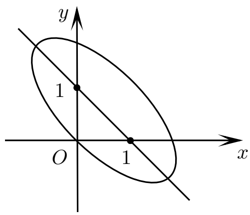
2) по общему уравнению кривой определить тип кривой и ее размеры (приведение общего уравнения кривой к каноническому виду).

Заметим, прежде всего, что уравнение кривой 2-го порядка имеет канонический вид, если система декартовых прямоугольных координат выбрана специальным образом, например, для эллипса: начало координат совпадает с центром эллипса, а оси координат служат осями симметрии эллипса (такое расположение кривой назовем каноническим). В любой другой системе координат уравнение кривой имеет, так называемый, общий вид:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

$\boxed{З}$ **Г3.1** Найти уравнение эллипса с фокусами $F_1(1;0)$, $F_2(0;1)$, если большая ось его равна $2a = 2$.

Как видно из чертежа, расположение эллипса не является каноническим. Воспользуемся определением эллипса: для любой точки $M(x, y)$ эллипса $|MF_1| + |MF_2| = 2a$. Запишем это равенство в координатах:



$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2.$$

Далее упростим это уравнение стандартным образом:

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 - \sqrt{x^2 + (y-1)^2},$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4 - 4\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + x^2 + y^2 - 2y + 1,$$
$$2\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2 + x - y,$$
$$4x^2 + 4y^2 - 8y + 4 = 4 + x^2 + y^2 + 4x - 4y - 2xy.$$

Ответ: $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$ — общее уравнение эллипса.

$\boxed{З}$ **Г3.2** Составить уравнение гиперболы, один из фокусов которой $F(1;1)$, соответствующая ему директриса ℓ: $x + y - 1 = 0$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}$.

Как следует из условия, расположение гиперболы не является каноническим. Воспользуемся теоремой: для любой точки $M(x, y)$ гиперболы $\dfrac{|MF|}{d(M, \ell)} = \varepsilon$. Запишем это равенство в координатах:

$$\frac{\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}}{\dfrac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

Далее упростим это уравнение:

$$\begin{aligned}&\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x+y-1|,\\ &x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y.\end{aligned}$$

Ответ: $2xy - 1 = 0$ — общее уравнение гиперболы.

$\boxed{З}$ **Г3.3** Составить уравнение параболы с фокусом $F(2; 3)$ и директрисой

$$\ell\colon x - 2y + 1 = 0.$$

Как следует из условия, расположение параболы не является каноническим. Воспользуемся определением параболы:

для любой точки $M(x, y)$ параболы

$$|MF| = d(M, \ell).$$

Запишем это равенство в координатах:

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}.$$

Далее упростим уравнение:

$$5(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = x^2 + 4y^2 + 1 - 4xy + 2x - 4y.$$

Ответ: $4x^2+4xy+y^2-22x-26y+64 = 0$ — общее уравнение параболы.

Рассмотрим теперь **решения задач на определение типа кривой по ее общему уравнению.** Одним из методов решения таких задач является метод перехода к новой системе координат, в которой кривая расположена канонически. Как известно, перейти к новой системе координат можно в два этапа: совершить поворот осей координат и затем выполнить параллельный перенос.

Известно, что всегда можно найти такой угол α, при повороте на который осей координат в новом уравнении кривой исчезнет слагаемое с произведением переменных.

$\boxed{З}$ **Г3.4** Определить тип линии и ее размеры по общему уравнению

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0. \qquad (Г3.1)$$

1) Перейдем к новой системе координат, совершив поворот осей на угол α:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим эти выражения x, y в уравнение кривой, раскроем скобки, выпишем коэффициент при произведении $x'y'$ и потребуем, чтобы он обратился в ноль:

$$5\cdot(-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha) + 4\cdot(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 8\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0,$$

получим уравнение для отыскания угла α поворота осей, решим его:

$$\begin{aligned} &4\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^2\alpha = 0, \\ &2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - 3\,\mathrm{tg}\,\alpha - 2 = 0, \quad \mathrm{tg}\,\alpha_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{25}}{4}, \\ &\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 2, \quad \mathrm{tg}\,\alpha_2 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Выберем, например, $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = 2$. Найдем

$$\cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\alpha_1 = \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Запишем формулы поворота осей: $x = \dfrac{x'-2y'}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{2x'+y'}{\sqrt{5}}$. Подставим эти выражения x, y в уравнение (Г3.1), раскроем скобки приведем подобные члены, при этом коэффициент при произведении $x'y'$ обращается в ноль:

$$x'^2\left(5\cdot\frac{1}{5} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 8\cdot\frac{4}{5}\right) + y'^2\left(5\cdot\frac{4}{5} + 4\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 8\cdot\frac{1}{5}\right) +$$

$$+\,x'\left(-32\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - 56\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(-32\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 56\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 80 = 0,$$

или

$$9x'^2 + 4y'^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + 80 = 0. \qquad (Г3.2)$$

2) Теперь будем искать параллельный перенос, который приведет уравнение кривой к каноническому виду. Для этого можно применить прием «дополнение до полных квадратов»: сгруппируем слагаемые, содержащие x', и слагаемые, содержащие y', в уравнении (Г3.2)

вынося при этом коэффициент при квадратах x', y' за скобки

$$9\left(x'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x'\right) + 4\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y'\right) + 80 = 0.$$

Дополним слагаемые в каждой скобке до полных квадратов:

$$9\left(x'^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x' + \frac{64}{5}\right) - 9\cdot\frac{64}{5} + 4\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}\right) - 4\cdot\frac{1}{5} + 80 = 0,$$

$$9\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36. \qquad (\text{Г}3.3)$$

Рассмотрим параллельный перенос осей по формулам

$$\begin{cases} x'' = x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}, \\ y'' = y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

В новой системе координат уравнение (Г3.3) примет вид

$$9x''^2 + 4y''^2 = 36, \quad \text{или} \quad \frac{x''^2}{4} + \frac{y''^2}{9} = 1.$$

Итак, заданная кривая есть эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г3.5** Определить тип линии и ее размеры по общему уравнению

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0. \qquad (\text{Г}3.4)$$

1)

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases}$$

Подставим эти выражения x, y в уравнение, найдем коэффициент при $x'y'$ и приравняем его к нулю:

$$-2\cos\alpha\cdot\sin\alpha - 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + 4\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 0,$$
$$2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = 0,$$
$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 3\operatorname{tg}\alpha - 2 = 0, \quad \operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{4} = \frac{-3\pm 5}{4},$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = -2.$$

Выберем, например, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{1}{2}$. Находим $\cos\alpha_1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\alpha_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Запишем формулы найденного поворота осей координат $x = \dfrac{2x' - y'}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{x' + 2y'}{\sqrt{5}}$. Подставим эти выражения x, y в уравнение (Г3.4), раскроем скобки и приведем подобные слагаемые

$$x'^2\left(\frac{4}{5} - 4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + 4\cdot\frac{1}{5}\right) + y'^2\left(\frac{1}{5} - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + 4\cdot\frac{4}{5}\right) +$$
$$+x'\left(4\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - 3\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + y'\left(4\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) - 3\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 7 = 0,$$

или

$$5y'^2 + \sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' - 7 = 0. \qquad (\text{Г}3.5)$$

2) Будем искать параллельный перенос осей. Из уравнения (Г3.5) уже видно, что речь идет о кривой параболического типа. Сначала дополним до полного квадрата слагаемые с переменной y':

$$5\left(y'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{5}\right) - 5\cdot\frac{1}{5} + \sqrt{5}x' - 7 = 0,$$

или

$$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\sqrt{5}x' + 8.$$

Теперь вынесем за скобку справа коэффициент при x':

$$5\left(y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\sqrt{5}\left(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}\right). \qquad (\text{Г}3.6)$$

Совершим параллельный перенос по формулам $x'' = x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $y'' = y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. В новой системе координат уравнение (Г3.6) привет вид

$$5y''^2 = -\sqrt{5}x'' \quad \text{или} \quad y''^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x''.$$

Итак, заданная кривая есть парабола с параметром $p = -\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

Г3.1 Задачи для самостоятельного решения

Г3.1.1 Составить уравнение эллипса, если известны его:

эксцентриситет $\varepsilon = 1/2$, фокус $F(3;0)$ и соответствующая директриса $x + y - 1 = 0$.

Ответ: $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0.$

Г3.1.2 Составить уравнение эллипса с фокусами $F_1(1;3)$, $F_2(3;1)$, если расстояние между директрисами равно $12\sqrt{2}$.

Ответ: $11x^2 + 2xy + 11y^2 - 48x - 48y - 24 = 0.$

Г3.1.3 Составить уравнение гиперболы, зная расстояние между вершинами 24 и фокусы $F_1(-10;2)$, $F_2(16;2)$.

Ответ: $\dfrac{(x-3)^2}{144} - \dfrac{(y-2)^2}{25} = 1.$

Г3.1.4 Составить уравнение гиперболы, зная один из фокусов $(-2;2)$, соответствующую директрису $2x - y - 1 = 0$ и точку $M(1;-2)$ на гиперболе.

Ответ: $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0.$

Г3.1.5 Составить уравнение параболы с фокусом $F(2;-1)$ и директрисой $x - y - 1 = 0$.

Ответ: $x^2 + 2xy + y^2 - 6x + 2y + 9 = 0.$

Г3.1.6 Привести уравнение кривой к каноническому виду, используя преобразование координат:

а) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$

Ответ: $\dfrac{{x'}^2}{1} - \dfrac{{y'}^2}{4} = 1.$

б) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0.$

Ответ: $\dfrac{{x'}^2}{16} + \dfrac{{y'}^2}{9} = 1.$

в) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0.$

Ответ: пара параллельных прямых $x' = \pm 1.$

г) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0.$

Ответ: ${y'}^2 = 2x'.$

Г4. Векторная алгебра

В этом разделе приведены решения простейших задач векторной алгебры в координатной форме: умножение вектора на число, сложение (вычитание) векторов; скалярное, векторное произведение векторов; смешанное произведение трех векторов. Основная цель этих задач — подготовить аппарат, который успешно используется при решении задач на тему «прямая и плоскость в пространстве».

Предполагается, что во всех задачах координаты векторов заданы в ортонормированном базисе.

З **Г4.1** Найти единичный вектор, сонаправленный с вектором

$$\vec{a} = (2; -1; 3).$$

Эта операция называется нормированием вектора $\vec{a}$ и часто используется при решении более сложных задач.

Обозначим искомый вектор $\vec{a}^\circ$. Найдем длину вектора $\vec{a}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{14}.$$

Умножим вектор $\vec{a}$ на число $1/|a|$, получим вектор единичной длины:

$$\vec{a}^\circ = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}; -\frac{1}{\sqrt{14}}; \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

З **Г4.2** Даны векторы $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (4; 0; 5)$. Найти единичный вектор $\vec{\ell}$, противоположно направленный с вектором $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Найдем координаты вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 3 \cdot (2; 3; -1) - 2 \cdot (4; 0; 5) = (6 - 8; 9 - 0; -3 - 10) = (-2; 9; -13).$$

Пронормируем вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c}^\circ = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{c}}{\sqrt{4 + 81 + 169}} = \left(\frac{-2}{\sqrt{254}}; \frac{9}{\sqrt{254}}; \frac{-13}{\sqrt{254}}\right).$$

Тогда $\vec{\ell} = -\vec{c}^\circ = \left(\frac{-2}{\sqrt{254}}; \frac{-9}{\sqrt{254}}; \frac{13}{\sqrt{254}}\right)$.

$\boxed{З}$ **Г4.3** Найти угол α между векторами $\vec{a} = (2;1;5)$ и $\vec{b} = (-3;2;1)$.

Воспользуемся формулой

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}} =$$

$$= \frac{-6+2+5}{\sqrt{4+1+25}\cdot\sqrt{9+4+1}} = \frac{1}{\sqrt{30}\cdot\sqrt{14}} = \frac{1}{2\sqrt{105}}.$$

Ответ: $\alpha = \arccos\dfrac{1}{2\sqrt{105}}$.

$\boxed{З}$ **Г4.4** Найти проекцию вектора $\vec{a} = (3;2;5)$ на ось, заданную вектором $\vec{u} = (2;-1;2)$.

Воспользуемся формулой

$$\text{пр.}_{\vec{u}}\vec{a} = (\vec{a},\vec{u}^{\circ}).$$

Пронормируем вектор $\vec{u}$:

$$\vec{u}^{\circ} = \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\vec{u}}{3} = \left(\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

$$\text{пр.}_{\vec{u}}\vec{a} = (\vec{a},\vec{u}^{\circ}) = 3\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 5\cdot\frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

$\boxed{З}$ **Г4.5** Найти координаты векторного произведения векторов $\vec{a} = (8;3;1)$ и $\vec{b} = (2;-4;7)$.

Будем искать векторное произведение «в форме определителя третьего порядка» ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — это векторы ортонормированного базиса):

$$[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i}(21+4) - \vec{j}(56-2) + \vec{k}(-32-6) =$$

$$= 25\vec{i} - 54\vec{j} - 38\vec{k} = (25; -54; -38).$$

$\boxed{З}$ **Г4.6** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3;-1;1)$ и $\vec{b} = (4;2;-3)$.

Воспользуемся геометрическим смыслом длины векторного произведения:
$\left|[\vec{a}\times\vec{b}]\right|$ — площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Найдем координаты $[\vec{a}\times\vec{b}]$:

$$[\vec{a}\times\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}(3-2) - \vec{j}(-9-4) + \vec{k}(6+4) =$$

$$= \vec{i} + 13\vec{j} + 10\vec{k} = (1; 13; 10).$$

$$S = |[\vec{a}\times\vec{b}]| = \sqrt{1+169+100} = \sqrt{270}\ \text{(кв. ед.)}.$$

$\boxed{З}$ **Г4.7** Найти смешанное произведение векторов $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 4)$.

Воспользуемся правилом нахождения смешанного произведения в координатах:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(8-0) + 1(12+1) + 3(0+2) = 16 + 13 + 6 = 35.$$

$\boxed{З}$ **Г4.8** Проверить, являются ли векторы $\vec{a} = (3; -1; 2)$, $\vec{b} = (6; 4; 1)$, $\vec{c} = (0; -6; 3)$ компланарными.

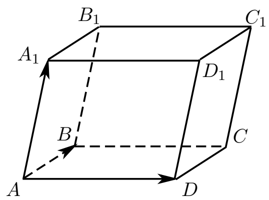
Воспользуемся критерием компланарности векторов:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{векторы компланарны.}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 3 \end{vmatrix} = 3(12+6) + 1(18-0) + 2(-36-0) =$$

$$= 54 + 18 - 72 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{векторы компланарны.}$$

$\boxed{З}$ **Г4.9** Найти объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $A(1;0;1)$, $B(2;1;3)$, $D(3;2;-4)$, $A_1(2;2;2)$.



Воспользуемся геометрическим смыслом смешанного произведения: $|(\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA_1})| = V$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA_1}$. Найдем координаты этих векторов:

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= (2-1; 1-0; 3-1) = (1;1;2),\\ \overline{AD} &= (3-1; 2-0; 1+4) = (2;2;5),\\ \overline{AA_1} &= (2-1; 2-0; 2-1) = (1;2;1).\end{aligned}$$

$$V = \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = |1(2-10) - 1(4-2) + 2(4-2)| =$$

$$= |-8-2+4| = 6 \text{ (куб. ед.)}$$

Г4.1 Задачи для самостоятельного решения

Г4.1.1 Пронормировать вектор $\vec{a} = (-2;2;1)$.

Ответ: $\vec{a}^{\circ} = \left(-\dfrac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

Г4.1.2 Найти вектор $\vec{c} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;2;1)$, $\vec{b} = (2;-1;3)$.

Ответ: $\vec{c} = (-5;10;-9)$.

Г4.1.3 Проверить, являются ли векторы $\vec{a} = (2;-3;7)$ и $\vec{b} = (1;3;1)$ ортогональными.

Ответ: $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

Г4.1.4 Найти высоты параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (8;4;1)$, $\vec{b} = (3;2;6)$.

Ответ: $h_1 = 4\sqrt{2}$, $h_2 = \dfrac{28\sqrt{2}}{9}$.

Г4.1.5 Проверить, компланарны ли векторы $\vec{a} = (2;1;-5)$, $\vec{b} = (1;0;3)$, $\vec{c} = (7;2;3)$.

Ответ: Нет.

Г4.1.6 Найти высоты параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (3; 1; 0)$, $\vec{c} = (-1; 2; 4)$.

Ответ: $\dfrac{15}{\sqrt{35}}, \dfrac{3}{\sqrt{5}}, \dfrac{15}{\sqrt{209}}$.

Г4.1.7 Доказать, что четыре точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ лежат в одной плоскости.

Г4.1.8 Даны вершины треугольника $A(1; -1; 2)$, $B(5; -6; 2)$, $C(1; 3; -1)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Ответ: $h = 5$.

Г5. Прямая и плоскость в пространстве

В начале этого раздела приведем основные виды уравнений прямых и плоскостей в пространстве:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0 \tag{Г5.1}$$

— общее уравнение плоскости, $\vec{n} = (A; B; C)$ — вектор нормали (вектор, перпендикулярный плоскости);

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{Г5.2}$$

— общее уравнение плоскости с известной точкой $(x_0; y_0; z_0)$;

$$\begin{gathered} \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \\ \lambda^2 + \mu^2 \neq 0 \end{gathered} \tag{Г5.3}$$

— уравнение пучка плоскостей;

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}, \quad \ell^2 + m^2 + n^2 \neq 0 \tag{Г5.4}$$

— параметрические уравнения прямой, $\vec{u} = (\ell; m; n)$ — направляющий вектор прямой;

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{Г5.5}$$

— канонические уравнения прямой;

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \tag{Г5.6}$$

— прямая задана как линия пересечения двух непараллельных плоскостей.

Приведем, прежде всего, решение простейших задач на эту тему. Решение более сложных задач, как правило, можно разбить на последовательность простейших задач.

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.1** Составить уравнение плоскости α, проходящей через точку $M_0(-1;2;3)$ параллельно плоскости β: $5x-7y+z-4=0$.

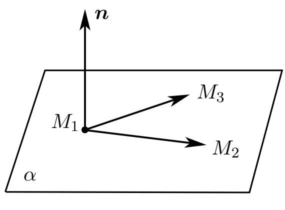
Заметим, что т. к. $\alpha \parallel \beta$, то можно считать, что вектор нормали $\vec{n}_\beta=(5;-7;1)$ является вектором нормали и плоскости α. Далее воспользуемся уравнением (Г5.2):

$$\alpha\colon 5(x+1)-7(y-2)+(z-3)=0, \quad \text{или}$$

Ответ: α: $5x-7y+z+16=0$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.2** Составить уравнение плоскости α, проходящей через три заданные точки $M_1(2;1;0)$, $M_2(3;1;4)$, $M_3(-3;2;5)$.

Заметим, что векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ лежат в плоскости. По определению их векторное произведение перпендикулярно плоскости α, поэтому можно считать



$$\vec{n}_\alpha=[\overline{M_1M}_2\times\overline{M_1M}_3]=\begin{vmatrix} \vec{i}\ \ \vec{j}\vec{k} \\ 1\ \ 04 \\ -515 \end{vmatrix}=(-4;-25;1).$$

Далее составим уравнение α вида (Г5.2), выбрав в качестве известной, например, точку M_1:

$$\alpha\colon\ -4(x-2)-25(y-1)+z=0.$$

Ответ: α: $4x+25y-z+33=0$.

$\boxed{З}$ **Г5.3** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2;-1;3)$ и через линию пересечения плоскостей β: $x + y - z = 0$ и γ: $2x + y + z - 1 = 0$.

