Министерство образования и науки
Российской Федерации

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И
ОПТИКИ

А.Г. Зыков В.И. Поляков, В.И. Скорубский

Математическая логика

Учебное пособие по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов»

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИТМО
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

Санкт-Петербург

2013

Зыков А.Г., Поляков В.И., Скорубский В.И. Математическая логика. – СПб: НИУ ИТМО, 2013. – 131 с.

В пособии описывается история возникновения логики как науки. Рассматриваются основные положения логики высказываний и логики предикатов. Обосновываются принципы логического вывода, применяемые в логике предикатов и ее приложениях к искусственному интеллекту и базам знаний. Приводятся примеры применения многозначной логики в моделировании логических схем. Рассматриваются методы решения задач в логике высказываний и логике предикатов. В приложении приводится именной указатель ученых, внесших значительный вклад в развитии логики как науки.
Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 230100 «Информатика и вычислительная техника» и 231000 «Программная инженерия».

Рекомендовано к печати советом факультета Компьютерных технологий и управления 12 ноября 2013 г., протокол №10.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики».

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Логика – сложный, многогранный феномен духовной жизни человечества. Именно поэтому в современном языке этот термин имеет множество значений. Термин «логика» происходит от латинского слова *«logos»,* что значит «мысль», «слово», «разум». В настоящее время можно выделить несколько основных значений логики [1].

Логика – последовательная связь предметов и явлений окружающего мира. Типичными примерами употребления рассматриваемого термина в таком значении являются выражения «логика вещей», «логика исторического развития», «логика международных отношений».

Логика – закономерности в связях и развитии мысли. В данном случае в качестве примеров можно привести такие выражения, как «женская логика», «железная логика», «логика рассуждения».

Логика – наука о структуре и закономерностях правильного мышления.

Логика – определенная последовательность в действиях человека. Например, логика поступка, логика поведения.

Так как в одном из случаев логику определяют как науку, то она должна иметь свой объект, предмет и место в системе наук. Если логика – это наука о формах, приемах и законах мышления, значит, оно и выступает объектом ее изучения. Однако известно, что изучением процесса мышления занимаются и другие науки, например философия, психология, физиология, а также многие другие. Поэтому необходимо выделить предмет логики, значение которого будет уже, чем значение объекта. Важно также отметить отличие предмета логики от предмета других наук о мышлении.

Философия исследует мышление в целом. Она решает вопрос об отношении человека, а, следовательно, его мышления к окружающему миру. При этом философию мало интересуют те механизмы, на основе которых формируется человеческое мышление.

Психология изучает мышление как один из психических процессов наряду с эмоциями, волей и т. д. Она уделяет значительное внимание изучению как механизмов возникновения того или иного определенного типа мышления, так и непосредственное проявление этих типов мышления на практике. Однако психологию не интересует истинность этих типов мышления, наоборот, ее предметом выступает исследование отклоняющихся от нормы типов мышления.

Физиология раскрывает механизмы, которые обусловливают процесс мышления. При этом ее мало интересует отражение действительности, возникающее в процессе мышления.

Своеобразие логики заключается в том, что она изучает мышление, его содержание, формы, законы, истинность. Поэтому более точным определением логики как науки будет следующее высказывание: **логика** это наука о законах и формах **правильного рассуждения**, на основе которых получаем **правильные выводы**, наука о **методах познания** [2].

Логика занимается формальными рассуждениями безотносительно к их содержанию. Отличают **правильные** (истинные) **и неправильные** (ложные) утверждения.

Возникновение логики как науки имело две предпосылки. Во-первых, это зарождение и первоначальное развитие наук. Этот процесс получает развитие в Древней Греции с VI в. до н. э. Зарождение науки требовало исследования природы мышления как средства познания. Во-вторых, возникновение логики было связано с развитием ораторского искусства. Логика должна была объяснить, как должна строиться речь и какими свойствами она должна обладать. Поэтому не случайно, что именно Греция стала родиной такой науки, как логика.

Основателем логики принято считать древнегреческого философа ***Аристотеля,*** который изложил свои идеи в работе «Органон». Согласно Аристотелю «мышление – это не конструирование или создание умом некой новой сущности, но, скорее, уподобление в акте мышления чему-то, находящемуся вовне».

Анализ вывода, который раскрывает чисто формальное содержание рассуждения, называется ***формальной логикой***. Предметом формальной логики Аристотеля выступали:

1) основные виды бытия, которые подпадают под отдельные понятия и определения;

2) соединения и разделения этих видов бытия, которые выражаются в суждении;

3) способы, которыми ум при посредстве рассуждений может перейти от истины известной к истине неизвестной.

Классическая логика Аристотеля – суждение истинное, если соответствует действительности (фактам). Логика как наука в трудах Аристотеля связана с судебной и политической практикой

В Средние века (VI–XIV вв.) логика была в значительной мере подчинена богословию. В этот период теоретический поиск в логике развернулся вокруг проблемы объяснения общих понятий – универсалий. При этом на всем протяжении Средних веков систематическая разработка формальной логики почти не выходила за пределы силлогистики.

Основателем ***арабо-язычной*** логики считается сирийский математик ***Аль-Фараби.*** Его логика направлена на анализ научного мышления. Аль-Фараби выделял в логике две ступени: одна охватывала представления и понятия, другая – теорию суждений, выводов и доказательств.

В эпоху Возрождения логика переживала настоящий кризис. Она расценивалась в качестве логики «искусственного мышления», основанного на вере, которому противопоставлялось естественное мышление, базирующееся на интуиции и воображении.

Новый, более высокий этап в развитии логики начинается с XVII в. Его начало было связано с появлением работы ***Ф. Бэкона*** «Новый Органон». В этом труде автор стремился разработать приемы исследования самой природы. Он положил начало созданию механизмов установления причинно-следственных связей в объективной реальности. Таким образом, Ф. Бэкон стал родоначальником ***индуктивной логики***, в которой нашли отражение процессы получения новых общих знаний на основе данных, полученных путем эмпирических исследований.

В дальнейшем индуктивная логика была систематизирована и значительно расширена в работах ***Дж. Фр. Гершеля*** и ***Дж. Ст. Милля.*** Последний, в своем труде «Система логики», подверг критике те направления философии, согласно которым знание и поведение исходят из врожденных идей и морального чувства. «Напротив, доказывал он, – знание имеет своим источником опыт, соединенный со способностью к ассоциации идей; моральные науки, как и науки физические, руководствуются принципом причинности».

Известный вклад в развитие традиционной логики внесли и русские ученые. Среди них особое место занимает ***М.И. Каринский.*** Он разработал универсальную систему выводов, разделив их на две основные группы – основанные на тождестве субъектов и на тождестве предикатов. М. И. Каринский подчеркивал независимость существующего от субъективного представления о нем, признавал объективность интеллектуального восприятия действительности как адекватного отражения ее реальных связей и отношений.

Растущие успехи в развитии математики выдвинули две фундаментальные проблемы: применение логики для разработки математических теорий и математизацию логики. Попытку решения этих проблем впервые предпринял ***Готфрид Лейбниц.*** В 1666 г., применив аппарат алгебры, он придал новый импульс логическим исследованиям.

В XIX в. была создана ***символическая логика***. Символическая логика изучает символические абстракции, которые фиксируют формальную структуру логического вывода.

В алгебраическом духе прогресс периодически возобновлялся, достигнув кульминационных точек в период 1847–1877 гг. в работах ***Дж. Буля, О. де Моргана, Ч. С. Пирса*** и ***Э. Шредера.*** Дж. Буль предложил логику рассуждений безотносительно к содержанию определить формальным символическим языком ***формальной логики,*** утверждениям присваиваются абстрактные значения True (***истина***) или False (***ложь***).

Причем следует отметить, что при изучении проблемы взаимодействия логики и алгебры приоритет всегда отдавался алгебре. Более того, указанные ученые стремились скорее не синтезировать эти науки, а полностью подчинить логику математике. И только ***Г. Фреге*** в 1879 г. отказался от алгебраических аналогий и разработал оригинальный символический и понятийный аппарат, пригодный для использования в универсальной и эффективной логической теории. Только отойдя от полного подражания алгебре, Г. Фреге выяснил истинную природу центрального понятия алгебры и логики – переменной. Обнаружилось родство между переменной и неопределенным местоимением.

Продолжением развития символической логики занимались ***Б. Рассел*** и ***А. Н. Уайтхед.*** Новая логика позволила с большой точностью описать формы суждений и отношения между ними. На целый ряд философских вопросов, в частности касавшихся природы математики, были сразу даны новые и четкие ответы, и стало казаться, что с помощью формальной логики можно будет найти окончательное решение философских проблем.

В современной науке значение символической логики очень велико. Она находит приложение в кибернетике, нейрофизиологии, лингвистике.

Символическая логика является современным этапом в развитии формальной логики. Она изучает процессы рассуждения и доказательства посредством его отображения в логических системах (исчислениях). Таким образом, по своему предмету эта наука является логикой, а по методу – математикой.

В ***прагматистской логике*** Ч. С. Пирса критерием истинности является успех в практическом применении результатов.

Таким образом, одни и те же символические рассуждения в символической логике могут иметь разный смысл и могут приводить к формированию новых непротиворечивых теорий, предполагающих практический смысл. Одним из примеров таких искусственных теорий, построенных в теории и нашедших позднейшее приложение, является неэвклидова геометрия ***Лобачевского Н. И***.

В середине XX века благодаря работам ***К.Шеннона, Дж.Маккарти*** и ***Э. Дж. Мак-Класки*** логика становится прикладной наукой, связанной с построением переключательных схем устройств автоматического управления.

Значительный вклад в эту прикладную область логики внесен отечественными учеными ***А. М. Ляпуновым, В. М. Глушковым, С.В. Яблонским.***

Непосредственным результатом революции, произошедшей в логике в конце XIX – начале XX в.в., было возникновение логической теории, получившей название ***математической логики***. Со временем это направление получило название классической логики.

Разнообразные неклассические направления, возникшие позднее, объединяются в такое понятие, как ***неклассическая логика***. Возникновение новых разделов логики было связано с начавшейся в XX в. критикой классической логики.

Еще в 1912 г. американский логик и философ ***К. И. Льюис*** обратил внимание на так называемые ***парадоксы импликации***, характерные для формального анализа высказывания в классической логике – материальной импликации. К. И. Льюис разработал первую неклассическую теорию логического следования, в основе которой лежало понятие строгой импликации, определившейся в терминах логической невозможности. К настоящему времени предложен целый ряд теорий, претендующих на более адекватное, чем даваемое классической логикой описание логического следования и условий связи. Среди них можно выделить ***релевантную логику*** и ***паранепротиворечивую логику***, а также многие другие. Следует отметить, что наиболее значимым из этих направлений является релевантная логика, развитая американскими логиками ***А. Р. Андерсоном*** и ***Н. Д. Белнапом.***

На рубеже 1920–х гг. ***К. И. Льюисом*** и ***Я. Лукасевичем*** были построены первые современные ***модальные логики***, рассматривающие понятия «необходимость», «возможность», «случайность» и т. п.

Тогда же начали складываться новые логические теории:

1. ***многозначная логика***, предполагающая, что утверждения могут быть не только истинными или ложными, но иметь также другие истинностные значения;
2. ***деонтическая логика***, изучающая логические связи нормативных понятий;
3. ***логика абсолютных оценок***, исследующая логическую структуру и логические связи оценочных высказываний;
4. ***вероятностная логика***, использующая теорию вероятности для анализа проблематичных рассуждений.

Классическая логика основывается на принципе, согласно которому каждое высказывание является либо истинным, либо ложным. Это так называемый принцип двузначности. Логику, основанную на этом принципе, называют ***двузначной***. Ей противопоставляют ***многозначные системы***. В последних наряду с истинными и ложными утверждениями допускаются также разного рода неопределенные суждения, учет которых не только усложняет, но и меняет всю картину.

Принцип двузначности был известен еще Аристотелю, который не считал его объективным. Философ утверждал, что этот принцип не реализуется в утверждениях о будущей ситуации, зависящей от воли человека, и поэтому не являющейся ни истинной, ни ложной. Этот подход вызывал ожесточенные споры. Так, ***Эпикур*** соглашался с Аристотелем и высоко оценивал его подход. В то же время древнегреческий логик ***Хрисипп*** категорически отрицал принцип многозначности, не соглашаясь с Аристотелем.

В более позднее время положение, что любое высказывание либо истинно, либо ложно, оспаривалось многими логиками. Это было связано с невозможностью применения данного принципа к несуществующим, неустойчивым или ненаблюдаемым объектам.

Первые современные многозначные логики создали независимо друг от друга польский логик ***Я. Лукасевич*** в 1920 г. и американский логик ***Э. Пост*** в 1921 г. Я. Лукасевичем была предложена ***трехзначная логика***, основанная на предположении, что высказывания бывают истинными, ложными и возможными, или неопределенными. Все законы трехзначной логики Лукасевича оказались также законами классической логики, однако обратное утверждение смысла не имело. Ряд классических законов в трехзначной логике отсутствовал. Среди них оказались закон противоречия, закон исключенного третьего, закон косвенного доказательства и ряд других.