Заметим, что в тех задачах, где требуется найти уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения двух заданных плоскостей, удобнее воспользоваться уравнением пучка плоскостей (Г5.3):

$$\alpha\colon \lambda(x + y - z) + \mu(2x + y + z - 1) = 0.$$

Подставим в это уравнение вместо переменных координаты точки M_0, потребовав тем самым, чтобы точка M_0 лежала в плоскости α:

$$\lambda(2 - 1 - 3) + \mu(4 - 1 + 3 - 1) = 0,$$

или

$$-2\lambda + 5\mu = 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2}.$$

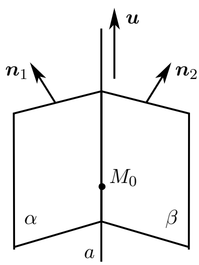
Пусть, например, $\lambda = 5$, $\mu = 2$. Эти значения λ, μ подставляем в уравнение плоскости α.

Ответ: α: $9x + 7y - 3z - 2 = 0$.

$\boxed{З}$ **Г5.4** Найти параметрические уравнения прямой

$$a\colon \begin{cases} x - 3y + 6 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Заметим, что из условия мы видим векторы нормалей плоскостей $\vec{n}_1 = (1;-3;0)$, $\vec{n}_2 = (2;1;-1)$. Их векторное произведение есть вектор, перпендикулярный к ним, т. е. параллельный прямой a, поэтому является направляющим вектором искомой прямой.



$$\vec{u} = [\vec{n}_1 \times \vec{n}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (3;1;7).$$

Найдем какую-нибудь точку M_0 на прямой a, т. е. любое решение системы

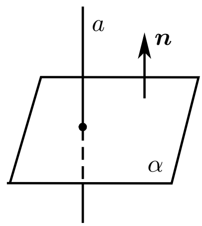
$$\begin{cases} x - 3y + 6 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$$

Пусть, например, $x_0 = 0$, тогда $y_0 = 2$, $z_0 = 2$. Составим параметрические уравнения прямой a.

Ответ: $a\colon \begin{cases} x = 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 + 7t. \end{cases}$

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.5** Составить уравнение прямой a, проходящей через точку $M_0(5; 2; 3)$ перпендикулярно плоскости $\alpha\colon 3x-y+2z-1 = 0$.

Заметим, что вектор нормали плоскости $\vec{n} = (3; -1; 2)$ можно принять за направляющий вектор прямой, поэтому можно сразу записать или параметрические, или канонические уравнения прямой.



Ответ: $\alpha\colon \dfrac{x-5}{3} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.6** Найти точку M пересечения прямой $a\colon \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+1}{1}$ и плоскости $\alpha\colon x + 2y - z + 5 = 0$.

Запишем параметрические уравнения прямой $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = -1 + t$. Так как точка пересечения лежит одновременно в плоскости и на прямой, то ее координаты одновременно удовлетворяют уравнениям прямой и уравнению плоскости. Поэтому следует решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3t \\ z = -1 + t \\ x + 2y - z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Подставим в последнее уравнение выражения x, y, z и найдем t:

$$1 + 2t + 2 \cdot 3t - (-1 + t) + 5 = 0, \quad 7t + 7 = 0, \quad t = -1.$$

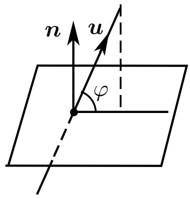
Теперь находим $x = 1 - 2 = -1$, $y = -3$, $z = -1 - 1 = -2$.

Ответ: $M(-1; -3; -2)$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.7** Найти угол между прямой $a\colon \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и плоскостью $\alpha\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$.

Заметим, что

$$|\cos(\widehat{\vec{n},\vec{u}})| = |\cos(90^\circ - \varphi)| = \sin\varphi.$$



Из условия видим $\vec{n} = (2; -1; 3)$, $\vec{u} = (1; -1; 2)$. Поэтому

$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{n},\vec{u})|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{|2+1+6|}{\sqrt{4+1+9}\cdot\sqrt{1+1+4}} = \frac{9}{2\sqrt{21}}.$$

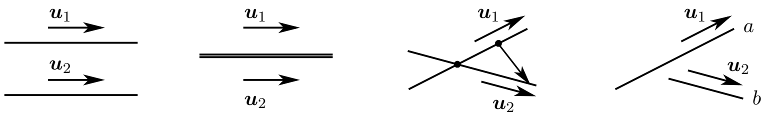
Ответ: $\varphi = \arcsin\dfrac{9}{2\sqrt{21}}$.

Рассмотрим теперь несколько **типовых задач на установление взаимного расположения прямых и плоскостей.**

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.8** Установить взаимное расположение двух прямых

$$a\colon \begin{cases} x = 1 + 4t, \\ y = -t, \\ z = 3 + 2t, \end{cases} \qquad b\colon \begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Покажем, какие возможны ситуации



$a \parallel b$ $\quad$ a совпадает с b $\quad$ a и b пересекаются $\quad$ a и b скрещиваются

Из уравнений прямых видим $\vec{u}_1 = (4; -1; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; 0; 1)$. Векторы не параллельны, значит прямые или пересекаются, или скрещиваются. Проверить пересекаются ли прямые можно двумя способами.

<u>Способ 1.</u> Если прямые пересекаются, то векторы $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overline{M_1M_2}$ (M_1 и M_2 — точки на прямой a и на прямой b) лежат в одной плоскости (компланарны). Найдем смешанное произведение этих векторов, выбрав $M_1(1; 0; 3)$, $M_2(-1; 1; 2)$:

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \overline{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

следовательно векторы компланарны, т. е. прямые пересекаются.

<u>Способ 2.</u> Если прямые пересекаются, то у них есть общая точка, координаты которой могут быть найдены из уравнений прямой a при каком-то значении t_1 параметра и из уравнений прямой b при каком-то значении t_2 параметра. Выясним, есть ли такие значения t_1, t_2, при которых

$$\begin{cases} 1+4t_1 = -1+2t_2, \\ \quad -t_1 = 1, \\ 3+2t_1 = 2+t_2. \end{cases}$$

Решим любые два из этих уравнений и подставим найденные t_1, t_2 в третье уравнение. Если получим верное равенство, то будет найдено решение t_1, t_2 системы.

$$\begin{cases} t_1 = -1, \\ t_2 = -1, \\ 3-2 = 2-1 \end{cases}$$

— верно, значит есть точка пересечения. Ее координаты можно найти, подставив t_1 в уравнение прямой a, или подставив t_2 в уравнение прямой b. В нашем случае точка пересечения $M(-3;1;1)$.

Замечание. Способ 2 дает возможность не только проверить пересекаются ли прямые, но и найти точку пересечения.

$\boxed{З}$ **Г5.9** Установить взаимное расположение прямых

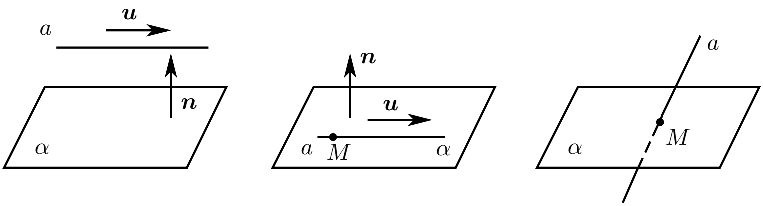
$$a\colon \begin{cases} x=-1+t, \\ y=2-t, \\ z=3t, \end{cases} \qquad b\colon \begin{cases} x=2t, \\ y=1-2t, \\ z=3+6t. \end{cases}$$

Находим $\vec{u}_1 = (1;-1;3)$, $\vec{u}_2 = (2;-2;6)$. Так как $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$, то прямые или параллельны, или совпадают. В последнем случае любая точка прямой a лежит и на прямой b. Возьмем точку $M(-1;2;0)$ на прямой a. Подставим ее координаты в уравнение прямой b. Так как получаем одно и то же значение $t=-1/2$, то точка M лежит и на прямой b.

Ответ: Прямые совпадают.

$\boxed{З}$ **Г5.10** Установить взаимное расположение прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{4}$ и плоскости α: $3x+2y-3z+1=0$.

Покажем, какие возможны ситуации.



$a \parallel \alpha$ $\qquad$ $a \subset \alpha$ $\qquad$ $a \cap \alpha = M$

Из условия видим $\vec{u} = (2; 3; 4)$, $\vec{n} = (3; 2; -3)$. Если $a \parallel \alpha$ или $a \subset \alpha$, то эти векторы перпендикулярны. Проверим это.

$$(\vec{u}, \vec{n}) = 6 + 6 - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{векторы перпендикулярны.}$$

Если $a \subset \alpha$, то любая точка прямой лежит и в плоскости. Возьмем, например, точку $M(1; -2; 0)$. Подставим ее координаты в уравнение плоскости

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad M \in \alpha.$$

Ответ: Прямая лежит в плоскости.

Теперь приведем **решения типовых задач на отыскание расстояний между точками, прямыми, плоскостями.**

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.11** Найти расстояние от точки $M_0(2; -3; 5)$ до плоскости α:

$$2x - y - 2z - 3 = 0.$$

Для решения этой задачи воспользуемся известной формулой

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

или

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|2 \cdot 2 + 3 - 2 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{6}{3}.$$

Ответ: $d(M_0, \alpha) = 2$.

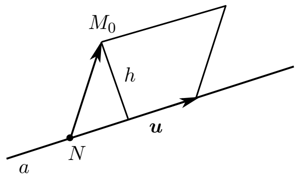
$\boxed{\text{З}}$ **Г5.12** Найти расстояние от точки $M_0(1; -2; 3)$ до прямой a:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 5}{3}.$$

Для решения этой задачи есть два способа.

Способ 1. Выберем любую точку N на прямой a, например, $N(1; 2; -5)$. Построим параллелограмм на векторах $\overline{NM_0}$ и $\vec{u} = (2; -1; 3)$.

Тогда высота h и является искомым расстоянием $d(M_0, a)$. Высоту h найдем, из формулы для площади параллелограмма $S = h \cdot |\vec{u}|$, а площадь параллелограмма найдем как длину векторного произведения $S = |[\overline{NM_0} \times \vec{u}]|$.



$$[\overline{NM_0} \times \vec{u}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-4; 16; 8),$$

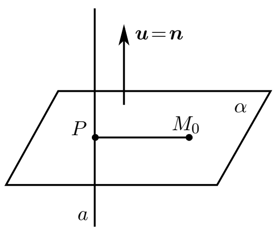
$$S = |[\overline{NM_0} \times \vec{u}]| = \sqrt{4^2 + 16^2 + 8^2} = 4\sqrt{21},$$

$$d(M_0, a) = h = \frac{4\sqrt{21}}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{6}.$$

Способ 2. Построим плоскость α, проходящую через точку M_0, перпендикулярно прямой a:

$$\alpha\colon 2(x-1) - (y+2) + 3(z-3) = 0,$$

$$\alpha\colon 2x - y + 3z - 13 = 0.$$



Найдем точку пересечения плоскости α и прямой a:

$$(\cdot)P\colon \begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = -5 + 3t, \\ 2x - y + 3z - 13 = 0, \end{cases}$$

$$2(1+2t) - (2-t) + 3(-5+3t) - 13 = 0, \quad 14t - 28 = 0, \quad t = 2,$$

тогда точка $P(5; 0; 1)$. Так как $PM_0 \perp a$, то

$$d(M_0, a) = |PM_0| = \sqrt{(1-5)^2 + (-2-0)^2 + (3-1)^2} = 2\sqrt{6}.$$

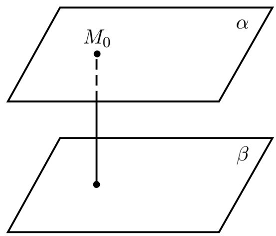
Ответ: $d(M_0, \alpha) = 2\sqrt{6}$.

$\boxed{\text{З}}$ **Г5.13** Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$\alpha\colon x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{и} \quad \beta\colon 2x - 4y + 4z + 3 = 0.$$

Выберем любую точку M_0, в одной из плоскостей, например, в плоскости α. Пусть $M_0(1;0;0)$. Найдем $d(M_0,\beta) = d(\alpha,\beta)$.

$$d(M_0,\beta) = \frac{|2\cdot 1+3|}{\sqrt{4+16+16}} = \frac{5}{6}.$$

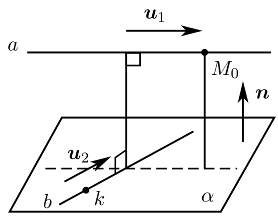


$\boxed{З}$ **Г5.14** Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$a\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1} \quad \text{и} \quad b\colon \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина отрезка их общего перпендикуляра. Однако искать общий перпендикуляр трудно и не обязательно.

Сведем эту задачу к отысканию расстояния от точки $M_0 \in a$ до плоскости α, которую проведем через прямую b параллельно прямой a (см. чертеж). Так как векторное произведение направляющих векторов прямых a и b перпендикулярно к $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, то $[\vec{u}_1\times\vec{u}_2]\perp\alpha$ и поэтому этот вектор можно взять в качестве вектора нормали к плоскости



$$\vec{n} = [\vec{u}_1\times\vec{u}_2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (-4;3;1).$$

Проведем плоскость через любую точку K прямой b с найденным вектором нормали $\vec{n} = (-4;3;1)$. Пусть, например, $K(-2;1;-3)$. (Координаты именно этой точки присутствуют в числителях уравнения прямой b: $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$)

$$\begin{aligned} \alpha\colon\ -4(x+2)+3(y-1)+(z+3) &= 0, \\ \alpha\colon\qquad\qquad -4x+3y+z-8 &= 0. \end{aligned}$$

Выберем точку $M_0(1;0;-2)$ на прямой a.

$$d(a,b) = d(M_0,\alpha) = \frac{|-4\cdot 1 - 2 - 8|}{\sqrt{16+9+1}} = \frac{14}{\sqrt{26}}.$$

Ответ: $d(a,b) = \dfrac{14}{\sqrt{26}}$.

Рассмотрим теперь **более сложные типовые задачи.**

$\boxed{З}$ **Г5.15** Найти точку, симметричную точке $M(3;1;-1)$ относительно плоскости α: $3x+y+z-20=0$.

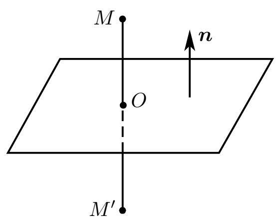
План решения.

1) Проведем через точку M прямую $MO \perp \alpha$, выбрав для нее направляющий вектор $\vec{u} = \vec{n}$.

2) Найдем точку O пересечения плоскости α и прямой MO.

3) Воспользуемся формулами деления отрезка MM' точкой O пополам.

(Вычисление проделайте самостоятельно)



Ответ: $M'(9;3;1)$.

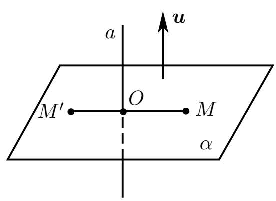
$\boxed{З}$ **Г5.16** Найти точку, симметричную точке $M(1;2;8)$ относительно прямой
$$a\colon \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}.$$

План решения.

1) Построим плоскость α, проходящую через точку M перпендикулярно a, $\vec{n} = \vec{u}$.

2) Найдем точку $O = \alpha \cap a$.

3) Найдем M' из формул деления отрезка MM' пополам точкой O.

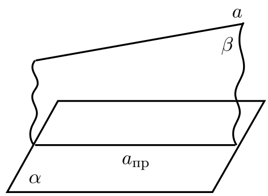


Ответ: $M'(5;-4;-6)$.

$\boxed{З}$ **Г5.17** Найти проекцию прямой a: $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-4}{1}$ на плоскость $\alpha\colon 2x-2y+3z-5=0$.

Заметим, что в задачах на составление уравнения прямой сначала следует определиться, в каком виде искать прямую: как линию пересечения двух плоскостей, или искать параметрические (канонические) уравнения прямой.

В данной задаче искомая проекция $a_{\text{пр}}$ есть прямая, по которой пересекается плоскость α с плоскость β, проходящей через прямую a перпендикулярно α. Поэтому искать будем $a_{\text{пр}}$ как линию пересечения α и β.



Проведем плоскость $\beta \perp \alpha$ через прямую a. Канонические уравнения прямой a можно записать в виде системы

$$a\colon \begin{cases} \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{1}, \\ \dfrac{x-3}{5} = \dfrac{z-4}{1}, \end{cases}$$

или

$$a\colon \begin{cases} x - 5y - 8 = 0, \\ x - 5z + 17 = 0. \end{cases}$$

Фактически a оказывается линией пересечения двух плоскостей. Поэтому плоскость β удобно искать как плоскость из пучка

$$\beta\colon \lambda(x - 5y - 8) + \mu(x - 5z + 17) = 0.$$

Так как $\alpha \perp \beta$, то $\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta \Longrightarrow (\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) = 0$, или

$$\begin{aligned} &2(\lambda + \mu) - 2(-5\lambda) + 3(-5\mu) = 0 \quad \Longrightarrow \\ &12\lambda - 13\mu = 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{13}{12}. \end{aligned}$$

Пусть $\lambda = 13$, $\mu = 12$, тогда

$$\beta\colon 25x - 65y - 60z + 100 = 0.$$

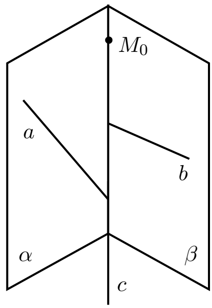
Ответ: $a_{\text{пр}}\colon \begin{cases} 2x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ 5x - 13y - 12z + 20 = 0. \end{cases}$

$\boxed{З}$ **Г5.18** Составить уравнения прямой c, проходящей через точку $M_0(2; 3; 1)$ и пересекающую прямые

$$a\colon \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y + z + 4 = 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad b\colon \begin{cases} x + 3y - 1 = 0, \\ y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

План решения.

1) Так как прямые a и c пересекаются, то они лежат в одной плоскости α, аналогично, прямые b и c лежат в одной плоскости. Поэтому будем искать прямую c как линию пересечения плоскостей α и β.



2) Составим уравнение плоскости α как плоскости из пучка, определяемого прямой a, и проходящей через точку M_0.

3) Составим уравнение плоскости β как плоскости из пучка, определяемого прямой b, и проходящей через точку M_0.

Ответ: $c\colon \begin{cases} x - 9y + 5z + 20 = 0, \\ x - 2y - 5z + 9 = 0. \end{cases}$

Г5.1 Задачи для самостоятельного решения

Г5.1.1 Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_0(0; -2; 3)$.

Ответ: $3y + 2z = 0$.

Г5.1.2 Составить уравнение плоскости, проходящей через точки: $M_1(-1; -2; 0)$, $M_2(1; 1; 2)$ и перпендикулярной плоскости: $x + 2y + 2z - 4 = 0$.

Ответ: $2x - 2y + z - 2 = 0$.

Г5.1.3 Найти расстояние между параллельными плоскостями: $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ и $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Г5.1.4 Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости

$$2x + 2y + z - 8 = 0$$

и удаленных от нее на расстояние $d = 4$.

Ответ: $2x + 2y + z - 20 = 0$, $2x + 2y + z + 4 = 0$.

Г5.1.5 Найти канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0, \\ 3x + y + 4z - 14 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

Г5.1.6 Найти расстояние от точки $M(2; -1; 3)$ до прямой $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z-1}{5}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{38}}{10}$.

Г5.1.7 Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Г5.1.8 Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Г5.1.9 Проверить, что прямые пересекаются и составить уравнение плоскости, в которой они лежат:

$$\begin{cases} x = z - 2 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

Ответ: $x + 2y - 5z = 0$.

Г5.1.10 Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают.

а) $x = 1 + 2t,\ y = 7 + t,\ z = 3 + 4t;$
$x = 6 + 3t,\ y = -1 - 2t,\ z = -2 + t.$

Ответ: Пересекаются в точке $(-3; 5; -5)$.

б) $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 2t,\ z = -t;$
$x = -2t,\ y = -5 + 3t,\ z = 4.$

Ответ: Скрещиваются.

в) $x = 2 + 4t,\ y = -6t,\ z = -1 - 8t;$
$x = 7 - 6t,\ y = 2 + 9t,\ z = 12t.$

Ответ: Параллельны.

г) $x = 1 + 9t,\ y = 2 + 6t,\ z = 3 + 3t;$
$x = 7 + 6t,\ y = 6 + 4t,\ z = 5 + 2t.$

Ответ: Совпадают.

Г5.1.11 Установить, лежит ли данная прямая в данной плоскости, параллельна плоскости или пересекает ее.

а) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0, \\ 2x - y + z - 6 = 0, \end{cases} \qquad 5x - z - 4 = 0.$

Ответ: Пересекаются в точке $(2; 4; 6)$.

б) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0, \\ x + y + z + 5 = 0, \end{cases} \qquad y + 4z + 17 = 0.$

Ответ: Параллельны.

в) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0, \\ 5x + 3y + z - 16 = 0, \end{cases} \qquad 2x - y - 4z - 24 = 0.$

Ответ: Прямая лежат в плоскости.

XVII. Практикум по алгебре

А1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим один из вариантов метода Гаусса решения СЛУ. Он основан на элементарных преобразованиях (ЭП) СЛУ, которые приводят к равносильным СЛУ:

- ЭП 1: перемена местами двух уравнений СЛУ;
- ЭП 2: умножение обеих частей уравнения на число $\lambda \neq 0$;
- ЭП 3: прибавление к обеим частям одного из уравнений соответствующих частей другого уравнения, умноженных на некоторое число.

Так как ЭП фактически выполняются над коэффициентами и свободными членами уравнений, то эти преобразования принято выполнять над расширенной матрицей СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots} & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \text{ -- расширенная матрица СЛУ,}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\ldots\ldots\ldots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ -- матрица СЛУ.}$$

Будем символически записывать ЭП:

$$\text{ЭП 1} - c_i \leftrightarrow c_j; \quad \text{ЭП 2} - \lambda c_i; \quad \text{ЭП 3} - c_i + \lambda c_j$$

Идея метода Гаусса – последовательное исключение неизвестных из всех уравнений, кроме одного, с помощью ЭП так, чтобы привести систему к такой равносильной системе уравнений, решение которой легко найти. Здесь, в отличие от § 5.3 мы приводим вариант метода Гаусса, который называется *методом полного исключения неизвестных.*

Рассмотрим этот метод на примерах.

$\boxed{\text{П}}$ **A1.1** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 5; \\ -6x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 10x_3 = 11. \end{cases}$$

Сначала запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ -6 & 2 & -5 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & 11 \end{array}\right) \sim$$

Метод Гаусса состоит из последовательности ооднотипных шагов. На первом шаге выберем, например, неизвестное x_1, которое будем исключать из всех уравнений, кроме первого. Коэффициент $a_{11} = 3$ назовем ведущим (ведущим может быть любой ненулевой элемент основной матрицы СЛУ) и выполним следующие ЭП:

$$\begin{matrix} c_2 + 2c_1 \\ c_3 - c_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & -4 & 5 & 6 \end{array}\right) \sim$$

На втором шаге выберем, например, неизвестное x_2, которое исключим из всех уравнений, кроме второго. Коэффициент $a'_{22} = -2$ назовем ведущим и выполним следующие ЭП:

$$\begin{matrix} c_1 - c_2 \\ c_3 - 2c_2 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim$$

На третьем шаге исключим неизвестное x_3 из всех уравнений, кроме третьего. Коэффициент $a''_{33} = -5$ назовем ведущим и выполним следующие ЭП:

$$c_2 + c_3 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim$$

Умножим первую строку на $\frac{1}{3}$, вторую на $-\frac{1}{2}$, третью на $-\frac{1}{5}$, получим

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{array}\right).$$

Восстановим решение по расширенной матрице СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{1}{2} \\ x_3 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

Итак, СЛУ имеет единственное решение.

Важное замечание.

В каждой *ненулевой строке матрицы СЛУ ведущий элемент выбирается один раз.* Метод Гаусса считаем *завершенным*, если в каждой ненулевой строке основной матрицы СЛУ был выбран ведущий элемент и с помощью ЭП в столбце с ведущим элементом все остальные элементы стали равными нулю.

П **A1.2** Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2; \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right) \sim$$

Выберем ведущий элемент $a_{12} = 1$ ($\neq 0$) и сделаем ЭП:

$$\begin{array}{c} c_1 - 2c_2 \\ c_3 + 2c_2 \\ c_4 - c_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -7 & -4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim$$

Выберем ведущий элемент $a'_{32} = -1$ ($\neq 0$) и сделаем ЭП:

$$\begin{array}{c} c_2 - c_3 \\ \sim \\ c_4 - c_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -7 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right) \overset{c_4 \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & -7 & -4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Выберем ведущий элемент $a_{43} = -1$ ($\neq 0$) и сделаем ЭП:

$$\begin{array}{c} c_1 - 7c_4 \\ c_2 - c_4 \\ \sim \\ c_3 + 3c_4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{c_1 \cdot \frac{1}{3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

Выберем ведущий элемент $a''_{14} = 1$ ($\neq 0$) и сделаем ЭП:

$$\begin{array}{c} c_2 + c_1 \\ \sim \\ c_4 + c_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = -1$. СЛУ имеет единственное решение.

$\boxed{\text{П}}$ **А1.3** Решить систему линейных уравнений (зададим СЛУ расширенной матрицей):

$$\text{СЛУ:} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{c_4 - c_1 \\ c_3 - c_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1 - c_2 \\ \sim \\ c_3 - c_2 \\ c_4 - 2c_2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & -2 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Четвертая строка матрицы соответствует уравнению

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 = -3,$$

которое не имеет решений. Следовательно, СЛУ несовместна.

$\boxed{\text{П}}$ **А1.4** Решить систему линейных уравнений :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 5 & -1 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & -1 & -7 & -9 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_2-c_1}{c_3-c_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -6 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1+\frac{1}{2}c_2 \\ \sim \\ c_3+c_2 \\ c_2\cdot\frac{1}{2} \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Запишем СЛУ, соответствующую этой матрице коэффициентов:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ \qquad\quad 3x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Неизвестные x_2, x_4 назовем главными, а остальные – x_1, x_3 свободными. Выразим главные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_2 = 5x_1 + 2x_3 - 2, \\ x_4 = -x_3 + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Если теперь задать конкретные значения свободных неизвестных, например, $x_1 = 1$, $x_3 = -1$, и подставить их вместо x_1, x_3 в найденные уравнения, то получим $x_2 = 1$, $x_4 = -\frac{2}{3}$. Так как свободные неизвестные могут принимать любые числовые значения, то множество всех решений СЛУ, называемое общим решением, можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = 5\alpha + 2\beta - 2, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = -\beta + \dfrac{1}{3}, \end{cases}$$

а решение $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = -\frac{2}{3}$ называют частным.

Замечание. Так как ведущие элементы можно выбирать различным образом, то и вид общего решения может быть разным.

$\boxed{\text{П}}$ **А1.5** Решить однородную систему линейных уравнений (ОСЛУ), т.е. такую СЛУ, у которой все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Напомним (теорема 5.1), что ОСЛУ всегда совместна, т.к. имеет нулевое решение, в данном примере $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Решаем ОСЛУ методом Гаусса. Так как при любых ЭП в столбце свободных членов стоят нули, то обычно столбец свободных членов не выписывают.

$$\text{ОСЛУ:} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \underset{c_3 - 2c_1}{\overset{c_2 + c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_3 - 5c_2}{\overset{c_1 + c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{c_3 \cdot (-\frac{1}{22})}{\sim} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{c_2 - 4c_3}{\overset{c_1 - 7c_3}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

ОСЛУ имеет единственное решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$\boxed{\text{П}}$ **А1.6** Решить ОСЛУ:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_3 = 0; \\ x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{ОСЛУ}: \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 - 2c_2 \\ \sim \\ c_3 + 2c_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = -2x_3; \\ x_2 = 5x_3 - 3x_4; \\ x_3 - \text{св. неизв.}; \\ x_4 - \text{св. неизв.} \end{cases}$$

Итак, ОСЛУ имеет бесконечное множество решений, зависящее от двух параметров α и β. Общее решение ОСЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = -2\alpha, \\ x_2 = 5\alpha - 3\beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А1.7** Решить ОСЛУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{ОСЛУ}: \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 + 2c_2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \implies$$

ОСЛУ имеет бесчисленное множество решений, зависящее от трех параметров α, β, γ.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = 2\alpha + 2\gamma, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = \gamma, \\ x_5 = 5\alpha - 3\beta + 5\gamma. \end{cases}$$

A1.1 Примеры для самостоятельного решения

Решить СЛУ методом Гаусса:

ПА1.1.1 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$

Ответ: единственное решение: $x_1 = 1,\ x_2 = -1$.

ПА1.1.2 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = -1, \\ 6x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$

Ответ: решений нет.

ПА1.1.3 $\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2. \end{cases}$

Ответ: бесконечное множество решений, общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - \dfrac{3}{2}x_2, \\ x_2 - \text{свободное неизвестное.} \end{cases}$$

ПА1.1.4 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$

Ответ: единственное решение: $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 3$.

ПА1.1.5 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

Ответ: решений нет.

ПА1.1.6 $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = -1. \end{cases}$$

Ответ: бесконечное множество решений, общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{3}{5} - x_3, \\ x_2 = \dfrac{4}{5} - x_3, \\ x_3 - \text{свободное неизвестное.} \end{cases}$$

ПА1.1.7 $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: единственное нулевое решение: $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

ПА1.1.8 $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: бесчисленное множество решений, зависящее от двух параметров (ответ неоднозначен).

A2. Определители

Напомним (§ 6.2), что определитель квадратной матрицы $A \in M_{2x2}$ вычисляется по формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Для вычисления определителей матрицы больших размеров применяют теорему Лапласа (см. § 6.4) о разложении определителя по элементам i- й строки (j-го столбца):

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} AD_{ij}(A), \quad 1 \le i \le n.$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} AD_{ij(A)}, \quad 1 \le j \le n.$$

Рассмотрим примеры.

Вычислить определители:

$\boxed{\text{П}}$ **A2.1** $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 5 - 2 \cdot 3 = -11.$

$\boxed{\text{П}}$ **A2.2** $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 0 \cdot 9 - 4 \cdot 7 = -28.$

$\boxed{\text{П}}$ **A2.3** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (-2) - 2 \cdot (-8) - 3 \cdot (-1) = 17.$ (Мы разложили определитель по элементам 1-й строки.)

$\boxed{\text{П}}$ **A2.4** $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} =$

$= 0 + 4 + 2 \cdot (-23) = -42.$

$\boxed{\text{П}}$ **A2.5** $\begin{vmatrix} 11 & 7 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$ ⊜ Применима теорема Лапласа.

Вычислим определитель, используя теорему о разложении определителя по второй строке:

$$⊜ 1\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}7&5\\4&1\end{vmatrix}+0\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}11&5\\3&1\end{vmatrix}+(-2)\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}11&7\\3&4\end{vmatrix}=$$

$$=-(7-20)+0+2\cdot(44-21)=13+46=59.$$

$\boxed{\text{П}}$ **A2.6** Найти минор $M_{34}(A)$ и алгебраическое дополнение $AD_{41}(A)$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2&3\\4&0&1&1\\3&2&2&4\\5&1&-1&3\end{pmatrix},\quad M_{34}=\begin{vmatrix}1&-1&2\\4&0&1\\5&1&-1\end{vmatrix} ⊜$$

Разложим определитель по второму столбцу:

$$⊜(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4&1\\5&-1\end{vmatrix}+1\cdot(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\4&1\end{vmatrix}=-9-(-7)=-2.$$

$$A_{41}=(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix}-1&2&3\\0&1&1\\2&2&4\end{vmatrix} ⊜$$

Разложим определитель по первому столбцу:

$$⊜-\left((-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&1\\2&4\end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2&3\\1&1\end{vmatrix}\right)=$$

$$=-(-(4-2)+2\cdot(2-3))=-(-2-2)=4.$$

$\boxed{\text{П}}$ **A2.7** $\begin{vmatrix}1&0&2&0\\-1&4&1&3\\2&0&1&5\\3&0&2&0\end{vmatrix}$ ⊜ Разложим определитель по второму столбцу, так как в нем только один элемент отличен от нуля, то получим одно ненулевое слагаемое: ⊜

$$⊜4\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1&2&0\\2&1&5\\3&2&0\end{vmatrix} ⊜$$ Разложим определитель по третьему столбцу: ⊜

$$⊜4\cdot5\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\3&2\end{vmatrix}=-20\cdot(2-6)=80.$$

Из примеров видно, что применять теоремы о разложении определителя по строке (столбцу) эффективно, если в строке (столбце) только один элемент отличен от нуля. Этого всегда можно добиться, используя следующие свойства определителей (см. §§ 6.3, 6.4):

- если к какой-либо строке c_i матрицы прибавить другую строку c_j, умноженную на некоторое число ($c_i := c_i + \lambda c_j$), то определитель не изменится,
- если какую-либо строку матрицы A (c_i) умножить на некоторое число
  ($c_i := \lambda c_i$), то определитель также умножится на это число ($\lambda|A|$),
- если поменять местами любые две строки матрицы A, то определитель изменит знак ($-|A|$).

Аналогичные свойства имеют место для столбцов. Рассмотрим примеры.

$\boxed{\textbf{П}}$ **А2.8** $\begin{vmatrix} 11 & 8 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \ominus$ Используя свойства определителей добьемся, чтобы во второй строке матрицы только один элемент был отличен от нуля (например, $a_{21} = -2$). Для этого применим указанные свойства к столбцам матрицы (будем называть столбцы колонками и обозначать их $к_i$):

$$\begin{matrix} к_2 := к_2 + 2к_1 \\ к_3 := к_3 + 3к_1 \end{matrix} \ominus \begin{vmatrix} 11 & 30 & 36 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 30 & 36 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 \cdot 14 = 168.$$

$\boxed{\textbf{П}}$ **А2.9** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \ominus$ Добьемся, чтобы, например, во второй колонке только один элемент был отличен от нуля (например, $a_{22} = 2$). Для этого применим указанные выше свойства к строкам:

$c_1 := \underline{\underline{2c_1}} - 3c_2,\ c_3 := \underline{\underline{2c_3}} - 3c_2,\ c_4 := c_4 - c_2.$

Заметим, что при этом определитель исходной матрицы умножится на 4, поэтому следует ввести “компенсирующий” увеличение множитель $\frac{1}{4}$:

$$= \frac{1}{4}\begin{vmatrix} -8 & 0 & -13 & 13 \\ 4 & 2 & 3 & -3 \\ -6 & 0 & -17 & 13 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} -8 & -13 & 13 \\ -6 & -17 & 13 \\ 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$\xlongequal{\text{К}_3:=\text{К}_3-5\text{К}_1} \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} -8 & -13 & 53 \\ -6 & -17 & 43 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -13 & 53 \\ -17 & 43 \end{vmatrix} =$$

$\xlongequal{c_1:=c_1-c_2} \frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -17 & 43 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -17 & 43 \end{vmatrix} = 86+85 = 171.$ Рассмотрим применение теории определителей к решению систем линейных уравнений (теорема 6.7 (Правило Крамера)).

Здесь мы будем использовать обозначения:

$$\det A \overset{def}{=} |A|, \quad \det\left(A \overset{\square i}{\leftarrow} (b)\right)) = \Delta_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Например, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

Формулы Крамера в этих обозначениях имеют вид:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{|A|}.$$

Рассмотрим примеры.

Проверить, что СЛУ имеет единственное решение и найти его по формулам Крамера.

$\boxed{\text{П}}$ **А2.10** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = -2. \end{cases}$

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ по теореме Крамера СЛУ имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2+6 = 8, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = 8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 1 = -5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = -5,$$

Сделаем проверку: подставим в каждое уравнение СЛУ найденные значения $x_1 = 8$, $x_2 = -5$:
$2 \cdot 8 + 3 \cdot (-5) = 1$ – верно,
$8 + 2 \cdot (-5) = -2$ – верно.

$\boxed{\textbf{П}}$ **А2.11** $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2. \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1 := c_1 - 2c_2 \\ c_3 := c_3 - c_2}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -(-12 + 20) = -8 \neq 0 \Rightarrow$ СЛУ имеет единственное решение.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_2 := c_2 - 3c_1 \\ c_3 := c_3 - 2c_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-7 + 5) = -2, \quad x_1 = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1 := c_1 - 2c_2 \\ c_3 := c_3 - c_1}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -5 & -5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -(15 - 5) = -10, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1 := c_1 - 2c_2 \\ c_3 := c_3 - c_2}}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 0 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-4 + 20) = -16, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{|A|} = \frac{-16}{-8} = 2.$$

Сделаем проверку:

$$2\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{5}{4}-2=1 \text{ – верно,}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{5}{4}+4=3 \quad \text{ – верно,}$$

$$\frac{1}{4}+3\cdot\frac{5}{4}-2=2 \quad \text{ – верно.}$$

Решим этот же пример с помощью метода Гаусса:

$$\text{СЛУ:}\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{array}\right) \begin{array}{c} c_1-2c_2\\ \sim\\ c_3-c_2\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -5 & -5\\ 1 & -1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & -3 & -1\end{array}\right) \begin{array}{c} c_1-c_3\\ 4c_2+c_3\\ \sim\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -4\\ 4 & 0 & 5 & 11\\ 0 & 4 & -3 & -1\end{array}\right) \begin{array}{c} c_1\cdot\frac{1}{2}\\ \sim\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -2\\ 4 & 0 & 5 & 11\\ 0 & 4 & -3 & -1\end{array}\right) \begin{array}{c} c_2+5c_1\\ c_3-3c_1\\ \sim\end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & -2\\ 4 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 5\end{array}\right) \begin{array}{c} c_1\cdot(\text{-}1)\\ c_2\cdot\frac{1}{4}\\ \sim\\ c_3\cdot\frac{1}{4}\end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4}\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{4}\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

получили тот же ответ:

единственное решение $x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=\dfrac{5}{4}$, $x_3=2$. Заметим, что метод Крамера требует гораздо большего числа действий, чем метод Гаусса. Поэтому на практике решать СЛУ удобнее методом Гаусса. Однако, теорема Крамера имеет важное **следствие**, относящееся к квадратным *однородным* системам линейных уравнений (ОСЛУ) (теорема 6.8):

> *Для того, чтобы квадратная ОСЛУ имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы коэффициентов был равен нулю* ($|A|=0$).

Напомним, что ОСЛУ всегда имеет нулевое решение. Иногда требуется выяснить, имеет ли квадратная ОСЛУ, кроме нулевого, ненулевые решения, не решая самой ОСЛУ.

Рассмотрим примеры.

Установить, имеет ли ОСЛУ ненулевые решения:

$\boxed{\text{П}}$ **А2.12** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{c_2:=c_2+2c_1}{c_3:=c_3-2c_1}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$= -21 \neq 0 \Rightarrow$ ОСЛУ имеет только нулевое решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

$\boxed{\text{П}}$ **А2.13** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -8 \end{vmatrix} \overset{c_2:=c_2-2c_1}{\underset{c_3:=c_3+c_1}{=\!=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} =$$

$= -(20 - 20) = 0 \Rightarrow$ ОСЛУ имеет ненулевые решения.

$\boxed{\text{П}}$ **А2.14** Найти значения λ, при которых ОСЛУ имеет только нулевое решение:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\overline{\overline{}}}{\overset{c_1:=c_1-3c_3}{c_2:=c_2+2c_3}} \begin{vmatrix} -4 & -5 & 0 \\ 7 & \lambda+2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 7 & \lambda+2 \end{vmatrix} =$$

$= -4(\lambda+2) + 35 = -4\lambda + 27.$

По теореме Крамера, если $|A| \neq 0$, то ОСЛУ имеет единственное (нулевое) решение. Следовательно, если $-4\lambda + 27 \neq 0$, т.е. $\lambda \neq \dfrac{27}{4}$, то ОСЛУ имеет только нулевое решение.