Э. Пост, в отличие от Я. Лукасевича, подошел к построению многозначной логики исключительно формально. Он предложил следующие обозначения: 1 – истина, 0 – ложь, все же числа, находящиеся в промежутке между этими значениями, обозначают определенную степень истинности.

В настоящее время построен ряд систем многозначной логики и разрабатывается общая теория этих систем. Разработка систем многозначной логики имеет целью решение различных конкретных задач научного исследования, как общечеловеческих, так и специальных, научных. Например, трехзначная и четырехзначная логики высказывания Я. Лукасевича строились с целью создания ***модальной логики***, трехзначное исчисление ***Д. А. Бочвара*** – с целью разрешения парадоксов классической математической логики. Следует также отметить приложение многозначной логики к обоснованию квантовой механики и к теории релейных схем.

В 1908 г. ***Л. Брауер*** подверг сомнению неограниченную реализацию в математических рассуждениях классических законов исключенного третьего, двойного отрицания, косвенного доказательства. Одним из результатов анализа таких рассуждений явилось возникновение ***интуиционистской логики***, сформированной в 1930 г. ***А. Гейтингом*** и не содержащей указанных законов, развитой ***С. Клини***. Это направление неклассической логики основано на принципе интуиционизма.

Интуиционизм признает главным и единственным критерием правомерности методов и результатов логики ее интуитивную – наглядно-содержательную убедительность (интуицию). Данное понятие заключается в двух положениях:

1) процессе умственного построения всех логических объектов;

2) отказе от использования абстракции актуальной бесконечности.

Главным объектом критики интуиционистской логики стал классический закон исключенного третьего. Л. Брауэр полагал, что, возникнув в конечном множестве объектов, закон исключенного третьего впоследствии был распространен на бесконечные множества, в результате чего проверить, обладают ли все предметы определенным свойством или нет, не является возможным.

Еще одним важным положением интуиционистской логики было отрицание существования логики вне рамок математики. По мнению интуиционистов логика возникла вместе с математикой.

Чтобы избежать парадоксов, математическое доказательство должно основываться не на логической строгости, а на интуитивной очевидности: оно достоверно при условии интуитивного понимания каждой его ступени начиная с исходных посылок и правил рассуждения. Таким образом, о применимости в доказательстве тех или иных законов логики, в конечном счете, также должна судить интуиция. Однако при этом интуиционизм не противопоставляет интуицию логике, а развивает понимание логики исключительно как части математики.

Одним из направлений интуиционистской логики является ***конструктивная логика***. Основная идея конструктивной логики заключается в запрещении переносить на бесконечные множества принципы, верные для конечных множеств (например, положение о том, что целое больше частного). Само понятие «бесконечность» конструктивная логика также трактует отлично от классической. Если в последней бесконечность – завершенное понятие, то в первой она является потенциальной и становящейся. Для конструктивной логики характерно индуктивное построение объектов и логико-математических теорий в целом. В рамках конструктивной логики был разработан специальный прием исследования – конструктивный метод. Он противопоставлялся аксиоматическому методу и основан на, так называемых, рекурсивных определениях, связанных с математической индукцией. Однако на данный момент он находит применение только в построении конструктивных наук: логике и математике. Большой вклад в развитие конструктивной логики внесли российские ученые ***А.Н. Колмогоров, А.А. Марков, Н.А. Шанин.***

В сферу этих, а также некоторых других направлений неклассической логики вовлекается не только математика, но также естественные и гуманитарные науки. Однако, несмотря на эту тенденцию, классическая логика по-прежнему имеет большое практическое и теоретическое значение.

Логика как наука относится к философии, а как символическая формальная – к математике.

Логика входит в состав фундаментальных математических дисциплин современной информатики, объединяемых в **дискретной математике.**

Логика связана с **алгоритмизацией и автоматическим решением задач**. Важнейшим достижением логики в приложениях конца XX века является разработка основ логического программирования.

Логика в гуманитарных дисциплинах (философия, юриспруденция, психология, экономика) связана с разработкой правильных рассуждений и принятием **логически корректных решений** [3].

Используется обобщение логики как неразрывной части **информа-**

ционно-логического поля, в которое вписываются практически все известные теории – физики, химии, биологии, космологии и в прикладных областях, связанных с проектированием информационно-управляющих систем [4].

Утверждается, что мир структурирован как информационно-логическое поле, где существует бесконечное множество знаний-смыслов, оказывающих влияние на окружающие информационно-ориентированные элементы. Влияние состоит в том, что смысл-содержание информации воспринимают те элементы, которые наилучшим образом приспособлены к восприятию (пониманию смысла информации) и принятию решения как логическое следствие реакции на полученную информацию. Это оправдывает выделение логики как области принятия решения, включающей прием и вывод решения из истинной информации конкретными приемниками. Таким образом, соединяются в одном поле как информация (знание, смысл) с восприятием и всеми изменениями информации, которые определяет приемник.

Часто при изучении логики возникает вопрос, а имеет ли эта наука практическое значение. Вокруг этого вопроса существует много дискуссий и мнений. Одни считают логику непрактической наукой, ссылаясь на слова ***Г. Гегеля***, что логика «учит» мыслить, так же как физиология «учит» переваривать. Другие не согласны с этим мнением, утверждая, что практическое значение логики существенно. Данные факты обусловливают чрезвычайную сложность задачи определения практического значения логики.

Прежде всего, необходимо согласиться с теми, кто считают, что логика действительно играет значительную роль не только в мышлении, но и в жизни человечества. Во-первых, логика повышает культуру нашего мышления, вырабатывает навык грамотно мыслить, развивает критическое отношение к своим и чужим мыслям. Во-вторых, логика выполняет ряд значимых социальных функций. Поэтому мнение тех, кто отрицает практическое значение логики, имеет серьезные противоречия с реальностью.

В первую очередь необходимо определить функции, которые выполняет логика в обществе. Их можно выделить четыре.

Познавательная функция. Логика позволяет определить верный путь для достижения истинных знаний, а также выявить последствия, к которым приводит неправильный ход рассуждения.

Мировоззренческая функция. Логика влияет на формирование человеческого мышления, которое, в свою очередь, определяет жизненную позицию человека.

Методологическая функция. Следует отметить, что законы логики играют важную роль в разработке методологий различных наук. В то же время логическая теория также является методом познания.

Идеологическая функция. Логика часто используется в идеологических целях в силу своих внутренних антагонизмов и противоречий (например, между материализмом и идеализмом, диалектикой и метафизикой).

Также важна логика и в формирования культуры человека, культуры его мышления. Неоспоримо, что логика имеет большое значение для развития способности эффективно использовать средства познания. Логика помогает человеку ориентироваться в своих знаниях, систематизируя их и выбирая из информационной среды необходимые материалы. Кроме того, эта наука предоставляет определенное знание об устоявшихся правилах тех или иных мыслительных процедур.