А2.1 Примеры для самостоятельного решения

Вычислить определители:

ПА2.1.1
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ} : -3.$$

ПА2.1.2
$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ} : 11.$$

ПА2.1.3
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -4 & 3 & 6 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ} : 11.$$

ПА2.1.4
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ} : 42.$$

ПА2.1.5
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 1 & 6 \\ -4 & 3 & 0 & 6 \\ 4 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix} \qquad \text{Ответ} : -11.$$

Решить СЛУ по формулам Крамера, сделать проверку:

ПА2.1.6 $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = \dfrac{5}{8},\ x_2 = -\dfrac{9}{16}$.

ПА2.1.7 $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 = 3. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = \dfrac{29}{62},\ x_2 = -\dfrac{3}{62}$.

ПА2.1.8 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ -x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{5}{4},\ x_3 = 2.$

ПА2.1.9 $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 5x_3 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$ Ответ: $x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{5}{4},\ x_3 = 2.$

Установить, имеет ли ОСЛУ ненулевые решения:

ПА2.1.10 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0, \\ 4x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$ Ответ: ОСЛУ имеет только нулевое решение.

ПА2.1.11 $\begin{cases} 6x_1 - 8x_2 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$ Ответ: ОСЛУ имеет ненулевые решения.

ПА2.1.12 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ Ответ: ОСЛУ имеет ненулевые решения.

ПА2.1.13 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$ Ответ: ОСЛУ имеет только нулевое решение.

А3. Алгебра матриц

Примеры этого раздела позволяют освоить «работу» с непривычными объектами – матрицами, сами матрицы и операции над ними были рассмотрены в главе IV.

Рассмотрим решения простейших типовых примеров.

Выполнить действия с матрицами:

$\boxed{\text{П}}$ **А3.1** $$2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 15 \\ 12 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 4-15 \\ -2-12 & 6-18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -11 \\ -14 & -12 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.2** $$4\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 12 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 20 & -5 \\ 5 & 15 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 28 & -9 \\ 17 & 19 & 16 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.3** $$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 & 1+6 \\ 12+4 & 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.4** $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+12 \\ 2+12+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.5** $$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-18-4+2 & 1-30+24+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -18 & -5 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.6** $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 8 \\ 17 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.7** $\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\0&1\end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&0\\4&5&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2\\2&-3\\3&4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-4\\17&-3\end{pmatrix}$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.8** Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$$

Нужно найти такие матрицы B, для которых $A \cdot B = B \cdot A$. Обозначим элементы искомой матрицы B следующим образом:

$$B = \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$$

Найдем произведения $A \cdot B$, $B \cdot A$ и приравняем соответствующие элементы полученных произведений.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+x_3&2x_2+x_4\\3x_1&3x_2\end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x_1+3x_2&x_1\\2x_3+3x_4&x_3\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}2x_1+x_3=2x_1+3x_2\\2x_2+x_4=x_1\\3x_1=2x_3+3x_4\\3x_2=x_3\end{cases} \iff \begin{cases}3x_2-x_3=0\\x_1-2x_2-x_4=0\\3x_1-2x_3-3x_4=0\\3x_2-x_3=0\end{cases}$$

Таким образом получим ОСЛУ. Решим ОСЛУ методом Гаусса:

$$\text{ОСЛУ:}\ \begin{pmatrix}0&3&-1&0\\1&-2&0&-1\\3&0&-2&-3\\0&3&-1&0\end{pmatrix} \underset{c_4-c_1}{\overset{c_3-2c_1}{\sim}} \begin{pmatrix}0&3&-1&0\\1&-2&0&-1\\3&-6&0&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix} \overset{c_3-3c_2}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix}0&3&-1&0\\1&-2&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Общее решение:

$$\begin{cases} 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 2x_2 + x_4 \\ x_2 - \text{свободное неизвестное} \\ x_3 = 3x_2 \\ x_4 - \text{свободное неизвестное} \end{cases}$$

Теперь можно записать общий вид всех матриц B, перестановочных с матрицей A:

$$B = \begin{pmatrix} a+2b & b \\ 3b & a \end{pmatrix}$$

Заметим, что при $a = b = 0$ получим нуль-матрицу, при $b = 0$, $a = 1$ получим единичную матрицу, при $b = 1$, $a = 0$ получим матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим два способа отыскания обратной матрицы.

Способ 1 основан на известной конструктивной формуле (6.18), полученной нами при доказательстве критерия обратимости матрицы.

Решим примеры на отыскание обратной матрицы первым способом:

$\boxed{\text{П}}$ **A3.9** $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1}-?$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 3 = 5 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \quad \text{существует}$$

$$AD_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \quad AD_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1,$$

$$AD_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 3 = -3, \quad AD_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1,$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} & \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$ найдена верно.

$\boxed{\textbf{П}}$ **А3.10** $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}-?$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & 2 & 1\end{vmatrix}\overset{c_3:=c_3-c_2}{\equiv}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -4 & -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -4 & -1\end{vmatrix}=$$

$=-(-2-4)=6\neq 0\Rightarrow A^{-1}$ существует.

$AD_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1, AD_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=-4,$

$AD_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & 2\end{vmatrix}=1,$

$AD_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad AD_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{vmatrix}=2,$

$AD_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-1,$

$AD_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1, AD_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,$

$AD_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=7.$

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & -4 & 11\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 7\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6}\\ -\frac{4}{6} & \frac{2}{6} & -\frac{2}{6}\\ \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

Сделаем проверку:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&0\\1&3&1\\-3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{4}{6}&\frac{2}{6}&-\frac{2}{6}\\\frac{11}{6}&-\frac{1}{6}&\frac{7}{6}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{2}{6}+\frac{4}{6}&\frac{2}{6}-\frac{2}{6}&-\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\\\frac{1}{6}-\frac{12}{6}+\frac{11}{6}&\frac{1}{6}+\frac{6}{6}-\frac{1}{6}&-\frac{1}{6}-\frac{6}{6}+\frac{7}{6}\\-\frac{3}{6}-\frac{4}{6}+\frac{7}{6}&-\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{1}{6}&\frac{3}{6}-\frac{4}{6}+\frac{7}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

следовательно A^{-1} найдена верно.

Второй способ отыскания обратной матрицы основан на использовании метода Гаусса.

Обозначим неизвестные элементы в столбцах искомой матрицы A^{-1} разными буквами:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}x_1\ y_1\ \dots\ z_1\\x_2\ y_2\ \dots\ z_2\\\dots\dots\\x_n\ y_n\ \dots\ z_n\end{pmatrix}$$

Так как $A\cdot A^{-1}=E$, то выполняя действие умножения $A\cdot A^{-1}$ и сравнивая соответствующие столбцы матриц в левой и правой частях равенства $A\cdot A^{-1}=E$, получим n СЛУ:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0\\\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n=0\\a_{21}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{2n}y_n=1\\\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\\a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n=0,\end{cases}$$

$\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + \ldots + a_{1n}z_n = 0 \\ a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + \ldots + a_{2n}z_n = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \ldots + a_{nn}z_n = 1. \end{cases}$$

Будем решать эти n штук СЛУ методом Гаусса одновременно, так как матрица A коэффициентов у этих СЛУ одна и та же:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \ldots\ldots\ldots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array}\right)$$

При решении этих СЛУ возможны два случая:

1) хотя бы одна СЛУ не имеет решения. Это значит A^{-1} не существует,
2) каждая СЛУ имеет единственное решение.

Условно эти два случая покажем на схеме:

$$(A|E) \overset{\text{ЭП}}{\sim} \begin{array}{l} \nearrow (E|A^{-1}) \\ \searrow \left(\begin{array}{cccc|c} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \neq 0 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right) A^{-1} \quad \text{не существует} \end{array}$$

Решим примеры на отыскание обратной матрицы вторым способом.

$\boxed{\textbf{П}}$ **А3.11** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}-?$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{c_2-4c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \overset{5c_1+2c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & -3 & 2 \\ -5 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right); \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Сделаем проверку.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{array}{c|c} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5} - \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} \\ \frac{12}{5} - \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} + \frac{8}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

следовательно A^{-1} найдена верно.

$\boxed{\text{П}}$ **А3.12** $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A^{-1} - ?$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{c_3 - c_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{c_2 + 3c_1 \\ c_3 - c_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{3c_1 + c_3 \\ 6c_2 + 7c_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 11 & -1 & 7 \\ -6 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{array}\right); \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{11}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

Теперь **рассмотрим решение матричных уравнений:**

$\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times p}{X} = \underset{m\times p}{B}$ – матричное уравнение 1 -го типа,

$\underset{m\times n}{X} \cdot \underset{n\times p}{A} = \underset{m\times p}{B}$ – матричное уравнение 2 -го типа.

Заметим, что уравнение 2 -го типа можно свести к уравнению 1 -го типа следующим приемом:

$$X \cdot A = B \Leftrightarrow (X \cdot A)^T = B^T \Leftrightarrow A^T \cdot X^T = B^T \text{ – уравнение 1-го типа.}$$

Решать матричное уравнение можно методом Гаусса.
Фактически мы уже решали матричное уравнение при отыскании обратной матрицы:

$$A \cdot X = E.$$

При решении матричного уравнения 1 -го типа можно использовать ту же схему.

$\boxed{\text{П}}$ **А3.13** Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Это уравнение 1-го типа $A \cdot X = B$. Запишем расширенную матрицу $(A|B)$ и будем решать одновременно несколько СЛУ с одной и той же матрицей A коэффициентов методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{2c_1 - c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -2 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & -\frac{5}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \text{уравнение}$$

имеет единственное решение $X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{П}}$ **А3.14** $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{array}\right) \overset{c_2 - 2c_1}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

В данном случае фактически решались две СЛУ, каждая из них имеет бесконечное множество решений. Выпишем общие решения этих СЛУ:

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 \\ x_2 - \text{свободное неизвестное} \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1 = 3 - 2y_2 \\ y_2 - \text{свободное неизвестное} \end{cases}$$

Найденные общие решения фактически являются столбцами искомой матрицы X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 2x_1 & 3 - 2y_2 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

Вывод: матричное уравнение имеет бесконечное множество решений, зависящее от двух параметров x_2, y_2.

$\boxed{\text{П}}$ **А3.15** $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 6 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \overset{c_1 + 2c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Одно из уравнений решаемых СЛУ имеет вид: $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 2$. Это уравнение не имеет решений, следовательно и матричное уравнение не имеет решений.

$\boxed{\text{П}}$ **А3.16** $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ матричное уравнение 2-го типа.

$$\left(X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} -$$

это уравнение 1 -го типа.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{c_1+3c_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Матричное уравнение имеет единственное решение

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

А3.1 Примеры для самостоятельного решения

ПА3.1.1 Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^T. \quad \text{Ответ: } \begin{pmatrix} -1 & 13 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ПА3.1.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^T.$ Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$

ПА3.1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2.$ Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

ПА3.1.4 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^3.$ Ответ: $\begin{pmatrix} -14 & 21 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}.$

ПА3.1.5 Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} a+b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} a & 2a-2b \\ 3a-3b & b \end{pmatrix}$

ПА3.1.6 Найти обратную матрицу двумя способами:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

е) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & 12 & -8 \\ -1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

ПА3.1.7 Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -7 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

б) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

в) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} -1-4a & 3-4b \\ a & b \end{pmatrix}$.

г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: $\varnothing$.

д) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$. Ответ: $\varnothing$.

е) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 1-2a & a \\ -1-2b & b \end{pmatrix}$.

А4. Комплексные числа

$\boxed{\text{П}}$ **А4.1** Даны комплексные числа $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = -2 + 5i$. Найти: 1) $\bar{z}_1$, 2) $z_1 + z_2$, 3) $z_1 \cdot z_2$, 4) $z_1 \cdot \bar{z}_1$, 5) $\frac{z_1}{z_2}$.

1) По определению числом $\bar{z}$, сопряженным к $z = a + bi$, называют $\bar{z} = a - bi$. Поэтому $\bar{z}_1 = 3 + 4i$.

2) $z_1 + z_2 = (3 - 4i) + (-2 + 5i) = (3 - 2) + (-4 + 5)i = 1 + i$.

3) $z_1 \cdot z_2 = (3 - 4i) \cdot (-2 + 5i) =$ (раскроем скобки и учтем, что $i^2 = -1$) $= -6 + 15i + 8i - 2 - i^2 = 14 + 23i$.

4) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (3 - 4i) \cdot (3 + 4i) = 9 - 16i^2 = 25$.
Заметим, что для любого комплексного числа $z = a + bi$ $\quad z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$.

5) Операцию деления комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$, сводят к операции умножения следующим образом: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \dfrac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$.

$$\frac{3 - 4i}{-2 + 5i} = \frac{(3 - 4i) \cdot (-2 - 5i)}{4 + 25} = \frac{1}{29}(-6 - 15i + 8i + 20i^2) = -\frac{26}{29} - \frac{7}{29}i.$$

$\boxed{\text{П}}$ **А4.2** Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} iz_1 + (1 - i)z_2 = 1, \\ z_1 + 2iz_2 = i, \end{cases}$$

где $z_1,\ z_2$ – комплексные неизвестные.

Способ 1. Решим СЛУ методом Гаусса над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

СЛУ: $\left(\begin{array}{cc|c} i & 1 - i & 1 \\ 1 & 2i & i \end{array}\right) \overset{c_1 - c_2 \cdot i}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 - i & 2 \\ 1 & 2i & i \end{array}\right) \overset{c_1 \cdot \frac{1}{3-i}}{\sim}$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \dfrac{2}{3 - i} \\ 1 & 2i & i \end{array}\right) \overset{c_2 - c_1 \cdot 2i}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \dfrac{2}{3 - i} \\ 1 & 0 & i - \dfrac{4i}{3 - i} \end{array}\right).$$

$$z_1 = i - \frac{4i}{3 - i} = i - \frac{4i \cdot (3 + i)}{10} = \frac{10i - 12i - 4i^2}{10} = \frac{4 - 2i}{10} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i,$$

$$z_2 = \frac{2}{3 - i} = \frac{2(3 + i)}{10} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Способ 2. Представим $z_1,\ z_2$ в алгебраической форме: $z_1 = x_1 + x_2 i$, $z_2 = x_3 + x_4 i$, подставим в условие, выполним действия и сравним вещественные части и коэффициенты при i в левой и правой частях каждого уравнения системы:

$$\begin{cases} i(x_1 + x_2 i) + (1-i)(x_3 + x_4 i) = 1, \\ x_1 + x_2 i + 2i(x_3 + x_4 i) = i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 + i(x_1 - x_3 + x_4) = 1, \\ x_1 - 2x_4 + i(x_2 + 2x_3) = i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \quad -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 \quad - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 \quad\quad - 2x_4 = 0, \\ \quad x_2 + 2x_3 \quad = 1. \end{cases}$$

Получили систему 4-х уравнений с вещественными коэффициентами относительно неизвестных $x_1, x_2, x_3, x_4 \in R$.

Решим эту СЛУ методом Гаусса.

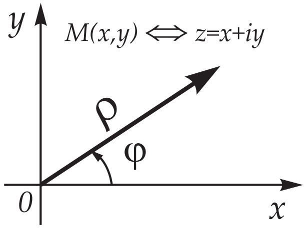
$$\text{СЛУ: } \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_3 - c_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_1 + c_4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_2 - c_1 \\ c_3 + 3 \cdot c_1 \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 10c_1 - 3c_3 \\ 5c_2 + 2 \cdot c_3 \\ \sim \\ 5c_4 - c_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 10 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{5}, \\ x_2 = -\frac{1}{5}, \\ x_3 = \frac{3}{5}, \\ x_4 = \frac{1}{5}. \end{cases}$$

$z_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, $z_2 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$.

$\boxed{\text{П}}$ **А4.3** Найти тригонометрическую форму следующих комплексных чисел: 1) $1 - i$, 2) $\sqrt{3} + i$, 3) i, 4) -3 , 5) $-1 + \sqrt{3}i$.



Напомним, что тригонометрической формой комплексного числа $z = x + yi$ называют запись вида $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, при этом считают $0 \le \varphi \le 2\pi$.

1) $z = 1 - i,\ |z| = \sqrt{2},$

$$\begin{matrix} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{matrix} \quad \Rightarrow \varphi \in IV \text{ четверти}, \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4},$$

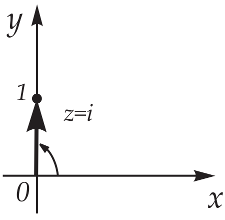
$z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right).$

2) $z = \sqrt{3} + i,\ |z| = 2,$

$$\begin{matrix} \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \varphi \in I \text{ четверти}, \qquad \varphi = \frac{\pi}{6},$$

$z = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right).$

3) $z = i$, удобно воспользоваться геометрической интерпретацией:

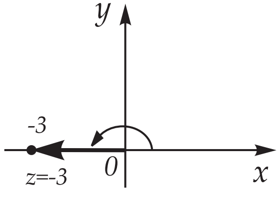


$|z| = 1,$

$\varphi = \frac{\pi}{2},$

$z = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}.$

4) $z = -3$, воспользуемся геометрической интерпретацией:



$|z| = 3,$

$\varphi = \pi,$

$z = 3(\cos\pi + i\sin\pi).$

5) $z = -1 + \sqrt{2}i$ $|z| = 2$,

$$\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \varphi \in II \text{ четверти}, \quad \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3},$$

$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

П **А4.4** Выполнить действие над комплексными числами $z_1 = 1+i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме:
1) $z_1 \cdot z_2$, 2) z_1^{20}, 3) $\frac{z_1}{z_2}$.

1) Напомним, что $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$. Найдем тригонометрическую форму чисел z_1, z_2.

$z_1 = 1 + i, \quad |z| = \sqrt{2}$.

$$\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \quad \Rightarrow \varphi \in I \text{ четверти}, \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$\bar{z}_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

$z_2 = -\sqrt{3} - i, \quad |z| = 2$.

$$\begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{array} \quad \Rightarrow \varphi \in III \text{ четверти}, \quad \varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6},$$

$z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.
$z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6})\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right)$.

2) Для возведения в степень комплексного числа z используется формула Муавра:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi).$$

$$z_1^{20} = (\sqrt{2})^{20}\left(\cos 20 \cdot \frac{\pi}{4} + i\sin 20 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2^{10}(\cos 5\pi + i\sin 5\pi) = \\ = 2^{10}(-1 + i \cdot 0) = -2^{10}.$$

3) Деление комплексных чисел в тригонометрической форме выполняется по правилу:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2.$$

$$\frac{1+i}{-\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{7\pi}{6}\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{11}{12}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{13}{12}\pi+i\sin\frac{13}{12}\pi\right).$$

П **A4.5** Найти корни из комплексных чисел:
1) $\sqrt{1+i}$, 2) $\sqrt[3]{i}$, 3) $\sqrt[4]{\sqrt{3}+i}$, 4) $\sqrt[6]{1}$, 5) $\sqrt[3]{-1}$.

Напомним, что для любого комплексного числа $z \neq 0$ существует n различных корней n-й степени и они могут быть найдены по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=0,1,2,\dots n-1.$$

1) $z = 1+i = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

$$w_k = \sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right),$$

при $k=0$ $w_0 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})$,
при $k=1$ $w_1 = \sqrt[4]{2}(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8})$.

2) $z = i = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$.

$$w_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}.$$

при $k=0$ $w_0 = \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,
при $k=1$ $w_1 = \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$,
при $k=2$ $w_2 = \cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$.

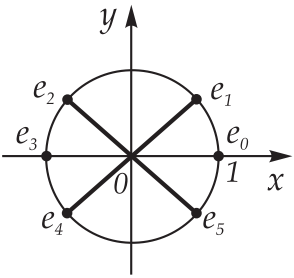
3) $z = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

$$w_k = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{4}\right), \quad k=0,1,2,3.$$

4) $z = 1 = \cos 0 + i\sin 0$.

$$e_k = \cos\frac{2\pi k}{6} + i\sin\frac{2\pi k}{6}.$$

при $k=0 \quad e_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1,$



при $k=1 \quad e_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

при $k=2 \quad e_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

при $k=3 \quad e_3 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$

при $k=4 \quad e_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$

при $k=5 \quad e_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

А4.1 Примеры для самостоятельного решения

ПА4.1.1 Решить систему уравнений с комплексными неизвестными

$$\begin{cases}(3-i)z_1 + (4+2i)z_2 = 2+6i,\\ (4+2i)z_1 - (2+3i)z_2 = 5_4 i).\end{cases}$$

Ответ. $z_1 = 1+i,\ z_2 = i.$

ПА4.1.2 Вычислить

а) $(1+i)^{25}$ Ответ. $2^{12}(1+i)$

б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ Ответ. $2^9(1-i\sqrt{3})$

в) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$ Ответ. -64

ПА4.1.3 Извлечь корни

а) $\sqrt[3]{i}$ Ответ. $-i,\ \dfrac{\pm\sqrt{3}+i}{2}$

в) $\sqrt[4]{-4}$ Ответ. $1\pm i,\ -1\pm i$

А5. Многочлены

П **А5.1** а) Выполнить деление многочлена $f(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1$ на многочлен $g(x) = x^2 - x + 2$.

Известно, что если $g(x) \neq 0$ и $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, то существует единственная пара многочленов $h(x)$ и $r(x)$ таких, что $f(x) = g(x) \cdot f(x) + r(x)$, $\deg r(x) < \deg g(x)$, $h(x)$ называют частным от деления $f(x)$ на $g(x)$, а $r(x)$ – остатком. Для отыскания $h(x)$ и $r(x)$ применяют алгоритм деления "углом".

$$
\begin{array}{rr|l}
f(x) = & x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1 & x^2 - x + 2 = g(x) \\ \cline{3-3}
- & \underline{x^4 - x^3 + 2x^2 \qquad\quad} & x^2 + 2x - 2 = h(x) \\
 & 2x^3 - 4x^2 + x - 1 & \\
- & \underline{2x^3 - 2x^2 + x - 1} & \\
 & -2x^2 - 3x - 1 & \\
 & \underline{-2x^2 + 2x - 4} & \\
r(x) = & -5x + 3 &
\end{array}
$$

Итак, $x^4 + x^3 - 2x^2 + x - 1 = (x^2 - x + 2)(x^2 - 2x - 2) - 5x + 3$.
б) $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$, $g(x) = x + 1$.

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - x^2 + x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3 + x^2 \qquad\quad} & x^2 - 2x + 3 \\
-2x^2 + x + 3 & \\
\underline{-2x^2 - 2x \quad} & \\
-3x + 3 & \\
\underline{-3x + 3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Итак, $h(x) = x^2 - 2x + 3$, $r(x) = 0$. В этом случае говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ нацело.

П **А5.2** Выполнить деление многочлена $f(x)$ на двучлен вида $x - a$, $f(x) \geq 1$.

Конечно, можно использовать алгоритм деления "углом". Однако, при высокой степени многочлена $f(x)$ это приведёт к большому числу шагов и громоздкой записи. Существует простой алгоритм, называемый схемой Горнера, для деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$. Приведём его сначала в общем виде.

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$, частное от деления $f(x)$ на $x-a$ есть многочлен $h(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0$, остаток – это число, обозначим его r. Тогда

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = (x-a)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_0) + r.$$

Раскроем справа скобки, приведём подобные слагаемые и сравним коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства:

$$\begin{array}{llll} a_n = b_{n-1}, & & & b_{n-1} = a_n, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}, & & & b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}, & & & b_{n-3} = a_{n-2} + ab_{n-2}, \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ a_0 = r - ab_0, & & & a_0 + ab_0. \end{array}$$

Полученный алгоритм принято записывать в таблице, называемой схемой Горнера:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
a	b_{n-1}	$a_{n-1} + ab_{n-1} = b_{n-2}$	$\ldots$	$a_1 + ab_1 = b_0$	$a_0 + ab_0$

Покажем применение этой схемы на конкретных примерах.

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3$ разделить на $x - 2$.

	1	-2	5	0	3
2	1	$-2+2\cdot1=0$	$5+2\cdot0=5$	$0+2\cdot5=10$	$3+2\cdot10=23$

$h(x) = x^3 + 5x + 10$ – частное, $r = 23$ – остаток.

б) $f(x) = 2x^5 + x^4 - 3x^2 + 6x$ разделить на $x + 1$:

	2	1	0	-3	6	0
-1	2	-1	1	4	10	-10

$h(x) = 2x^4 - x^3 + x^2 - 4x + 10$, $r = -10$.

в) $f(x) = x^6 + 1$ разделить на $x + 2$:

	1	0	0	0	0	0	1
-2	1	-2	4	-8	16	-32	65

$h(x) = x^5 - 2x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 16x - 32$, $r = 65$.

Схема Горнера имеет несколько полезных применений. Приведём некоторые из них.

П **А5.3** Найти значение многочлена $f(x)$ в точке $x = a$.

По следствию из теоремы Безу $f(a) = r$, где r – остаток от деления многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$. Поэтому следует выполнить деление $f(x)$ на $x - a$ по схеме Горнера и посмотреть на остаток r как на $f(a)$.

а) $f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 7x + 1$, $a = -2$:

	3	-5	6	-7	1
-2	3	-11	28	-63	127

$r = 127$, значит $f(-2) = 127$.

б) $f(x) = 5x^3 - 4x^2 + 6x - 3$, $a = i$:

	5	-4	6	-3
i	5	$-4 + 5i$	$1 - 4i$	$1 + i$

П **А5.4** Проверить, является ли $x = a$ корнем многочлена $f(x)$.

Напомним, что $x = a$ называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(a) = 0$.

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 = 4x - 8$, $x = 2$.

	1	-5	7	-2	4	-8
2	1	-3	1	0	4	0

Так как $r = f(2) = 0$, то $x = 2$ – корень многочлена $f(x)$.

б) $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 3x - 7$, $x = 3$.

	1	2	-1	3	-7
3	1	5	14	45	128

так как $r = f(3) = 128 \neq 0$, то $x = 3$ не является корнем многочлена.

П **А5.5** Проверить, что $x = a$ корнем многочлена $f(x)$ и найти показатель кратности корня.

Напомним, что $x = a$ называют корнем кратности k, если

$$f(x) = (x - a)^k \cdot f_k(x), \quad f_k(a) \neq 0.$$

а) $f(x) = x^5 - 7x^4 + 15x^3 - 2x^2 - 28x + 24$, $x = 2$.

	1	−7	15	−2	−28	24		
2	1	−5	5	8	−12	0	$\Rightarrow$	$f(x) = (x-2)f_1(x)$
2	1	−3	−1	6	0		$\Rightarrow$	$f(x) = (x-2)^2 f_2(x)$
2	1	−1	−3	0			$\Rightarrow$	$f(x) = (x-2)^3 f_3(x)$
2	1	1	−1				$\Rightarrow$	$f_3(2) = -1 \neq 0.$

Ответ. $x = 2$ – корень кратности $k = 3$.

б) $f(x) = x^6 + 3x^5 - x^4 - 21x^2 - 13x - 3$, $x = -1$.

	1	3	−1	−14	−21	−13	−3
−1	1	2	−3	−11	−10	−3	0
−1	1	1	−4	−7	−3	0	
−1	1	0	−4	−3	0		
−1	1	−1	−3	0			
−1	1	−2	−1				

Ответ. $x = -1$ – корень кратности $k = 4$.

$\boxed{\text{П}}$ **А5.6** Найти целые корни многочлена с целыми коэффициентами.

Напомним, что если $x - a$ целый корень многочлена с целыми коэффициентами, то a является делителем свободного члена. Этот факт позволяет перечислить претендентов на целые “корни”.

а) $f(x) = x^6 - x^5 - 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 4x + 8$.

“Претендентами” на целые корни являются делители числа 8: ±1, ±2, ±4, ±8.

Проверим, явлеяется ли $x = 1$ корнем.

	1	−1	−5	3	2	4	8
1	1	0	−5	−2	0	4	12

Следовательно, $f(1) = 12 \neq 0$, $x = 1$, не является корнем.

Проверим, является ли $x = -1$ корнем.

	1	−1	−5	3	2	4	8
−1	1	−2	−3	6	−4	8	0
−1	1	−3	0	6	−10	$18 \neq 0$	

$x_1 = -1$ – корень, находим его кратность: $k_1 = 1$.

Так как $f(x) = (x+1)f_1(x)$, то остальные корни многочлена $f(x)$ являются корнями частного $f_1(x)$.

Проверим, является ли $x = 2$ корнем $f_1(x) = x^5 - 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 4x + 8$.

	1	-2	-3	6	-4	8	
2	1	0	-3	0	-4	0	$x_2 = 2$ – корень
2	1	2	1	2	0		
2	1	4	6	14	$\Rightarrow k_2 = 2$		

Итак, $f(x) = (x + 1)(x - 2)^2 f_2(x)$.

Остальные корни $f(x)$ являются корнями частного $f_2(x)$.

Проверим, является ли очередной “претендент” $x = -2$ корнем $f_2(x)$.

	1	2	1	2	
-2	1	0	1	0	$\Rightarrow x_3 = -2$ – корень.

Заметим, что на этом шаге очередное частное $f_3(x)$ является многочленом второй степени, $f_3(x) = x^2 + 1$, который вещественных корней не имеет.

Ответ. Целые корни $f(x)$: $x_1 = -1\,(k_1 = 1)$, $x_2 = 2\,(k_2 = 3)$.

б) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 4$.

“Претенденты” на целые корни: ± 1, ± 2,± 4.

	2	1	3	-4
~~1~~	~~2~~	~~3~~	~~6~~	~~2~~
~~-1~~	~~2~~	~~-1~~	~~4~~	~~-8~~
~~2~~	~~2~~	~~5~~	~~13~~	~~22~~
~~-2~~	~~2~~	~~-3~~	~~9~~	~~-22~~
~~4~~	~~2~~	~~9~~	~~39~~	~~152~~
~~-4~~	~~2~~	~~-7~~	~~31~~	~~128~~

$\Rightarrow x = 1$ – не корень, эту строку вычеркнем и проверим следующего “претендента”

Вывод: многочлен $f(x)$ целых корней не имеет.

A5.1 Примеры для самостоятельного решения

ПА5.1.1 Выполнить деление многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$:

а) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$, $g(x) = x^2 - 3x + 1$

Ответ. $h(x) = 2x^2 + 3x + 11$, $r(x) = 25x - 5$.

б) $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$, $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Ответ. $h(x) = (3x - 7)/9$, $r(x) = (-26x - 2)/9$.

в) $f(x) = x^5 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 + 1$

Ответ. $h(x) = x^3 - x$, $r(x) = -x + 1$.

ПА5.1.2 Выполнить деление многочлена $f(x)$ на двучлен $x - a$, используя схему Горнера.

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 8$ на $x - 1$

Ответ. $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 3$, $r = 5$.

б) $f(x) = 4x^3 + x^2$ на $x + 1 + i$

Ответ. $h(x) = 4x^2 - (3 + 4i)x + (-1 + 7i)$, $r = 8 - 6i$.

в) $f(x) = x^3 - x^2 - x$ на $x - 1 + 2i$

Ответ. $h(x) = x^2 - 2ix - 5 - 2i$, $r = -9 + 8i$.

ПА5.1.3 Найти значение многочлена $f(x)$ в точке $x = a$

а) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 10x + 16$, $a = 4$

Ответ. $f(4) = 136$.

б) $f(x) = x^5 + (1 + 2i)x^4 - (1 + 3i)x^2 + 7$, $a = -2 - i$

Ответ. $f(-2 - i) = -1 - 44i$.

а) $f(x) = x^6 + 3x^5 - 7x^4 + 8x - 11$, $a = -3$

Ответ. $f(-3) = -602$.

ПА5.1.4 Проверить, что $x = a$ является корнем многочлена и найти его кратность.

а) $f(x) = x^5 - 5x^4 + 7x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $a = 2$

Ответ. $k = 3$.

б) $f(x) = x^6 + 7x^4 + 16x^3 + 8x^2 - 16x - 16$, $a = -2$

Ответ. $k = 4$.

в) $f(x) = x^5 - 2x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 16x + 7$, $a = -1$

Ответ. $k = 3$.

ПА5.1.5 Найти целые корни многочлена с целыми коэффициентами.

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$

Ответ. $x = 2$, $k = 1$.

б) $f(x) = x^5 - 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5x + 6$

Ответ. $x_1 = 1\,(k_1 = 1),\ x_2 = -2\,(k_2 = 1),\ x_2 = 3\,(k_3 = 1)$.

в) $f(x) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 11x - 3$

Ответ. $x_1 = 3\,(k_1 = 1),\ x_2 = -1\,(k_2 = 4)$.

А6. Линейные пространства

А6.1 Линейно зависимые (независимые) системы векторов. Базис. Координаты вектора

Этот раздел практикума посвящен основным понятиям линейной алгебры – линейному пространству (определение 9.1), базису (определение 9.8), координат вектора (определение 9.9), линейно-зависимым (определение 9.5) и линейно-независимым системам векторов.

Приведём **примеры конкретных линейных пространств и их базисов.**

а) V^1 – множество геометрических коллинеарных векторов (векторы на прямой). Базис в V^1 – любой ненулевой вектор. $\dim V^1 = 1$.

б) V^2 – геометрических компланарных векторов (векторы на плоскости). Базис в V^2 – любые два некомпланарных вектора. $\dim V^2 = 2$.

в) V^3 – множество геометрических векторов. Базис в V^3 – любые три некомпланарных вектора. $\dim V^3 = 3$.

г) $M_{m\times n}$ – пространство всех матриц одного размера. Один из базисов в пространстве $M_{m\times n}$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},\ E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}; \quad \dim M_{m\times n} = mn.$$

д) P_n – пространство многочленов $f(t) = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ степени не выше n. Один из базисов в пространстве P_n: $e_1 = 1,\ e_2 = t,\ e_3 = t^2 \ldots e_n = t^{n-1},\ e_{n=1} = t^n$
$\dim P_n = n + 1$

e) R^n – арифметическое (координатное пространство). Элементы R^n – упорядоченные наборы n чисел: $x = (\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$. Один из базисов: $e_1 = (1, 0, \dots 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots 0) \dots e_n = (0, 0, \dots 1)$. $\dim R^n = n$.

Полученные в этих примерах базисы называют *естественными базисами.*

П **А6.1.1** Найти координаты вектора в естественном базисе.

а) В пространстве $M_{2\times 2}$ $\quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$A = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_4$,

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

по определению координат вектора (определение 9.9)

$$A_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ или } A_E^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

б) В пространстве P_3 $f(t) = 2t^3 - 3t^2 + 4t + 5$. Естественный базис в $P_3 : e_1 = 1$, $e_2 = t$, $e_3 = t^2$, $e_4 = t^3$, поэтому $f(t) = 5e_1 + 4e_2 - 3e_3 + 2e_4$, значит

$$f_e = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ или } f_e^T = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

в) В пространстве R^4 $x = (2, 6, -1, 5)$. Естественный базис в R^4 : $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$, поэтому $x = 2e_1 + 6e_2 - e_3 + 5e_4$, значит

$$x_e = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ или } x_e^T = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{П}}$ **А6.1.2** Проверить на линейную независимость систему векторов.

а) В пространстве $M_{2\times 2}$:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

По определению система A_1, A_2, A_3 линейно независима, если равенство

$$(*) \quad \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = \theta$$

выполняется только для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Выполняя действия над матрицами в равенстве $(*)$, получим:

$$\begin{cases} 1 \cdot A_1 + 2 \cdot A_2 + 4 \cdot A_3 = 0, \\ -1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + (-1) \cdot A_3 = 0, \\ 2 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 4 \cdot A_3 = 0, \\ -1 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + (-1) \cdot A_3 = 0. \end{cases}$$

Решим ОСЛУ методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_2 - c_4}{\overset{c_1 - 2c_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \underset{c_3 \cdot \frac{1}{2}}{\overset{c_1 \cdot \frac{1}{3}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\underset{c_3 + c_1}{\overset{c_2 - c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} \alpha_1 = 2x_3 \\ \alpha_2 = -x_3 \\ \alpha_3 - \text{св. неизв.} \end{cases}$$

Например, если $\alpha_3 = 1$, то $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$. Следовательно, есть ненулевой набор $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, для которого выполняется равенство $(*)$, значит система матриц линейно зависима.

Этот пример можно решить иначе.

Запишем координаты матриц A_1, A_2, A_3 в естественном базисе:

$$A_{1E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_{2E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \ A_{3E} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь равенство $(*)$ примет вид:

$$(*)\qquad \alpha_1\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}4\\-1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над векторами пространства R^4, получим ту же ОСЛУ с матрицей $\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&1&-1\\2&0&4\\0&2&2\end{pmatrix}$ и далее решаем так же.

б) В пространстве P_2 проверить на линейную независимость систему многочленов (векторов) $f_1(t)=t^2-1$, $f_2(t)=t^2+t+1$, $f_3(t)=2t+2$. Запишем координаты многочленов f_1, f_2, f_3 в естественном базисе:

$$f_{1E}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ f_{2E}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ f_{3E}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}.$$

Запишем равенство

$$(*)\qquad \alpha_1f_1+\alpha_2f_2+\alpha_3f_3=\theta$$

в координатной форме:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над векторами в пространстве R^3, получим ОСЛУ с матрицей

$$\begin{pmatrix}-1&1&2\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\overset{c_1+c_3}{\sim}\begin{pmatrix}0&2&2\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\underset{c_3-c_2}{\overset{c_1-2c_2}{\sim}}\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{c_2+c_1}{\sim}\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

Так как $r = n = 3$, то ОСЛУ имеет только нулевое решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Следовательно, равенство $(*)$ выполняется только для нулевого набора $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, тогда система векторов f_1, f_2, f_3 по определению линейно независима.

в) Проверить на линейную независимость систему из двух векторов $a_1 = (2, 3, -4, 5)$, $a_2 = (4, 6, -8, 10)$ в пространстве R^4.

Заметим, что если $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = \theta$ для ненулевого набора α_1, α_2, то координаты векторов пропорциональны. Поэтому система векторов a_1, a_2 в данном примере линейно зависима.

$\boxed{\text{П}}$ **A6.1.3** Доказать, что система данных n векторов $a_1, a_2 \dots a_n$ в n-мерном пространстве образует базис и найти координаты заданного вектора x в этом базисе.

а) В пространстве $M_{2\times 2}$: $a_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

По определению векторы a_1, a_2, a_3, a_4 образуют базис в 4-х мерном пространстве $M_{2\times 2}$, если они линейно независимы, проверим этот факт, как в примере 2:

$$\text{ОСЛУ: } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 - c_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3 + c_2}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_4 + c_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $r = n = 4$, то векторы a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы, а значит образуют базис. Найдем координаты вектора x в базисе a_1, a_2, a_3, a_4. Для этого надо вектор x разложить по векторам a_1, a_2, a_3, a_4 :

$$(**) \qquad x = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$$

Запишем равенство (**) в координатной форме в естественном базисе:

$$x_1\begin{pmatrix}2\\1\\-1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\3\\4\end{pmatrix}.$$

Выполнив действия, получим СЛУ:

$$\text{СЛУ: }\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&2&1&5\\1&1&1&0&-1\\-1&-1&0&0&3\\1&0&1&1&4\end{array}\right)\underset{\sim}{c_4-c_1}\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&2&1&5\\1&1&1&0&-1\\-1&-1&0&0&3\\-1&0&-1&0&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{c_3+c_2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&2&1&5\\1&1&1&0&-1\\0&0&1&0&2\\-1&0&-1&0&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{c_1+2c_4\\c_2+c_4}}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&0&1&3\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&2\\-1&0&-1&0&-1\end{array}\right)\underset{\sim}{c_4+c_3}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&0&1&3\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&2\\-1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-1\\0&1&0&0&-2\\0&0&1&0&2\\0&0&0&1&3\end{array}\right)\Longrightarrow\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=-2,\\x_3=2,\\x_4=3.\end{cases}$$

Итак, $x_a^T=(-1,-2,2,3)$.
Заметим, что можно было совместить решение ОСЛУ и СЛУ.