Изучение логики способствует повышению интеллектуального потенциала человека, более эффективному использованию способностей, данных человеку от природы. Логика учит человека правильному мышлению, т. е. сознательному применению законов и норм мышления. Логическое мышление важно для любого человека, в любой области знания, при любом размышлении.

Современные приложения логики - проектирование цифровых схем, программирование экспертных систем, управление базами данных, логическое управление.

Цель данного курса представляется как последовательный переход через формализацию к приложениям, связанным с алгоритмическим решением задач и проектированием систем.

Различают два основных раздела математической логики: ***логика высказываний и логика предикатов.***

В ***логике высказываний*** рассуждения из ***вербальной*** (текстуальной) формы преобразуются в символическую форму и определяются основные законы правильных рассуждений. Законы позволяют абстрагироваться от смысла конкретных высказываний, выполнить анализ и алгебраические преобразования высказываний в символической форме.

В ***логике предикатов*** рассматриваются законы построения утверждений в обобщенной форме с переменными, определяемыми в классах с конкретным информационным смыслом. Язык логики предикатов, в который вкладывается смысл, играет важную роль в искусственном (автоматизированном) получении знаний.

1. Логика высказываний

Раздел логики, в котором изучаются истинностные взаимосвязи между высказываниями. **Высказывания** (пропозиции, простые **предложения**) рассматриваются только с точки зрения их истинности или ложности, безотносительно к их содержанию.

1.1. Формулы высказываний

Простые высказывания – истинные либо ложные по смыслу простые предложения.

Примерами простых высказываний являются:

1) **свойства** объектов,

5-*число, Петров высокий, фрукт красный.* Даже, если мы никогда не видели Петрова и яблока, мы верим, что это истина и верим в то, что фрукт красный.

Если выделены свойства (признаки) для объектов множества Q, то выделенные этими признаками подмножества образуют **классы**. Простое высказывание *Петров высокий* предполагает истинность некоторого свойства (*высокий, низкий, средний*) применительно к конкретному объекту из Q = {Петров, Сидоров, …}. Здесь в определениях выходим за границы логики высказываний в логику классов.

2) **отношения** между объектами, *Олег брат Сергея,* 5 *больше* 7, *прямая на плоскости.* Например, прямая и плоскость – абстрактные понятия, предложенные математикой в информационном поле геометрических объектов и размещение прямой на плоскости тоже абстракция. (Что это? точки, штрихи, бусинки, ...? Значит, просто верим в истинность высказывания).

3) Двузначные **события** в технике, в природе, в жизни – *контакт F замкнут, двигатель включен, дождь идет, Иванов болен, ...*

А почему *замкнут* – истина, а разомкнут – *ложь*? На практике нам может быть важнее считать, что истинным является **инверсный смысл** – *разомкнутый* контакт.

Смысл высказываний для практических приложений может иметь важное значение, но для формальной логики основная цель состоит в формальной записи рассуждений и обосновании правильных рассуждений при любых значениях истинности.

Рассуждение "Если (3>5) и (5>7), то (3>7)" формально правильное и при ложных посылках 3>5, 5>7 и 3>7, если считаем их истинными.

Также можно строить неправильные рассуждения при истинных посылках. Таким образом, различаем **правильность** и **истинность** рассуждений. В логике высказываний исследуется формальная **истинность** рассуждений.

Символическая запись на языке логики позволяет избежать двусмысленности, свойственной рассуждениям в естественном языке.

В технических приложениях однозначность необходима для построения истинно работоспособных дискретных систем, формирующих принятие истинных решений.

В гуманитарных областях – истинные умозаключения, на основе истинных (признаваемых) аргументов.

Синтаксис языка логики – формальная запись структуры рассуждений. **Семантика** языка логики – правильные (истинные – *T* безотносительно к информационному полю) или неправильные (ложные –*F*) безотносительно к информационному полю) утверждения и рассуждения.

Простые высказывания обозначаются буквами – *A, B, C, ...* и называются **атомами**. Значения простых высказываний и соответствующих символов $\{T, F\}$ не связаны с каким-либо смыслом.

Составные высказывания истинные или ложные состоят из простых высказываний, которые разделяются синтаксически. Синтаксис естественного языка – предложения (точки), запятые, предлоги и связки, подлежащие, сказуемые и другие признаки, определяющие структуру предложений. Однако формальное разделение сложных рассуждений на простые высказывания на основе синтаксиса не всегда возможно, так как требуется семантический (смысловой) анализ, имеет место проблема распознавания семантики естественного языка.

Составные высказывания определяются **формулами**, состоящими из атомов и символов, обозначающих связки безотносительно к их содержанию и конкретному смыслу. Элементарные формулы из одного (унарные) или двух (бинарные) атомов (простых высказываний) обозначают **связки** и однозначно определяются **таблицами истинности**.

Переход от содержательной (**вербальной**) записи рассуждения к формальной решается интуитивно с выделением связок. Однако связки не всегда очевидно будут присутствовать или смысл составного утверждения не очевиден. В этих случаях таблицы истинности применяются для распознавания связок. Будем также применять составные высказывания для перехода к формуле, определяющей связки.

1) Конъюнкция (И, &)

A	*B*	*A&B*
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*F*

“Составное высказывание A&B истинное тогда, когда A истинно **И** *B истинно”.*

Если класс объектов Q определяется двумя свойствами – высказываниями *A* **и** *B*, или **двумя битами информации**, то его можно определить высказыванием-конъюнкцией Q=*A* & *B*. По отношению к этому классу все множество объектов Q называют **универсальным** множеством.

Пример класса.

“четное **И** *положительное число” = “Некоторое число четное (A)* **И** *положительное число”(B).*

Пример отношений.

“Сидоров **И** *Петров в школе”.*

В естественном языке связка **И** может явно отсутствовать, вместо нее может использоваться противопоставление (*число четное, но отрицательное*)**,** знаки препинания – запятые, точки, несколько подлежащих и прилагательных.

Пример Э. Беркли [5].

Служащие мужского пола с непрерывным стажем работы не меньше пяти лет, получающие пенсионную прибавку.

Рассматривается универсальный класс Служащих.

Служащие – мужчины (m). Служащие, имеющие стаж работы не менее 5 лет (f), Служащие получают пенсионную прибавку (d).

Другая запись этого утверждения через запятые (точки), что эквивалентно связке **И**.

Формула для этого утверждения – $m\&f\&d$ определяет класс служащих со свойствами m, d и отношением f.

2) **Дизъюнкция** (ИЛИ, $\vee$) - соединительное ИЛИ

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

“*Составное высказывание* $(A \vee B)$ *истинное, когда A* **ИЛИ** *B истинны”.*

Э. Беркли называет эту связку **И/ИЛИ**, т.е. связкой **ИЛИ**, допускающей **И**. Однако для упрощения естественного языка такое обозначение не используется и при необходимости уточнения истинности высказывания применяются таблицы истинности.

Пример.

“*В преступлении могли участвовать A, B, C*” – формула рассуждения $A\&B\&C$ скорее всего неправильная и выбираем $A \vee B \vee C$, так как некоторые из $\{A, B, C\}$ могли не участвовать в преступлении.

3) **отрицание (НЕ, $\rceil$)**

A	$\rceil A$
T	F
F	T

*Если выказывание “A истинно “=A, то “***НЕ** *A - ложно” =* $\rceil A$.

Забастовка продолжается (*А*) *и забастовка не продолжается* ($\rceil A$).

Но З*абастовка продолжается* ($\rceil$ А) *и забастовка закончилась* (*А*), *или Забастовка не продолжается* ($\rceil A$) *и забастовка не закончилась* (*А*),

В этом случае, какое из высказываний считать истинным, а какое ложным не имеет значения, вследствие свойства **двойственности** высказываний – любому истинному высказыванию соответствует **единственное** ложное высказывание. Справедливо и обратное утверждение. В последнем примере связка отсутствует в явном виде и выбирается по смыслу при наличии в рассуждениях инверсных высказываний.

4) **Эквивалентность** (~)

A	*B*	*A ~ B*
T	*T*	*T*
T	*F*	*F*
F	*T*	*F*
F	*F*	*T*

Сравнение в логике представлено связкой **эквивалентности**, в соответствующем высказывании результат сравнения может быть как истинным, так и ложным.

“Высказывание А ~ В истинно тогда, когда А **И** *В истинны* **ИЛИ** *А* **И** *В ложны”*. Предложение можно записать следующим равенством

$$(A \sim B) = (A\&B) \vee (\rceil A\&\rceil B).$$

Пример.

“Сидоров ходит в школу ТАКЖЕ, КАК Петров” =”Сидоров **И** *Петров в школе* **ИЛИ** *Сидорова* **НЕТ** *в школе* **И** *Петрова* **НЕТ** *в школе”*

Предложения со связкой эквивалентность допускает различные условия истинности *T* и *F* и как логическую связку ее необходимо отличать от равенства (**тождества**) $A \equiv B$, в котором значения всегда совпадают.

При выборе связки эквивалентности также требуется проверка по таблицам истинности составного высказывания.

В виде тождеств формулируются законы логики, один из которых определяет **единственность отрицания** для каждого простого высказывания в виде $A\&\rceil A = F$, $A \vee \rceil A = T$;

5) Исключающее ИЛИ (ЛИБО, ЛИБО, ⊕) – разделительное ИЛИ

A	*B*	*A⊕B*
T	*T*	*F*
T	*F*	*T*
F	*T*	*T*
F	*F*	*F*

Связка ЛИБО (**ИЛИ /НО НЕИ** по Э.Беркли)

"*A* либо *B* истинно ($A\oplus B$) тогда и только тогда, когда *A* **ИЛИ** *B* истинны, но *A* **И** *B* ложны" = $(A\oplus B) \equiv ((A \vee B) \& \rceil(A\&B))$. Здесь используем тождество.

"Петров **ЛИБО** *Семенов в школе"= "***ЛИБО** *Петров в школе,* **ЛИБО** *Семенов в школе" = "Петров* **ИЛИ** *Семенов в школе,* **НО НЕ** *вместе"*.

Такая перефразировка в более сложной формулировке в живой речи затруднительна и на практике для уточнения смысла рассуждений необходимо применение таблиц истинности.

6) Импликация ($\rightarrow$)

A	B	$A \rightarrow B$	Строка
T	T	T	3
T	F	F	2
F	T	N	1
F	F	N	0

ЕСЛИ *A истинно,* **ТО** *B истинно.* Здесь A – посылка, а B – следствие.

Можно проверить справедливость следующего тождества по таблице истинности

$(A\rightarrow B) = \rceil A \vee B.$

Пример.

*"***ЕСЛИ** *Петров в школе,* **ТО** *Сидоров тоже в школе" = "A нет в школе* **ИЛИ** *B в школе"*.

Здесь $N \in \{T, F\}$ - неопределенное значение при ложных условиях *A*, что является причиной двусмысленности предложений со связками импликации.

Если допустить N=F, то утверждение по смыслу эквивалентно конъюнкции $A\&B$ =*"не верно, что* **ЕСЛИ** *Петров в школе,* **ТО** *Сидорова* **НЕТ** *в школе"*.

Если для нулевой строки принять N=F, а для первой строки принять N=T, то утверждение является эквивалентностью двух простых высказываний $A \sim B$.

Если принять N=T в строке 1 и N=F в 0 строке, то $A \rightarrow B$ эквивалента по смыслу простому высказыванию B и условие A избыточно в рассуждении.

Таким образом, только таблица, где в 0 и 1 строках N=T, определяет импликацию как самостоятельную, отличающуюся от других связку.

Тогда таблица истинности примет вид:

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Сходство импликации с другими связками указывает на то, что при переходе к символической записи утверждений необходимо проверять по таблице истинности все условия. Неправильный выбор связки приводит к ошибочным рассуждениям

Сравним два высказывания:

"Если у живого существа крылья, то это птица" ($A \to B$),

"Крылья есть только у птицы" ($A \sim B$).

Может показаться, что высказывания одинаковые по смыслу. Однако по таблице истинности в первом случае допускается, что "*птицы могут не иметь крылья*", также как "*не птицы могут не иметь крылья*" (импликация). Во втором предложении предполагается всегда однозначное совпадение значений истинности – связка эквивалентность "*есть крылья – птица, нет крыльев – не птица"*. Таким образом, если для символьной математики смысл безразличен, то для построения формул, соответствующих истине, содержание высказывания не безразлично.

В математике утверждение *"если p, то q"* читается как

*" p **достаточно** для q" = "q **необходимо** для p".*

Если выполняется *необходимость* и *достаточность p* для *q*, то утверждения *p* и *q эквивалентны*, что можно записать в следующей символической форме

$$((p \to q)\&(q \to p)) = (p \sim q).$$

Парадоксы импликации — это парадоксы, возникающие в связи с содержанием условных утверждений классической логики. Главная функция этих утверждений — обоснование одних утверждений ссылкой на другие. В классической логике условное утверждение имеет форму «Если *A*, то *B*». Оно ложно только в том случае, если *A* истинно, а *B* ложно, и истинно во всех остальных случаях. Содержание утверждений *A* и *B* при этом во внимание не принимается. Если даже они никак не связаны друг с другом по смыслу, составленное из них условное утверждение может быть истинным.