б) В пространстве R^3 : $a_1=(2,-1,3)$, $a_2=(1,1,4)$, $a_3=(-1,2,0)$, $x=(4,3,2)$. Проверим, что векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы и разложим вектор x по векторам a_1, a_2, a_3. Как замечено в предыдущем примере, эти два действия можно совместить. Будем решать СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&4\\-1&1&2&3\\3&4&0&2\end{array}\right)\underset{\sim}{c_2+2c_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&-1&4\\3&3&0&11\\3&4&0&2\end{array}\right)\underset{\sim}{\substack{2c_1-3c_2\\c_3-c_2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -2 & -25 \\ 3 & 3 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_1+7c_3}{c_2-3c_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -2 & -88 \\ 3 & 0 & 0 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 38/3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 44 \end{array}\right) \Longrightarrow \text{ОСЛУ с матрицей } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет только нулевое решение, значит a_1, a_2, a_3 образуют базис: $x_a^T = (38/3, -9, 44)$ или $x = 38/3a_1 - 9a_2 + 44a_3$.

$\boxed{\text{П}}$ **А6.1.4** Проверить, можно ли вектор x разложить по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и если да, то единственным ли образом?

а) В пространстве R^4 : $a_1 = (1, 0, -1, 2)$, $a_2 = (2, 1, -1, 0)$, $a_3 = (3, 1, 0, 4)$, $x = (0, 0, -2, -2)$. Проверим, можно ли вектор x представить в виде:

$$(**) \qquad x = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3.$$

Запишем это равенство в координатах, получим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_3+c_1}{c_4-2c_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} c_1-2c_2 \\ \sim \\ c_3-2c_2 \\ c_4+4c_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_4-c_3}{c_3\cdot\frac{1}{2}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_1-c_3}{c_2-c_3}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{l} \text{СЛУ имеет единственное решение} \\ x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1, \end{array}$$

следовательно вектор x можно разложить по векторам a_1, a_2, a_3 единственным образом.

б) В пространстве R^4 : $a_1 = (2,1,1,1)$, $a_2 = (0,2,1,-1)$, $a_3 = (4,0,1,3)$,

$x = (2,5,3,-1)$.

Запишем равенство $(**)$ в координатной форме:

$$\text{СЛУ: } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right) \underset{c_4-3c_3}{\overset{c_1-4c_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -4 & 0 & -10 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ \cancel{-2} & \cancel{-4} & \cancel{0} & \cancel{-10} \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_1+2c_2}{c_3-c_2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Longrightarrow$$ СЛУ имеет бесчисленное множество решений:

$$\begin{cases} x-1 = 5-2x_2, \\ x_2 - \text{св. неизв.}, \\ x_3 = 3+x_2. \end{cases}$$

Итак, вектор x можно разложить по векторам a_1, a_2, a_3 бесчисленным числом способов.

в) В пространстве R^4 : $a_1 = (1,0,-1,1)$, $a_2 = (0,1,2,1)$, $a_3 = (1,1,0,2)$,

$x = (-1,1,1,2)$.

Запишем равенство $(**)$ в координатах:

$$\text{СЛУ: } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \underset{c_4-2c_1}{\overset{c_2-c_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{c_3-2c_2}{c_4-c_2}}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow$$ СЛУ несовместна, т. к. последнее уравнение имеет вид

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2.$$

Итак, вектор x нельзя разложить по векторам a_1, a_2, a_3.

А6.2 Связь координат вектора в двух разных базисах. Матрица перехода

Пусть в линейном пространстве L даны два базиса: $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Определение 5.7. *Матрицей перехода от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ называют матрицу в столбцах которой стоят координатные столбцы векторов базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ (см. § 9.4).*

Матрицу перехода от $e_1, e_2, \dots, e_n$ к $e'_1,\ e'_2, \dots,\ e'_n$ обозначаем

$$_{\{e'\}}T_{\{e\}} = \big((e_1)_{\{e'\}}\ (e_2)_{\{e'\}}\ \cdots\ (e_n)_{\{e'\}}\big)$$

Связь координат одного и того же вектора в двух разных базисах задается формулой:

$$x_{e'} = {_{\{e'\}}T_{\{e\}}} \cdot x_e,$$

здесь x_e, $x_{e'}$ – столбцы координат вектора x в базисе $e_1, \dots, e_n$ и в базисе $e'_1, \dots, e'_n$.

$\boxed{\text{П}}$ **А6.2.1** В пространстве R^3 заданы два базиса:
$a_1 = (1, -1, 2)$, $a_2 = (0, 1, 3)$, $a_3 = (0, 0, 2)$ и
$b_1 = (0, 1, 1)$, $b_2 = (1, 0, -1)$, $b_3 = (1, 1, 0)$.
Найти матрицу перехода $_{\{a\}}T_{\{b\}}$.

По определению: $_{\{a\}}T_{\{b\}} = \big((b_1)_{\{a\}}\ (b_2)_{\{a\}}\ (b_3)_{\{a\}}\big)$.
Итак, нужно найти координаты векторов b_1, b_2, b_3 в базисе a_1,a_2, a_3. Как было показано в примере 3(2)), нужно решить три СЛУ с одной и той же матрицей коэффициентов. Будем решать их одновременно:

$$\begin{array}{c}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \end{array}\end{array} \underset{\sim}{\begin{array}{c} c_2 + c_1 \\ c_3 - 2c_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_3 - 3c_2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & -6 & -8 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_3 \cdot \tfrac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{ccc} b_{1a} & b_{2a} & b_{3a} \end{array}$$

Итак, $_{\{a\}}T_{\{b\}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$.

П **А6.2.2** В пространстве R^3 дана матрица перехода от базиса $v_1,\ v_2,\ v_3$ к базису $u_1,\ u_2,\ u_3$:

$$_{\{v\}}T_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Даны также координаты вектора d в базисе $v_1,\ v_2,\ v_3$: $d_{\{v\}} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$ и координаты вектора y в базисе $u_1,\ u_2,\ u_3$: $y_{\{u\}} = \left(\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$. Найти $d_u,\ y_v$.

1) Для вектора $d:\ \ d_v = {}_{\{v\}}T_{\{u\}} \cdot d_u$. Так как $d_v,\ {}_{\{v\}}T_{\{u\}}$ известны, то, фактически, нужно решить СЛУ:

$$\left({}_{\{v\}}T_{\{u\}}|a_v\right) \implies \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_2 + 2c_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} c_1 - 2c_2 \\ c_2 - 3c_3 \\ \sim \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} 2c_1 - c_2 \\ \sim \\ 6c_3 + c_2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -29 \\ 0 & 0 & 6 & 17 \\ 0 & 6 & 0 & 41 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -29/2 \\ 0 & 1 & 0 & 41/6 \\ 0 & 0 & 1 & 17/6 \end{pmatrix}.$$

Итак, $d_u = \begin{pmatrix} -29/2 \\ 41/6 \\ 17/6 \end{pmatrix}$.

2) Для вектора $y:\ \ y_v = {}_{\{v\}}T_{\{u\}} \cdot y_u$. Так как $y_u,\ {}_{\{v\}}T_{\{u\}}$ известны, то, фактически, нужно выполнить операцию умножения матриц:

$$y_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

А6.3 Линейные подпространства

> **Определение 5.8.** *Подмножество M векторов линейного пространства $L\,(M \subset L)$ называют линейным подпространством, если выполнены два условия:*
> 1. *для* $\forall\ x, y \in M:\ \ x + y \in M,$
> 2. *для* $\forall\ x \in M, \forall\ \lambda \in R:\ \ \lambda x \in M.$

Известно, что линейное подпространство является также линейным пространством, поэтому можно говорить о его размерности и базисе.

$\boxed{\text{П}}$ **А6.3.1** Проверить, является ли M линейным подпространством L. Если да, то найти какой-нибудь базис M и размерность.

1) M – подмножество векторов в R^n вида $x = (\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$, проверим два условия из определения линейного подпространства:

1. Пусть $y = (\delta, \gamma, \delta, \gamma, \ldots) \in M$, $\quad x + y = (\alpha + \delta,\ \beta + \gamma,\ \alpha + \delta,\ \beta + \gamma,\ \ldots) \in M$.

2. $\lambda x = (\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\alpha, \lambda\beta, \ldots) \in M$.

Следовательно, M – линейное подпространство. Векторы $a_1 = (1, 0, 1, 0, \ldots) \in M$ и $a_2 = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ очевидно линейно независимы, а $\forall\ x \in M\ :\ \ x = \alpha a_1 + \beta a_2$. По определению a_1, a_2 образуют базис M, значит $\dim M = 2$.

2) M – подмножество векторов в R^n, вида $x = (1, \alpha, 1, \alpha, 1, \alpha, \ldots)$. Проверим два условия:

1. пусть $y = (1, \beta, 1, \beta, 1, \beta, \ldots) \in M$, $x + y = (2, \alpha + \beta, 2, \alpha + \beta, 2, \alpha + \beta, \ldots) \notin M$.

Условие 1 не выполнено, следовательно, M не является линейным подпространством.

А6.4 Ранг матрицы

Существуют три определения ранга матрицы (см. § 11.1):

Известно, что *все три ранга совпадают.*

На практике, фактически, ищут минорный ранг. При этом используется тот факт, что ранг матрицы не меняется при ЭП.

$\boxed{\text{П}}$ **А6.4.1** Найти ранг матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & 1 & 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{rank} A \underset{c_4 + c_1}{\overset{c_3 + 2c_1}{=\!=}} \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & -1 & 3 & 9 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} \overset{c_3 + c_2}{=\!=} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 11 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 11 \end{pmatrix} =$$

$$\underset{=\!=}{c_4 - c_3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, у последней матрицы максимальный порядок минора, не равного нулю, равен трем. таким минором, заведомо является минор

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$ Этот минор принято называть “базисным”.

Итак, $\operatorname{rank} A = 3$.

Заметим, что базисный минор построен из элементов матрицы, стоящих на пересечении строк и столбцов, содержащих “ведущие” элементы.

A6.5 Линейные оболочки

Определение 5.9. *Линейной оболочкой, построенной на системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называют множество всех линейных комбинаций векторов этой системы (определение 9.3).*

Линейную оболочку обозначают $l(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, если $x \in l$, то по определению $x = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i a_i$, где α_i – некоторые числа.

Известно, что линейная оболочка является линейным подпространством пространства L, которому принадлежат векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Базисом линейной оболочки является любая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

$\boxed{\text{П}}$ **A6.5.1** Найти размерность и базис линейной оболочки, натянутой на векторы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 пространства R^4, если $a_1 = (2, 1, 3, 1)$, $a_2 = (-1, 0, 1, 3)$, $a_3 = (2, 1, 0, 1)$, $a_4 = (0, 1, 5, 7)$, $a_5 = (3, 2, 4, 5)$.

Составим матрицу A, записав в столбцы векторы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (можно записать эти векторы в строки), и найдем её ранг – максимальное число линейно независимых столбцов (строк). Столбцы, входящие в базисный минор, образуют максимальную линейно независимую подсистему системы a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, т.е. образуют базис линейной оболочки.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \underset{c_4+3c_1}{\overset{c_3+c_1}{=\!=}} \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 2 & 5 & 7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & 14 \end{pmatrix} \underset{c_4-7c_2}{\overset{c_3-2c_2}{=\!=}}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3. \quad \text{Базисный минор} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базис оболочки образуют векторы $a_2, a_3, a_4, \dim l(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$.

A6.6 Множество решений ОСЛУ. Фундаментальная система решений (ФСР)

Рассмотрим ОСЛУ $Ax = \theta$, имеющую бесконечное множество решений $M \subset R^n$. Если два вектора a_1, a_2 являются решениями ОСЛУ, то $A \cdot a_1 \equiv \theta$, $A \cdot a_2 \equiv \theta$. Так как $A \cdot (a_1 + a_2) = A \cdot a_1 + A \cdot a_2 \equiv \theta$, то $a_1 + a_2 \in M$; так как $A \cdot (\lambda a_1) = \lambda \cdot (A \cdot a_1) \equiv \theta$, то $\lambda a_1 \in M$. Следовательно, M – линейное подпространство.

Определение 5.10. *Базис множества решений ОСЛУ называют фундаментальной системой решений (ФСР).*

Найти ФСР – это значит построить такую систему частных решений, которая линейно независима, а любое другое частное решение является её линейной комбинацией. Рассмотрим алгоритм построения ФСР на примере.

$\boxed{\text{П}}$ **A6.6.1** Найти ФСР множества решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Решим ОСЛУ методом Гаусса и запишем её общее решение:

$$\text{ОСЛУ: } \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \underset{c_3 - c_1}{\overset{c_2 - 2c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \underset{c_3 - c_2}{\overset{3c_1 + c_2}{\sim}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число неизвестных $n = 4$, число главных неизвестных $r = 2$, $r < n \Rightarrow$ система имеет беконечное множество решений, зависящее от $n - r = 4 - 2 = 2$ свободных неизвестных x_2, x_4. Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2 - 2x_4}{3}, \\ x_2 - \text{св.неизв.}, \\ x_3 = \dfrac{5x_2 + 5x_4}{3}, \\ x_4 - \text{св.неизв.} \end{cases}$$

Теперь будем строить ФСР – систему частных решений, которая должна быть, во-первых, линейно независимой. для этого будем задавать специальные наборы свободным неизвестным: одно из свободных неизвестных равно 1, остальные равны нулю; таких наборов столько, сколько свободных неизвестных. Такое построение удобно делать в таблице:

	x_1	x_2	x_3	x_4
b_1	$1/3$	1	$5/3$	0
b_2	$-2/3$	0	$5/3$	1

Векторы b_1, b_2 линейно независимы, т.к. матрица из строк-векторов b_1, b_2 имеет ранг 2 (есть минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.) Во-вторых, можно проверить, что любое другое решение является линейной комбинацией b_1 и b_2. Действительно, пусть $x_2 = \alpha$, $x_4 = \beta$, тогда из формул общего решения $x_1 = \dfrac{\alpha - 2\beta}{3}$, $x_3 = \dfrac{5\alpha + 5\beta}{3}$. С другой стороны, линейная комбинация

$$\alpha b_1 + \beta b_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha}{3} - \dfrac{2\beta}{3} \\ \alpha \\ \dfrac{5\alpha}{3} = \dfrac{5\beta}{3} \\ \beta \end{pmatrix}$$ дает то же самое решение.

Заметим, что при построении ФСР свободным неизвестным, на самом деле, можно придавать такие наборы значений, чтобы обеспечить наличие минора $(n-r)$ -го порядка, не равного нулю. Например, в данном примере можно было построить следующую таблицу ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4
c_1	1	3	5	0
c_2	-2	0	5	3

векторы c_1, c_2 также образуют ФСР.

$\boxed{\text{П}}$ **А6.6.2** Найти ФСР множества решений ОСЛУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

ОСЛУ: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \underset{c_4 - c_1}{\overset{c_2 - 2c_1}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} c_1 + c_3 \\ c_2 - 4c_3 \\ \sim \\ c_4 - 3c_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -13 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3 - c_4} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -13 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 10 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -8 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3c_1 + c_2 \\ 3c_3 + 2c_2 \\ \sim \\ 3c_4 - 2c_3 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -13 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число неизвестных $n = 5$, число главных неизвестных $r = 4$, число свободных неизвестных $n - r = 5 - 4 = 1$: x_2.
Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{x_2}{3}, \\ x_2 - \text{св.неизв.}, \\ x_3 = -\dfrac{4}{3}x_2, \\ x_4 = \dfrac{2}{3}x_2, \\ x_5 = \dfrac{13}{3}x_2 \end{cases}$$

Построим ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
b_1	1	3	-4	2	13

Итак, ФСР состоит из одного вектора b_1 – это базис пространства решений ОСЛУ. Заметим, что, если свободное неизвестное одно, то для построения ФСР нужно задать этому свободному неизвестному любое не равное нулю значение.

A6.7 Примеры для самостоятельного решения

ПА6.7.1 Выяснить, является ли система векторов (матриц) A_1, A_2, A_3, A_4 линейно зависимой в пространстве $M_{2\times 2}$:

а) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,
$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Ответ: линейно независима.

б) $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,
$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: линейно зависима.

ПА6.7.2 Выяснить, является ли система векторов пространства R^n линейно зависимой:

а) $a_1 = (5, -3, 2, 1, 10)$, $a_2 = (-1, 8, 1, -4, 7)$, $a_3 = (2, 1, 9, -3, 6)$,
$a_4 = (1, 3, -5, 9, 11)$.
Ответ: линейно независима.

б) $a_1 = (1, 10, 0, 0)$, $a_2 = (0, 1, 10, 0)$, $a_3 = (0, 0, 1, 10)$, $a_4 = (10^{-3}, 0, 0, 1)$.
Ответ: линейно зависима.

ПА6.7.3 Проверить, что система векторов $a_1, a_2, a_3, \dots a_n$ образует базис в пространстве R^n и найти координаты вектора x в этом базисе.
а) $a_1 = (2, 2, -1)$, $a_2 = (2, -1, 2)$, $a_3 = (-1, 2, 2)$, $x = (1, 1, 1)$.
Ответ: $x_a^T = (1/3, 1/3, 1/3)$.

б) $a_1 = (1, 2, -1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 0, -1)$, $a_3 = (1, 2, 1, 4)$, $a_4 = (1, 3, -1, 0)$, $x = (7, 14, -1, 2)$.
Ответ: $x_a^T = (0, 2, 1, 2)$.

ПА6.7.4 Проверить, что матрицы A_1, A_2, A_3, A_4 образуют базис в пространстве $m_{2\times 2}$ и найти координаты матрицы B в этом базисе.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $B_A^T = (67, -51, -3, 11)$.

ПА6.7.5 В пространстве R^3: 1) найти матрицу перехода от базиса v_1, v_2, v_3 к базису u_1, u_2, u_3; 2) найти a_u, b_v, если известны a_v, b_u: $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$, $u_3 = (1, 0, 0)$, $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 0)$, $a_u = (1, 2, 3)$, $b_v = (0, -1, 2)$.

Ответ: $_{\{u\}}T_{\{v\}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $a_v^T = (6, -5, 8)$,
$b_u^T = (-1, 2, -1)$.

ПА6.7.6 Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Ответ: 4;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ответ: 3;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. Ответ: 2;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Ответ: 3.

ПА6.7.7 Найти размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки, построенной на данной системе векторов:
а) $a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (2, 3, 2, 5)$, $a_3 = (-1, 4, 3, -1)$, $a_4 = (2, 9, 3, 5)$.

Ответ: $\dim\ l(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$, базис: a_1, a_2, a_3, a_4.

б) $a_1 = (-3, 1, 5, 3, 2)$, $a_2 = (2, 3, 0, 1, 0)$, $a_3 = (1, 2, 3, 2, 1)$, $a_4 = (3, -5, -1, -3, -1)$, $a_5 = (3, 0, 1, 0, 0)$.

Ответ: $\dim\ l(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = 3$, базис: a_1, a_2, a_3.