Так истолкованное условное утверждение носит название «материальной импликации». Оно обладает следующими особенностями:

Если *B* истинно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности *A*. То есть, истинное утверждение может быть обосновано с помощью любого утверждения. Пример: утверждение «Если дважды два равно пяти, то снег бел» является истинным.

Если *A* ложно, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности *B*. То есть, с помощью ложного утверждения можно обосновать все, что угодно. Пример: утверждение «Если дважды два равно пяти, то снег красный» является истинным.

Если *A* является противоречивым (сложным) утверждением, то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности *B*. То есть, из противоречивого утверждения можно вывести все, что угодно. Пример: утверждение «Если дважды два равно четырем и дважды два не равно четырем, то Луна сделана из зеленого сыра» является истинным.

Если *B* является тавтологией (то есть утверждением, истинным при любом содержании; такие утверждения выражают логические законы), то истинность всего условного утверждения уже не зависит от истинности *A*. То есть логические законы следуют из любых утверждений. Пример: утверждение «Если снег бел, то дважды два равно четырем или дважды два не равно четырем» является истинным.

Эта особенность материальной импликации является прямым следствием двух основных допущений классической логики:

1) всякое утверждение либо истинно, либо ложно, а третьего не дано:

2) истинностное значение сложного утверждения зависит только от истинностных значений входящих в него простых утверждений, а также от характера связи между ними, и не зависит от их содержания.

В рамках этих двух допущений более удачное построение условных утверждений невозможно.

Ясно, что материальная импликация плохо выполняет свою функцию обоснования. Подобное положение дел, отстаиваемое классической логикой, получило название «парадоксов материальной импликации».

С целью решения этих парадоксов в 1912 году К. Льюис предложил заменить материальную импликацию так называемой «строгой импликацией», которая как-то отражает связь простых утверждений, составляющих условное утверждение, по смыслу. Правда, потом оказалось, что строгая импликация сама не свободна от парадоксов. Поэтому в 50-е годы прошлого века В. Аккерман и американские логики А. Андресон и Н. Белнап предложили другой вариант условной связи — «релевантную импликацию», которая разрешает не только парадоксы материальной импликации, но и парадоксы строгой импликации. Этой импликацией можно связывать только такие утверждения, которые имеют общее содержание.

1.2. Импликация на примере дедукции

Что собой представляет эта импликация, можно посмотреть на примере дедукции — метода умозаключений, в котором применяются условные утверждения. Классическим примером дедукции является следующее:

все люди — смертны,
все греки — люди,
следовательно, все греки — смертны.

Условная связь этих утверждений станет очевидна, если мы представим их в следующем виде:

если все люди смертны
и если все греки — люди,
то все греки смертны.

В классической логике это умозаключение имеет следующую форму: если первое, то второе; имеет место первое, значит, есть и второе. Такая форма дедукции является правильной. Неправильной дедукцией будет такая форма: если первое, то второе; имеет место второе; значит, есть и первое. Если вложить в эту форму прежнее содержание, то получится следующее:

все люди — смертны.
все греки — смертны.
следовательно, все люди — греки.

Ясно, что это умозаключение является неправильным. Классическая логика утверждает, что неправильное оно потому, что имеет неправильную форму. На самом деле это не совсем так, поскольку данная форма не существовала изначально, а была получена на основе анализа содержания множества подобных умозаключений. В результате этого анализа была произведена классификация этого содержания, которая потом и была обобщена в логической форме данных умозаключений. В частности, классификация, на которой основана рассмотренная дедукция, имеет следующий вид:

люди → европейцы → греки → жители Афин → …

В качестве классификационного признака берется смертность объектов. Первая посылка приписывает этот признак наиболее общему классу данной классификации, то есть классу людей. Само собой, что следующие, более частные классы данной классификации также будут обладать этим признаком. Поэтому когда вторая посылка устанавливает принадлежность греков к данной классификации, то тем самым она наделяет их и признаком смертности. Заключительный вывод только констатирует это, не внося в рассуждения ничего нового.

В свою очередь, в неправильной форме данной дедукции вторая посылка ставит более частный класс на один уровень с исходным классом, из-за чего и происходит обобщение частного признака на этот (исходный) класс.

Так вот, аналогичное содержание ложится в основу и релевантной импликации. Классификационное (дедукционное) содержание является частным случаем этого содержания.

Импликация используется во всех рассуждениях, где требуется сделать некоторое заключение, свойства этой связки имеют фундаментальное значение в логике. Вот примеры использования импликации в рассуждениях:

ЕСЛИ ***A***, ТО ***B***	$a \to b$
ИЗ ***A*** СЛЕДУЕТ ***B***	$a \to b$

A ТОЛЬКО В ТОМ СЛУЧАЕ, ЕСЛИ ***B***	$b\to a$
A ДОСТАТОЧНО для ***B***	$a\to b$
A НЕОБХОДИМО для ***B***	$b\to a$
B ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО ***A***	$a\to b$
B, ЕСЛИ ***A***	$a\to b$
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ***A***, ДОСТАТОЧНО ***B***	$b\to a$
ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ***A***, НЕОБХОДИМО ***B***	$a\to b$
B ТОГДА, КОГДА ***A***	$a\to b$
КОГДА ***A*, ** ТОГДА ***B***	$a\to b$

Примеры.

“Sin5x имеет период 2/5pi (b) тогда, когда 4>5 (a)” формула $a\to b$.

“4>0 (b) тогда, когда lim(sinx/x)→0 (a)” формула $a\to b$.

“Петров придет на занятия (a), если проснется (b)” формула $b\to a$.

Определение.

Формула правильно построена (Well formed formula – **Wff**), если содержит только перечисленные связки, причем бинарные связки правильно попарно соединяют атомы и формулы. В дальнейшем предполагаются по умолчанию только Wff- формулы.

Формальная запись рассуждения в **Wff** позволяет устранить неопределенности, свойственные естественному языку. При этом сохраняется *независимость и различимость* простых утверждений в составном высказывании, благодаря применению различных обозначений.

Следствием этого являются:

1) Возможность применения формул для исследования правильности рассуждений и преобразований рассуждений независимо от содержательного смысла. При возвращении к содержательной форме сохраняется истинный смысл исходного утверждения.

2) Возможность соединения в одном рассуждении высказываний из различных классов – событий, свойств и отношений.

Примеры.

1. *Если яблоко зеленое* (*A*)*, то оно кислое* (*B*) $= A\to B = \rceil A \vee B =$ *“яблоко не зеленое* ($\rceil A$) *или кислое* (*B*)*”*.

Здесь *A, B* разные свойства для одного класса и пример преобразования формулы, сохраняющей истинностный смысл рассуждения.

2. “*Если влажность высокая* (*A*)*, то после полудня* (*B*) *или (либо) вечером* (*C*) *будет дождь* ($B \oplus C$) “.

Высказывания *A, B, C* – события из разных классов*,* $A \to (B \oplus C)$.

3. “*Лечение не будет найдено* (*A*)*, пока не определены причины болезни* (*B*) *и не найдены новые лекарства* (*C*)*”*.

Высказывания *A, B, C* – события из разных классов, $\rceil B \& \rceil C \to \rceil A$.

4. “*Требуется (необходимы !) храбрость* (*A*) *и мастерство* (*B*), *чтобы подняться на эту гору* (*C*)*”*.

A, B – свойства, *C* – событие, $C\to A\&B$.

5. “*Для того, чтобы число было нечетным* (A)*, необходимо , чтобы число было простым* (B) *и не делилось на два* (C)”.

A, B, C – свойства чисел, $A \rightarrow B \& C$.

6. “*Если* (2<5) (A) *и* (5>10) (B), *то* (2≠10) (C)”.

A, B, C – отношения в классе чисел. $A \& \urcorner B \rightarrow C$.

1.3. Интерпретация логических формул

Определение.

Пусть задана формула $\Phi(A, B)$, где A, B – атомы. Подстановка конкретных высказываний (или просто их значений F или T) и вычисление истинности составного высказывания называется ***интерпретацией***.

Формулы разделяют на:

1) ***выполнимые*** – существует интерпретация, при которой формула истинна:

а) если формула Ф истинна в интерпретации I, то $\Phi(I)$ выполнима в I, а I называется ***моделью*** Ф;

б) если формула Ф ложна в I, то $\Phi(I)$ опровергается в I.

2) ***тавтологии*** (***общезначимые***) – формулы, истинные на всех наборах атомов;

3) ***противоречия*** – ложные формулы на всех наборах атомов.

Заменяя содержательные рассуждения формулами, получаем возможность проверить истинность утверждений в общем случае, когда смысл утверждений не очевиден и зависит от истинности простых высказываний.

При классификации формул решаются следующие задачи:

1) Проблема автоматической (алгоритмической) проверки формулы на **выполнимость** (Satisfability Automation Testing – **SAT**). Если формула не выполнима, то является противоречием.

2) Проблема **разрешимости** в логике – проверить, является ли формула **тавтологией** (общезначимой).

Обе задачи связаны с интерпретацией и вычислением значения формулы. Формулу $\Phi(A, B)$ называют **логической функцией**, если использовать логическую переменную $F = \Phi(A, B)$ как значение формулы для всевозможных интерпретаций.

Пример.

Требуется проверить правильность рассуждения – общезначимость формулы.

“Если я пойду завтра на первое занятие (a), то должен буду встать рано (b), а если я пойду вечером на танцы (c), то лягу спать поздно (d). Если я лягу поздно (d), а встану рано (b), то я должен буду довольствоваться пятью часами сна (e). Но я не в состоянии обойтись пятью часами сна ($\urcorner e$). Следовательно, я должен или пропустить первое занятие ($\urcorner a$), или не ходить на танцы ($\urcorner c$)”

$(a \to b)(c \to d) = (\neg a \vee b)(\neg c \vee d)$
$db \to e = \neg d \vee \neg b \vee e$
$\neg e$

1. $\neg a \vee b$ $\quad b$
2. $\neg c \vee d$ $\quad d$
3. $\neg d \vee \neg b \vee e$ $\quad \neg d \vee \neg b \vee e$ $\quad e$ $\quad$ противоречие, следовательно, заключение
4. $\neg e$ $\quad \neg e$ $\quad \neg e$ $\quad$ есть логическое следствие имеющихся
5. $\neg(\neg a \vee \neg c)$ $\quad ac$ $\quad$ посылок.

Пример.

Требуется определить набор значений простых высказываний, при котором рассуждение ложно и **уточнить рассуждение**, приводя его к тавтологии.

Проверим истинность следующего рассуждения.

Студент пойдет домой (a) или останется в институте (b), ($a \vee b$).

Студент решил остаться в институте (b), следовательно, он не пойдет домой, ($\neg a$).

Формула составного высказывания $((a \vee b)\&b) \to \neg a$.

Сокращенным способом выбираем значения атомов, опровергающих это утверждение: $\neg a = F$ при $((a \vee b)\&b) = T$. При $b = T$ выражение истинно.

Таким образом, исходная формула может быть ложной и рассуждение не верно.

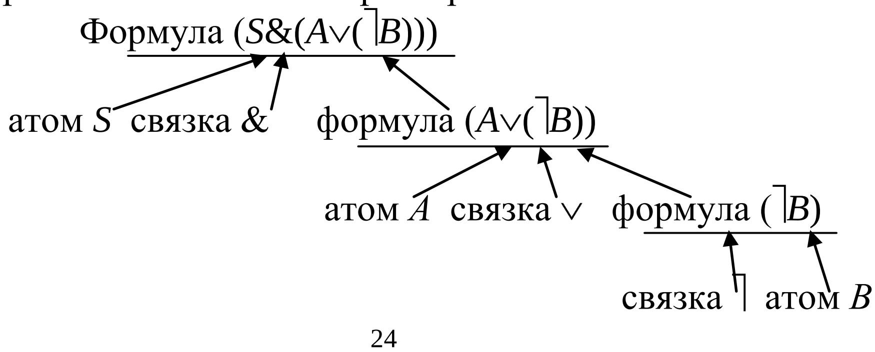
Действительно, “ошибка” в выборе связки ИЛИ. Должна быть связка ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ (a либо b), что можно было уточнить при записи формулы для первого высказывания. $((a \oplus b)\&b) \to \neg a$.

Инверсное составное высказывание $\neg\Phi$ является *противоречием* – на всех интерпретациях ложно, если Φ – тавтология.

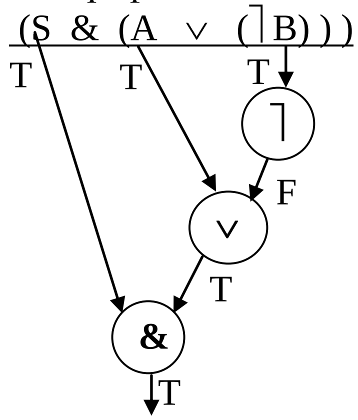
Если требуется доказать общезначимость формулы, то для инверсной формулы (**обратный метод**) проверяется выполнимость (применение обратного метода решения с использованием SAT-алгоритмов).