ПА6.7.8 Найти общее решение и ФСР:

а) $\begin{cases} 9x_1 + 21x_2 - 15x_3 + 5x_4 = 0, \\ 12x_1 + 28x_2 - 20x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -\frac{7}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3, \\ x_2 - \text{св.неизв.}, \\ x_3 - \text{св.неизв.}, \\ x_4 = 0 \end{cases}$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4
b_1	-7	3	0	0
b_2	5	0	3	0

б) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2x_2 + 8x_4, \\ x_2 = -x_3 - 2x_4, \\ x_3 - \text{св.неизв.}, \\ x_4 - \text{св.неизв.}, \\ x_5 = 0 \end{cases}$

ФСР:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
b_1	2	-1	1	0	0
b_2	8	-2	0	1	0

в) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 4x_1 - 9x_2 + 8x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

Ответ: Система имеет только нулевое решение. ФСР нет.

A7. Евклидовы пространства

В следующих примерах координаты векторов заданы в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots e_n$ пространства E^n.

П **A7.1** Найти длины векторов x, y, косинус угла между ними. $x_e = (1, 2, -1, 0)$, $y_e = (3, -1, 0, 2)$

$$(x,y) = 3-2 = 1,\ |x| = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6},\ |y| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

$\cos(\widehat{x,y}) = \dfrac{1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{1}{2\sqrt{21}}$.

$\boxed{\text{П}}$ **А7.2** Проверить, являются ли векторы x, y ортогональными.

а) $x_e = (2,-1,3,4),\ y_e = (1,2,-4,3)$,
$(x,y) = 2-2-12+12 = 0 \Rightarrow$ векторы ортогональны.

б) $x_e = (5,-1,3,2),\ y_e = (2,1,-3,0)$,
$(x,y) = 10-1-9 = 0 \Rightarrow$ векторы ортогональны.

в) $x_e = (3,1,2,4),\ y_e = (-1,2,6,-3)$,
$(x,y) = -3+2+12-12 = -1 \Rightarrow$ векторы не ортогональны.

$\boxed{\text{П}}$ **А7.3** Рассмотрим процесс ортогонализации (см. § 12.3). Пусть дана линейно независимая система векторов $a_1, a_2 \dots a_k$ $(k \le n)$ в E^n. Требуется построить ортогональную систему векторов $b_1, b_2 \dots b_k$, каждый из которых является некоторой линейной комбинацией векторов $a_1, a_2 \dots a_k$.

При $k = n$ будет построен ортогональный базис E^n. Опишем процесс ортогонализации в общем виде:

$b_1 = a_1$,

$b_2 = a_2 + \alpha_1 b_1$, $\qquad$ α_1 выберем из требования

$$(b_1,b_2) = 0 \Rightarrow (b_1,a_2) + \alpha b_1^2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{(b_1,a_2)}{b_1^2}.$$

$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2$, β_1, β_2 выберем из требований

$$(b_3,b_1) = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{(a_3,b_1)}{b_1^2},$$

$$(b_3,b_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{(a_3,b_2)}{b_2^2}$$

$\dots \quad \dots \quad \dots \ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$

$b_k = a_k + \sum\limits_{i=1}^{k-1} \gamma_i b_i$, $\gamma_1, \dots \gamma_{k-1}$ выберем из требований

$$(b_k,b_1) = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -\frac{(a_k,b_1)}{b_1^2}$$

$$(b_k,b_2) = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -\frac{(a_k,b_2)}{b_2^2}$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(b_k,b_{k-1}) = 0 \Rightarrow \gamma_{k-1} = -\frac{(a_k,b_{k-1})}{b_{k-1}^2}.$$

а) $a_1=(1,-2,2)$, $a_2=(-1,0,-1)$, $a_3=(5,-3,-7)$. Проверим, является ли система a_1,a_2,a_3 линейно независимой. Для этого найдем ранг матрицы A.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ -2 & 0 & -3\\ 2 & -1 & -7\end{pmatrix} \overset{c_3-c_1}{=\!=} \operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ -2 & 0 & -3\\ 1 & 0 & -12\end{pmatrix}.$$

Так как c_1 и c_2 не пропорциональны, то rank $A=3$, т.е. векторы a_1,a_2,a_3 линейно независимы. Начнем процесс ортогонализации.

$b_1=a_1,$

$$b_2=a_2+\alpha_1 b_1,\ (b_1,b_2)=0\Rightarrow \alpha_2=-\frac{(a_2,b_1)}{b_1^2}=-\frac{-1+0-2}{1+4+4}=\frac{1}{3},$$

$$b_2=a_2+\frac{1}{3}b_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix},$$

$$b_3=a_3+\beta_1 b_1+\beta_2 b_2,\ (b_1,b_3)=0\Rightarrow \beta_1=-\frac{(a_3,b_1)}{b_1^2}=-\frac{5+6-14}{9}=\frac{1}{3},$$

$$(b_3,b_2)=0\Rightarrow \beta_2=-\frac{(a_3,b_2)}{b_2^2}=$$

$$=-\frac{-10/3+6/3+7/3}{4/9+4/9+1/9}=-1,$$

$$b_3=a-3+\frac{1}{3}b_1-b_2=\begin{pmatrix}5\\-3\\-7\end{pmatrix}+\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2/3\\-2/3\\-1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

Проверка: $(b_1,b_2)=-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=0$, $(b_1,b_3)=6-6-12=0$, $(b_2,b_3)=-\frac{12}{3}+\frac{6}{3}+\frac{6}{3}=0.$

б) $a_1=(1,1,1,1)$, $a_2=(3,3,-1,-1)$, $a_3=(-2,0,6,8)$.

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -1 & -1\\ -2 & 0 & 6 & 8\end{pmatrix} \overset{c_2-3c_1}{=\!=} \operatorname{rank}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -4 & -4\\ -2 & 0 & 6 & 8\end{pmatrix}=3\Longrightarrow$$

векторы a_1,a_2,a_3 линейно независимы.

$$
\begin{aligned}
&b_1 = a_1,\\
&b_2 = a_2 + \alpha_1 b_1, \qquad (b_1, b_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{(a_2, b_1)}{b_1^2} = -\frac{4}{4} = -1,
\end{aligned}
$$

$$
b_2 = a_2 - b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
&b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \quad (b_3, b_1) = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{b_1^2} = -\frac{12}{4} = -3,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; (b_3, b_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{(a_3, b_2)}{b_2^2} = -\frac{32}{16} = 2,
\end{aligned}
$$

$$
b_3 = a_3 - 3b_1 + 2b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Проверка: $(b_1, b_2) = 2 + 2 - 2 - 2 = 0$, $(b_1, b_3) = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$, $(b_2, b_3) = -2 + 2 + 2 - 2 = 0$.

$\boxed{\text{П}}$ **А7.4** Построить ортонормированный базис линейной оболочки, построенной на векторах $a_1 = (2, 3, -4, -6)$, $a_2 = (1, 8, -2, -16)$, $a_3 = (12, 5, -14, 5)$, $a_4 = (3, 11, 4, -7)$.

Найдем базис линейной оболочки. Для этого подсчитаем ранг матрицы:

$$
\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 & 3 \\ 3 & 8 & 5 & 11 \\ -4 & -2 & -14 & 4 \\ -6 & -16 & 5 & -7 \end{pmatrix} \underset{\substack{c_3 + 2c_1 \\ c_4 + 16c_1}}{\overset{c_2 - 8c_1}{=\!=}} \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 & 3 \\ -13 & 0 & -91 & -13 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \\ 26 & 0 & 197 & 41 \end{pmatrix} =
$$

$$
\underset{\substack{c_2 \cdot \frac{1}{13} \\ c_3 \cdot \frac{1}{10}}}{\overset{c_4 + 2c_2}{=\!=}} \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 12 & 3 \\ -1 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{15} & \cancel{15} \end{pmatrix} = 3 \Longrightarrow
$$

Базис линейной оболочки a_1, a_2, a_3.

Построим сначала ортогональный базис $b_1,\ b_2,\ b_3$:

$$b_1 = a_1,$$

$$b_2 = a_2 + \alpha_1 b_1, \qquad (b_1, b_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -\frac{(a_2, b_1)}{b_1^2} = -\frac{130}{65} = -2,$$

$$b_2 = a_2 - 2b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ -2 \\ -16 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$b_3 = a_3 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2, \quad (b_3, b_1) = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{b_1^2} = -\frac{65}{65} = -1,$$

$$(b_3, b_2) = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{(a_3, b_2)}{b_2^2} = -\frac{130}{65} = 2,$$

$$b_3 = a_3 - b_1 + 2b_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка: $(b_1, b_2) = -6 + 6 - 24 + 24 = 0$, $(b_1, b_3) = 8 + 18 - 8 - 18 = 0$; $(b_2, b_3) = -12 + 12 + 12 - 12 = 0$.

Теперь пронормируем каждый из векторов b_1, b_2, b_3, получим ортонормированный базис c_1, c_2, c_3:

$$c_1 = \frac{b_1}{|b_1|} = \frac{b_1}{\sqrt{4 + 9 + 16 + 36}} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{65} \\ 3/\sqrt{65} \\ -4/\sqrt{65} \\ -6/\sqrt{65} \end{pmatrix},$$

$$c_2 = \frac{b_2}{|b_2|} = \frac{b_2}{\sqrt{9 + 4 + 36 + 16}} = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{65} \\ 2/\sqrt{65} \\ 6/\sqrt{65} \\ -4/\sqrt{65} \end{pmatrix}$$

,

$$c_3 = \frac{b_3}{|b_3|} = \frac{b_3}{\sqrt{16 + 36 + 4 + 9}} = \begin{pmatrix} 4/\sqrt{65} \\ 6/\sqrt{65} \\ 2/\sqrt{65} \\ 3/\sqrt{65} \end{pmatrix}.$$

A7.1 Примеры для самостоятельного решения

ПА7.1.1 Найти длины векторов, косинус угла между ними.

а) $x = (2, -3, 1, 4)$, $y = (0, 2, -1, 2)$.
Ответ: $|x| = \sqrt{30}$, $|y| = 3$, $cos(\widehat{x, y}) = \dfrac{1}{3\sqrt{30}}$.

б) $x = (3, 2, -1, 4)$, $y = (1, 2, -1, -2)$.
Ответ: $|x| = \sqrt{30}$, $|y| = \sqrt{10}$, векторы ортогональны.

ПА7.1.2 С помощью процесса ортогонализации построить ортогональный базис оболочки,построенной на системе векторов

а) $a_1 = (1, 1, -1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, 5, 11)$, $a_3 = (0, 3, 3, 7)$, $a_4 = (3, -3, -3, -9)$.

Ответ неоднозначен, поэтому “ваш” ответ необходимо проверить.

б) $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (3, 3, -1, -1)$, $a_3 = (-2, 0, 6, 8)$.

Ответ неоднозначен, поэтому “ваш” ответ необходимо проверить.

A8. Линейные операторы в конечномерном пространстве

A8.1 Матрица линейного оператора. Ядро, образ оператора

Определение 5.11. *Линейным оператором, действующим из линейного пространства L в то же самое пространство L (линейным преобразованием L) называют закон A, по которому каждому вектору $x \in L$ ставится в соответствие единственный вектор $y = A(x) \in L$ и выполняются два условия:*

1. $A(x') + A(x'') = A(x') + A(x''),\ \forall\ x', x'' \in L$
2. $A(\lambda x) = \lambda \cdot A(x),\ \forall\ x \in L,\ \forall \lambda\ \in R.$

Определение 5.12. *Матрицей линейного оператора A в базисе $e_1, e_2 \dots e_n$ называют матрицу ${}_{\{e\}}A_e$, в столбцах которой стоят $A(e_1)_{\{e\}}$, $A(e_2)_{\{e\}}$, $\dots$, $A(e_n)_{\{e\}}$*
Запишем символически это определение:

$$
{}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A(e_1)_{\{e\}} & A(e_2)_{\{e\}} & \dots & A(e_n)_{\{e\}} \end{pmatrix}.
$$

Понятие матрицы линейного оператора позволяет находит координаты вектора Ax в базисе $\{e\}$, если известны координаты вектора x в базисе $\{e\}$:

$$
(Ax)_{\{e\}} = {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot x_{\{e\}}.
$$

Определение 5.13. *Матрицы одного и того же оператора в разных базисах различны, между ними имеет место связь:*
пусть $e_1, e_2 \dots e_n$ и $e'_1, e'_2 \dots e'_n$ два базиса, ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}$ и ${}_{\{e'\}}A_{\{e'\}}$ матрицы оператора A в этих базисах, тогда

$$
{}_{e'}A_{\{e'\}} = {}_{\{e'\}}T_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}.
$$

Так как ${}_{\{e'\}}T_{\{e\}} = {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{e'\}}$, то эту формулу можно записать и в таком виде:

$$
{}_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}
$$

$\boxed{\text{П}}$ **A8.1** Проверить, является ли данный оператор линейным.

а) в пространстве V^3 геометрических векторов $A(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{a})\bar{a}$, где $\bar{a}$ – постоянный вектор.
Проверим выполнение двух условий из определения линейного оператора:

1. $A(\bar{x}' + \bar{x}'') = (\bar{x}' + \bar{x}'', \bar{a}) \cdot \bar{a} = \big((\bar{x}', \bar{a}) + (\bar{x}'', \bar{a})\big) \cdot \bar{a} =$
$= (\bar{x}', \bar{a}) \cdot \bar{a} + (\bar{x}'', \bar{a}) \cdot \bar{a} = A(\bar{x}') + A(\bar{x}'')$ – первое условие выполнено.

2. $A(\lambda\bar{x}) = (\lambda\bar{x}, \bar{a}) \cdot \bar{a} = \lambda((\bar{x}, \bar{a}) \cdot \bar{a}) = \lambda \cdot A(\bar{x})$ – второе условие выполнено.

Вывод: $A(x)$ – линейный оператор.

б) $A(x) = (\bar{a}, \bar{x}) \cdot \bar{x}$, $\bar{a}$ – постоянный вектор.

1. $A(\bar{x}' + \bar{x}'') = (\bar{a}, \bar{x}' + \bar{x}'') \cdot (\bar{x}' + \bar{x}'') = ((\bar{a}, \bar{x}') + (\bar{a}, \bar{x}'')) \cdot (\bar{x}' + \bar{x}'') =$
$= (\bar{a}, \bar{x}') \cdot \bar{x}' + (\bar{a}, \bar{x}'') \cdot \bar{x}'' + (\bar{a}, \bar{x}') \cdot \bar{x}'' + (\bar{a}, \bar{x}'') \cdot \bar{x}' =$
$= A(\bar{x}') + A(\bar{x}'') + (\bar{a}, \bar{x}') \cdot \bar{x}'' + (\bar{a}, \bar{x}'') \cdot \bar{x}'$ – первое условие не выполнено.

Вывод – оператор не линейный.

в) в пространстве R^3 $A(x) = (x_1, x_2, x_3^2)$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$.

1. $A(x' + x'') = \big(x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', (x_3' + x_3'')^2\big) =$
$= \Big(x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', {x_3'}^2 + 2x_3'x_3'' + {x_3''}^2\Big)$,
с другой стороны
$A(x') + A(x'') = (x_1' + x_1'', x_2' + x_2'', {x_3'}^2 + {x_3''}^2)$.

Так как $A(x' + x'') \neq A(x') + A(x'')$, то оператор не является линейным.

$\boxed{\text{П}}$ **A8.2** Найти матрицу линейного оператора из примера 1 а), в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, если $\bar{a}_e = (1, 2, 4)$.

По определению

$$_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A(e_1)_{\{e\}} & A(e_2)_{\{e\}} & \dots & A(e_n)_{\{e\}} \end{pmatrix}.$$

Найдем образы базисных векторов:
$A(\bar{e}_1) = (\bar{e}_1, \bar{a}) \cdot \bar{a}$, так как $\bar{e}_{1_e} = (1,0,0)$,$\bar{a}_e = (1,2,4)$, то $(\bar{e}_1, \bar{a}) = 1 \Rightarrow$ $A(\bar{e}_1) = \bar{a}$, $A(\bar{e}_2) = (\bar{e}_2, \bar{a})\cdot\bar{a} = 2\bar{a}$, $A(\bar{e}_3) = (\bar{e}_3, \bar{a})\cdot\bar{a} = 4\bar{a}$, следовательно

$$_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 16 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{П}}$ **А8.3** Линейный оператор задан матрицей

$$_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти $(Ax)_{\{e\}}$ – образ вектора $x_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

По формуле $(Ax)_{\{e\}} = {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot x_{\{e\}}$ находим

$$(Ax)_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{П}}$ **А8.4** В пространстве R^2 задана матрица оператора $_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $u_{1\{e\}} = (1,1)$, $u_{2\{e\}} = (-1,1)$.

По формуле, связывающей матрицы линейного оператора в разных базисах, имеем $_{\{u\}}A_{\{u\}} = {}_{\{u\}}T_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{u\}}$.

$_{\{e\}}T_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем $_{\{u\}}T_{\{e\}} = {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{u\}}$.

$_{\{e\}}T^{-1}_{\{u\}}:\ \left({}_{\{e\}}T_{\{u\}} \middle|\ E\right) \sim \left(E \ \middle|\ {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{u\}}\right)$.

$$_{\{e\}}T^{-1}_{\{u\}}:\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{c_2 - c_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{2c_1 + c_2}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{c|cc} E & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)\Rightarrow\ {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{u\}}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$${}_{\{u\}}A_{\{u\}}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -14 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}\cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -12 & -16 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A8.2 Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Для решения примеров этого параграфа необходимо повторить § 13.4 “Собственные значения и собственные векторы”.

Для отыскания собственных чисел следует решить характеристическое уравнение $|{}_{\{e\}}A_{\{e\}}-\lambda_E|=0$. Известно, что характеристический многочлен $|{}_{\{e\}}A_{\{e\}}-\lambda_E|$ не зависит от выбора базиса, в котором найдена матрица ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}$ линейного оператора. Так как мы рассматриваем линейные операторы в линейных пространствах над полем вещественных чисел, то нас интересуют только вещественные корни λ.

Если найдено некоторое собственное число λ_0, то для отыскания отвечающих ему собственных векторов следует решать ОСЛУ: $({}_{\{e\}}A_{\{e\}}-\lambda_0E)x=\theta$. Множество всех решений этой ОСЛУ составляют собственные векторы, отвечающие числу λ_0, ФСР данной ОСЛУ – это линейно независимые собственные векторы.

П **A8.2.1** Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Решим характеристическое уравнение:

$$|{}_{\{e\}}A_{\{e\}}-\lambda E|=0\Longleftrightarrow\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0\Longrightarrow(-1-\lambda)\cdot(3-\lambda)=0\Longrightarrow$$

$\lambda_1=-1,\lambda_2=3.$

2) Найдем собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_1=-1$:

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $n=2,\ r=1, n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 - \text{св.неизв.}, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

	x_1	x_2
u_{1_e}	1	0

Итак, все векторы $u_{\{e\}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $(\alpha \neq 0)$ – собственные, отвечающие $\lambda_1 = -1$,

вектор $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – один линейно независимый собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_1 = -1$.

Найдем все собственные векторы, отвечающие собственному числу $\lambda_2 = 3$.

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}, n = 2, r = 1, n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 - \text{св.неизв.}, \\ x_2 = 2x_1, \end{cases}$$

	x_1	x_2
u_{2_e}	1	2

Итак, все векторы $u_e = \begin{pmatrix} \beta \neq 0 \\ 2\beta \end{pmatrix}$ – собственные, отвечающие $\lambda_2 = 3$,

вектор $u_{2_e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ – один линейно независимый собственный вектор, отвечающий числу $\lambda_2 = 3$.

Заметим, что в этом примере векторы u_1, u_2 очевидно линейно независимы, значит образуют базис. Найдём в этом базисе матрицу данного оператора. По определению:

$$_{\{u\}}A_{\{u\}} = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cc} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{array}\right) \\ A(u_1)_{\{u\}} \;\; A(u_2)_{\{u\}} \end{array}.$$

$A(u_1) = \lambda_1 u_1 = -u_1, A(u_2) = \lambda_2 u_2 = 3u_2.$

Следовательно,

$A(u_1) = -1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \Rightarrow A(u_1)_{\{u\}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A(u_2) = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 \Rightarrow$ $A(u_2)_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Итак, ${}_{\{u\}}A_{\{u\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, матрица ${}_{\{u\}}A_{\{u\}}$ имеет диагональный вид. Такие операторы называют операторами простой структуры.

> *Оператор* A, для которого *существует базис, состоящий из собственных векторов*, называется *оператором простой структуры.* В базисе собственных векторов *матрица оператора имеет диагональный вид*, причём на *диагонали стоят собственные числа.*

Для установления простоты структуры оператора важным является следующее **свойство собственных векторов**:

Собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, линейно независимы.

Из этого свойства следует **достаточное условие простоты структуры линейного оператора**:

Если в n-мерном линейном пространстве оператор имеет n различных собственных чисел, то это оператор простой структуры.

$\boxed{\text{П}}$ **A8.2.2** Найти собственные числа и собственные векторы линейного оператора и выяснить, имеет ли он простую структуру.

а) ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1) Решим характеристическое уравнение:

$|A_e - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda) \cdot (-1-\lambda) \cdot$ $(3-\lambda) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$.

Т.к. все три собственных числа различны, то это оператор простой структуры.

2) Найдем собственные векторы: $\lambda_1 = 1$:

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underset{c_2\cdot\frac{1}{2}}{\overset{c_3+c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $n=3$, $r=2$, $n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - \text{св. неизв.}, \\ x_2 = x_1, \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_1. \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3
u_1	2	2	-3

$\lambda_2 = -1.$

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\overset{c_1-c_2}{2c_3-c_2}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \underset{c_2\cdot\frac{1}{4}}{\overset{c_1\cdot\frac{1}{2}}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$n=3$, $r=2$, $n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -2x_3, \\ x_3 - \text{св. неизв.} \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3
u_2	0	-2	1

$\lambda_3 = 3.$

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_2+c_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$,

$n=3$, $r=2$, $n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 - \text{св.неизв.} \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3
u_3	0	0	1

Запишем матрицу оператора в базисе u_1, u_2, u_3:

$$_{\{u\}}A_{\{u\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

б) $_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$

$$1)\ |_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 0 & -1-\lambda & 2 \\ 0 & 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)\cdot(\lambda^2+3\lambda-4) = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -4$.

Так как $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, то в этом примере нельзя воспользоваться достаточным условием простоты структуры оператора.

2) Найдем собственные векторы для $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_2 + c_1} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_1 + c_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 - \text{св. неизв.}, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	0	0

Для $\lambda_3 = -4$.

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{2} \end{pmatrix} \underset{\sim}{2c_1 - c_2} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{10}x_2, \\ x_2 \text{ – св. неизв.}, \\ x_3 = -\frac{3}{2}x_2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3
u_2	-1	10	-15

Итак, есть только два линейно независимых собственных вектора u_1, u_2, а для построения базиса нужны три линейно независимых вектора. Следовательно, не существует базиса из собственных векторов, т. е. оператор не имеет простой структуры.

A8.3 Линейные операторы с симметрическими матрицами в евклидовых пространствах

Рассмотрим в пространстве E^n особый класс операторов, матрица которых в *ортонормированном* базисе (ОНБ) *симметрична*, т. е. ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = {}_{\{e\}}A^T_{\{e\}}$. Такие операторы обладают целым рядом отличительных **свойств**:

1° Характеристическое уравнение оператора с симметрической матрицей имеет n вещественных корней (среди них могут быть одинаковые, т.е. кратные)

2° Каждому k-кратному собственному числу отвечает k штук линейно независимых собственных векторов.

3° Собственные векторы, отвечающие различным собственным числам, попарно ортогональны.

Свойства 1-3 позволяют сделать **вывод**: *оператор с симметрической матрицей* является *оператором простой структуры.*

П **A8.3.1** Найти ортонормированный базис из собственных векторов оператора с симметрической матрицей

а) ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$,

базис $e_1,\ e_2$ – ортонормированный.

а) $|{}_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 3 = 0, \lambda^2 - 4 = 0,\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -2.$

б) Ищем собственные векторы

$\lambda_1 = 2$:

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{pmatrix} \overset{c_2+c_1\cdot\sqrt{3}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$,

$n=2$, $r=1$, $n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$\begin{cases} x_1 = \sqrt{3}x_2, \\ x_2 \text{ – св.неизв.}, \end{cases}$

	x_1	x_2
u_1	$\sqrt{3}$	1

$\lambda_2 = -2$.

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \overset{c_1-c_2\cdot\sqrt{3}}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$,

$n=2$, $r=1$, $n-r=1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$\begin{cases} x_1 \text{ – св.неизв.}, \\ x_2 = -\sqrt{3}x_1, \end{cases}$

	x_1	x_2
u_2	1	$-\sqrt{3}$

Проверим, что u_1 и u_2 ортогональны. Для этого найдем их скалярное произведение:

$$(u_1, u_2) = \sqrt{3}\cdot 1 + 1\cdot(-\sqrt{3}) = 0.$$

Теперь пронормируем каждый вектор:

$$e'_1 = \frac{u_1}{|u_1|} = \frac{u_1}{\sqrt{3+1}} = \frac{u_1}{2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$e'_2 = \frac{u_2}{|u_2|} = \frac{u_2}{\sqrt{1+3}} = \frac{u_2}{2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу оператора в базисе e'_1, e'_2: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

б) ${}_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

а) $|_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \overset{c_3 - c_2}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -(1-\lambda) & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$0 \overset{k_2 + k_3}{\Longleftrightarrow}$$

$$(1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow (1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 3.$

б) Найдем собственные векторы, отвечающие λ_1, λ_2, λ_3.
$\lambda_1 = 0.$

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение:

$$\begin{cases} x_1 \text{ – св. неизв.,} \\ x_2 = -x_1, \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

ФСР

	x_1	x_2	x_3
u_1	1	-1	-1

$\lambda_2 = 1.$

ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_1 - c_2}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - \text{св. неизв.}, \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3
u_2	0	1	-1

$\lambda_3 = 3.$

ОСЛУ:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \overset{c_2 + c_1}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{-2} \end{pmatrix} \overset{c_1 - c_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$n = 3$, $r = 2$, $n - r = 1$ своб. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2, \\ x_2 - \text{св. неизв.}, \\ x_3 = x_2 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3
u_3	2	1	1

Искомый ОНБ:

$$e_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad e_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad e_3' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

$${}_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A8.4 Примеры для самостоятельного решения

ПА8.4.1 Найти собственные числа и собственные векторы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1;$
$u=\alpha(1;-1;-1),\ \alpha\neq 0.$

б) $\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

Ответ. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1;$
$u=\alpha(0;1;1)+\beta(1;-1;0),\ |\alpha|+|\beta|\neq 0.$

ПА8.4.2 Установить, является ли оператор, оператором простой структуры.

а) $\begin{pmatrix}0 & -2 & 2\\ -1 & -2 & 3\\ 1 & -3 & 2\end{pmatrix}.$ Ответ. Оператор простой структуры

б) $\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1\\ -2 & 3 & 1\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}.$ Ответ. Оператор простой структуры

в) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$ Ответ. Оператор не имеет простой структуры

ПА8.4.3 Найти ОНБ из собственных векторов и матрицу оператора в этом базисе:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$

Ответ. $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix};\ u_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix},\ u_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix},\ u_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$

б) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}.$

Ответ. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

A9. Квадратичные формы

Определение 5.14. *Квадратичной формой от n действительных переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называют функцию вида $f(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$, где a_{ij} действительные числа, причем можно считать $a_{ij} = a_{ji}$.*

Матрица $\underset{n\times n}{A} = (a_{ij})$ называется *матрицей квадратичной формы*. Так как $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица A симметрична. Если считать $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$ координатами вектора $x \in R^n$ в некотором базисе $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$, то квадратичную форму можно записать в матричной форме:

$$f(x_{\{e\}}) = x^T_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot x_{\{e\}},$$

и можно считать, что квадратичная форма ставит в соответствие вектору x число $f(x)$. Если ввести новый базис $e'_1,\ e'_2,\ \ldots,\ e'_n$, то матрица квадратичной формы в нем ${}_{\{e'\}}A_{\{e'\}}$ будет связана с матрицей ${}_{\{e\}}A_{\{e\}}$ по формуле

$${}_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = {}_{\{e\}}T^T_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}.$$

Определение 5.15. *Каноническим видом квадратичной формы называют следующий её вид:*

$$f(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

где $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n$ – некоторые числа.

В этом случае матрица квадратичной формы *диагональна*.

Существуют разные методы приведения квадратичной формы к каноническому виду. Рассмотрим два из них.

Метод 1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду с помощью **ортогонального преобразования переменных**.

Предположим, что имеем матрицы одной и той же квадратичной формы в двух ортонормированных базисах, как было отмечено выше

$$_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = {}_{\{e\}}T^T_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}}.$$

В этом случае $_{\{e\}}T_{\{e'\}}$ – это матрица перехода от ОНБ к ОНБ. Такая матрица называется *ортогональной*. Ортогональные матрицы обладают важным свойством: $P^T = P^{-1}$, но тогда формулу связи матриц квадратичной формы в двух разных базисах можно записать в виде:

$$_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = {}_{\{e\}}T^{-1}_{\{e'\}} \cdot {}_{\{e\}}A_{\{e\}} \cdot {}_{\{e\}}T_{\{e'\}},$$

а так как $_{\{e\}}T^{-1}_{\{e'\}} = {}_{\{e'\}}T_{\{e\}}$, то эта формула совпадает с формулой связи матриц линейных операторов в двух разных базисах. Учитывая, что матрица квадратичной формы симметрична, можем утверждать, что всегда найдется ОНБ, в котором матрица квадратичной формы будет иметь диагональный вид, а квадратичная форма будет иметь канонический вид.

$\boxed{\text{П}}$ **A9.1** Привести квадратичную форму к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных (или, что то же самое, с помощью ортогональной матрицы.

а) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = -x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.

1. Составим матрицу квадратичной формы: $_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$,

обратим внимание, что коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ и равны половине коэффициента при произведении x_ix_j.

2. Найдем собственные числа матрицы A_e.

$$|_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 3 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

разложим определитель по первой строке:

$$(-1-\lambda)\cdot\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1-\lambda \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0,\ (-1-\lambda)(\lambda^2+4\lambda-9)-9(1-\lambda) = 0,$$

$$-\lambda^3 - 5\lambda^2 + 14\lambda = 0, \quad \lambda(\lambda^2 + 5\lambda - 14) = 0, \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -7,\ \lambda_3 = 2.$$

3. Известно, что для симметрической матрицы существует ортонормированный базис из собственных векторов, в котором матрица квадратичной формы (или, что то же самое, матрица оператора) имеет диагональный вид:

$$_{\{e'\}}A_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а тогда сама квадратичная форма имеет канонический вид:

$$f(x_1', x_2', x_3') = -7(x_2')^2 + 2(x_3')^2.$$

Заметим, что, если не требуется, то искать тот ОНБ, в котором матрица имеет диагональный вид, необязательно. Достаточно найти только собственные числа.

б) Найти канонический вид квадратичной формы и то ортогональное проеобразование переменных, которое к нему приводит. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_4 + 6x_2x_3$.

1. Выпишем матрицу квадратичной формы $_{\{e\}}A_{\{e\}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Найдём собственные числа:

$$|_{\{e\}}A_{\{e\}} - \lambda E| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

разложим определитель по первой строке:

$$-\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 3 & -\lambda \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

разложим каждый из определителей по третьей строке:

$$(-\lambda) \cdot (-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} \cdot (\lambda^2 - 1) = 0,$$

$$(\lambda^2-9)(\lambda^2-1)=0, \quad \lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=3,\ \lambda_4=-3.$$

3. Запишем канонический вид квадратичной формы:

$$f(x_1',\ x_2',\ x_3',\ x_4')={x_1'}^2-{x_2'}^2+3{x_3'}^2-3{x_4'}^2.$$

4. Для отыскания ортогонального преобразования переменных нужно найти матрицу перехода ${}_{\{e\}}T_{\{e'\}}$, тогда искомое преобразование можно записать в матричной форме:

$$x_{\{e\}}={}_{\{e\}}T_{\{e'\}}\cdot x_{\{e'\}}.$$

Новый базис e_1', e_2', e_3', e_4' состоит из собственных векторов. Найдем их.

$\underline{\lambda_1=1}$.

$$\text{ОСЛУ: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{-1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3+3c_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3\cdot\frac{1}{8}}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_2-3c_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$n=4,\ r=3,\ n-r=1$ св. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1=x_4,\\ x_2=0,\\ x_3=0,\\ x_4 - \text{св. неизв.} \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_3
u_1	1	0	0	1

$\underline{\lambda_2=-1}$.

$$\text{ОСЛУ: } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 1 & 0\\ \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{pmatrix} \underset{\sim}{c_3-3c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 4,\ r = 3,\ n - r = 1$ св. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = -x_4, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 0, \\ x_4 - \text{ св. неизв.} \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_3
u_2	-1	0	0	1

$\underline{\lambda_3 = 3}$.

ОСЛУ: $$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_3 \frac{1}{3}}{\overset{c_3 + c_2}{\sim}} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{c_3 - 3c_1}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{c_3 \frac{1}{10}}{\sim} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\overset{c_1 + 3c_3}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 4,\ r = 3,\ n - r = 1$ св. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 - \text{ св. неизв.}, \\ x_3 = x_2, \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_3
u_3	0	1	1	0

$\underline{\lambda_4 = -3}$.

ОСЛУ: $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \underset{c_2 \frac{1}{3}}{\overset{c_1 - 3c_4}{\sim}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{c1 \cdot \frac{1}{8}}{\sim}$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \overset{c_3 - 3c_1}{\sim} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$n = 4,\ r = 3,\ n - r = 1$ св. неизв.

Общее решение: ФСР

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -x_3, \\ x_3 - \text{св. неизв.}, \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

	x_1	x_2	x_3	x_3
u_4	0	-11	1	0

Проверим, что векторы $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$ – попарно ортогональны:

$(u_1,\ u_2) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0, \quad (u_1,\ u_3) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$
$(u_1,\ u_4) = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0,$
$(u_2,\ u_3) = -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$
$(u_2,\ u_4) = -1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0,$
$(u_3,\ u_4) = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 0,$

Осталось пронормировать векторы $u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4$:

$$e_1' = \frac{u_1}{|u_1|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\ e_2' = \frac{u_2}{|u_2|} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$e_3' = \frac{u_3}{|u_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},\ e_4' = \frac{u_4}{|u_4|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$${}_{\{e\}}T_{\{e'\}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Метод 2. Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью невырожденного преобразования переменных.

Рассмотрим этод метод на примере.

а) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Рассмотрим слагаемые, содержащие какую-нибудь конкретную переменную, например x_1, дополним эту группу слагаемых до полного квадрата некоторой алгебраической суммы. Для этого придется добавить и вычесть некоторые слагаемые:

$$\begin{aligned} f(x_1,\ x_2,\ x_3) &= (x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3) + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)^2 + 6x_2x_3 + x_2^2. \end{aligned}$$

Совершим преобразования переменных по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = \qquad x_2, \\ y_3 = \qquad\qquad x_3, \end{cases}$$

в матричном виде эти формулы можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ очевидно имеет обратную, преобразование с такими матрицами называют невыроженными преобразованиями переменных. Это же можно интерпретировать как переход к новому базису, в котором квадратичная форма имеет вид:

$$f(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 6y_2y_3.$$

Теперь проделаем ту же процедуру с переменной y_2:

$$f(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 + (y_2 + 3y_3)^2 - 9y_3^2.$$

Рассмотрим еще одно преобразование переменных:

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \qquad y_2 + 3y_3, \\ z_3 = \qquad y_2 + 3y_3, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$ – невырожденное преобразование.

$$f(z_1,\ z_2,\ z_3) = z_1^2 + z_2^2 - 9z_3^2 \text{ – это канонический вид.}$$

Заметим, что канонический вид квадратичной формы определен неоднозначно, однако имеет место, так называемый, *закон инерции квадратичной формы*:

> *Число положительных и число отрицательных коэффициентов одинаково в любом каноническом виде, к которому может быть приведена квадратичная форма невырожденным преобразованием переменных.*

б) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1x_2 + x_1x_3$.

Для применения метода Лагранжа нужно чтобы какая-нибудь переменная присутствовала в квадрате. Поэтому сначала совершим вспомогательное невырожденное преобразование переменных, в результате которого появится слагаемое с квадратом какой-нибудь переменной. Например,

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2, \\ x_2 = \qquad y_2, \\ x_3 = \qquad\qquad y_3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(y_1,\ y_2,\ y_3) &= {y_2}^2 + y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \\ &= \left(y_2 + \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{4}{y_1}^2 - \frac{1}{4}{y_3}^2 - \frac{1}{2}y_1y_3 + y_1y_3 = \\ &= \left(\frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3\right)^2 - \frac{1}{4}{y_1}^2 - \frac{1}{4}{y_3}^2 + \frac{1}{2}y_1y_3. \end{aligned}$$

Совершим невырожденное преобразование переменных:

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = \frac{1}{2}y_1 + y_2 + \frac{1}{2}y_3, \\ z_3 = \qquad\qquad\quad y_3, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} f(z_1,\ z_2,\ z_3) &= -\frac{1}{4}{z_1}^2 + {z_2}^2 - \frac{1}{4}z_1z_2 + \frac{1}{2}z_1z_3 = \\ &= -\frac{1}{4}{z_1}^2 + \left(z_2 + \frac{1}{4}z_3\right)^2 - \frac{1}{16}{z_3}^2 - \frac{1}{4}{z_3}^2 = \\ &= -\frac{1}{4}{z_1}^2 + \left(z_2 + \frac{1}{4}z_3\right)^2 - \frac{5}{16}{z_3}^2. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_1 = z_1, \\ u_2 = \qquad z_2 + \frac{1}{4}z_3, \\ u_3 = \qquad\qquad\ z_3, \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix};$$

$$f(u_1,\ u_2,\ u_3) = -\frac{1}{4}{u_1}^2 + {u_2}^2 - \frac{5}{16}{u_3}^2 \text{ – это канонический вид.}$$

А9.1 Примеры для самостоятельного решения

ПА.9.1 Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду:

а) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = -3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

Ответ. $f(y_1,\ y_2,\ y_3) = -y_1^2 - 7y_2^2 + 5y_3^2$

б) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

Ответ. $f(y_1,\ y_2,\ y_3) = y_1^2 + 7y_2^2 + y_3^2$

в) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3$;

Ответ. $2y_1^2 - 7y_2^2$

ПА.9.2 Привести квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа:

а) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3{x_3}^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

Ответ. $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

б) $f(x_1,\ x_2,\ x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 62x_2x_3$;

Ответ. $y_1^2 - y_2^2$

Литература

[1] *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры // Ма: Наука, 1987.

[2] *Ефимов Н.В.* Краткий курс аналитической геометрии // М: Наука, 1971.

[3] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра // М: Наука, 1984.

[4] *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия // М: Наука, 1988.

[5] *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии // М: Наука, 1986.

[6] *Кострикин А.И.* Введение в алгебру // М: Наука, 1977.

[7] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры // М: Наука, 1975.

[8] *Погорелов И.В.* Дифференциальная геометрия // М: Наука, 1969.

[9] *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре // М: Наука, 1984.

[10] *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии // М.: Наука, 1964.

[11] *Владимирский Б.М., Горстко А.Б., Ерусалимский Я.М.* Математика. // СПб: Лань, 2008.