Значение формулы (логической функции) может быть определено (вычислено) с применением таблиц истинности для связок в порядке, заданном скобками, графом вычисления [6], графом синтаксического разбора Wff-формулы [11,13].

Для логической формулы $F=(S\&(A \vee (\neg B)))$ может быть построено следующее дерево синтаксического разбора



Вычисление истинности при интерпретации выполняется в обратном порядке и представлено графом вычислений



Не трудно составить программу вычисления на языке СИ по этой схеме:

***F*=((!*B*)||*A*)&&*S*,**

F, B, A, S **-** булевы переменные, принимающие значения из **{*T, F*}.**

Если в формуле N атомов, то таблица истинности содержит 2^N условий (наборов значений) истинности атомов.

Таким образом, в общем случае, когда формула противоречива, для решения SAT-проблемы и проверки общезначимости требуется перебор из 2^N интерпретаций.

Пример.

Составить таблицу истинности для формулы $(\neg A \vee B) \to C$.

A	B	C	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$\neg A \vee B \to C$
F	*F*	*F*	*T*	*T*	*F*
F	*F*	*T*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*T*	*T*	*T*	*T*
T	*F*	*F*	*F*	*F*	*T*
T	*F*	*T*	*F*	*F*	*F*
T	*T*	*F*	*F*	*T*	*F*
T	*T*	*T*	*F*	*T*	*T*

1.4. Принцип подстановки

Утверждение 1.1.

Если формула $\Phi(A)$ – тавтология и формула $\Phi(B)=\Phi(A/B)$ получена из $\Phi(A)$ при *подстановке* формулы B вместо любого вхождения символа A в $\Phi(A)$ (обозначим A/B), то формула $\Phi(B)= \Phi(A/B)$ - тоже тавтология.

Доказательство - всякая подстановка A/B эквивалента подстановке значений истинности в тавтологию, но любая интерпретация тавтологии истинна, истинным остается и $\Phi(B)$, следовательно, $\Phi(B)$ тавтология.

Следствие. Если $\Phi(A)$ тавтология, то $\Phi(A/\neg A) = \Phi(\neg A)$ тавтология.

Пример.

Доказать, что формула $\Phi(A, B) = A\to(B \vee A)$ тавтология.

Подстановка $A = C \vee P\&B$.

Формула $\Phi(A, B) = \Phi(A/(C \vee P\&B), B) = (C \vee P\&B)\to B \vee (C \vee P\&B)$ тавтология.

Сделаем подстановку $\Phi(A, B) = \Phi(A/\rceil A, B/\rceil B\ ) = \rceil A\to(\rceil B \vee\rceil A\ )$, полученная формула тоже тавтология.

Определение.

Две формулы $A(x_1, ..., x_n)$ и $B(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ – атомы, называются *равносильными* (тождественно равными), если при любых интерпретациях значения истинности совпадают. В этом случае записывается *тождество*

$$A(x_1, \ldots, x_n) \equiv B(x_1, \ldots, x_n).$$

Лемма.

Формулы $A(x_1, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, \ldots, x_n)$ тождественно равны ($A=B$), если $A{\sim}B$ – тавтология.

Доказательство следует из определения связки эквивалентности, если при всех интерпретациях формула $A{\sim}B$ истинна.

Например, закон контрапозиции $(p\to q){\sim}(\rceil q\to\rceil p)$ может быть записан в виде тождества $(p\to q) \equiv (\rceil q\to\rceil p)$.

Следствие. Тождество сохраняется при произвольных перестановках аргументов.

Например, закон контрапозиции $(q\to p) \equiv (\rceil p\to\rceil q)$ сохраняется при подстановках $(q/p, p/q)$.

Утверждение 1.2. (Принцип подстановки).

Пусть $\Phi(A)$ – формула, в которой выделена формула A и в результате замены формулы A на формулу $B(A/B)$ получим формулу $\Phi(B)$, тогда:

$$\Phi(A) = \Phi(B),\ \text{если}\ A = B.$$

Доказательство. При любой интерпретации I формула $\Phi(I)$ принимает значение T или F тогда и только тогда, когда $B(I)$ равно T или F в силу тождества $A = B$ или $A(I) = B(I)$. Следовательно, в любой интерпретации вместо формулы A можно подставить формулу B и значения истинности формул $\Phi(A)$ и $\Phi(B)$ совпадают или $\Phi(A) = \Phi(B)$.

1.5. Алгебра логики высказываний

Утверждения в виде тождеств относятся к законам логики. Применение тождественных подстановок относятся к алгебраическим формальным преобразованиям.

Заменим в тождествах заглавные буквы, обозначающие атомы, прописными, обозначающими элементы алгебры. Связки являются алгебраическими операциями – логические сложение ($\vee$) и умножение ($\&$).

1.5.1. Законы логики высказываний

1) ***Законы коммутативности*** - перестановка формул в симметричных связках &, $\vee$

$a\&b = b\&a;$

$a \vee b = b \vee a.$

2) ***Законы ассоциативности*** - порядок применения бинарных связок и расстановка скобок

$a\&(b\&c) = (a\&b)\&c;$

$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c.$

3) ***Идемпотентность*** – тождественное исключение эквивалентных формул в бинарных связках &, $\vee$

$a \vee a = a;$

$a\&a = a.$

4) ***Дистрибутивность*** - распределительный закон для бинарных связок &, $\vee$

$a\&(b \vee c) = (a\&b) \vee (a\&c);$

$a \vee (b\&c) = (a \vee b)\&(a \vee c).$

5) ***Законы поглощения***

$a\&(a \vee b) = a;$

$a \vee (a\&b) = a.$

1.5.2. Булева алгебра высказываний

Алгебра логики (булева алгебра) определена на множестве высказываний $S=\{A, B, \ldots\}$.

Алгебраические операции &, $\vee$ удовлетворяют законам 1 - 5. Множество S замкнуто относительно применяемых к высказываниям логических операций.

Булева алгебра высказываний – метод вычисления значений составных высказываний, определяемых формулами высказываний [5].

Дополним множество высказываний S двумя константами: T=1 и F=0. На множестве S справедливы законы нуля и единицы, что следует из таблиц истинности для бинарных связок &, $\vee$**:**

6) ***Законы нуля и единицы***

$0 \vee a = a;$ $\quad$ $1 \vee a = 1;$

$0\&a = 0;$ $\quad$ $1\&a = a.$

Для произвольного высказывания a и инверсии $\rceil a$, которая, по определению связки НЕ, обозначает единственное высказывание в S для каждого a, выполняются следующие тождества:

7) ***Законы дополнительного элемента***

$a \vee \rceil a = 1;$ $\quad$ $a\&\rceil a = 0.$

При этом также выполняются следующие законы, которые определяют свойства операции инверсии в алгебре логики:

8) ***<u>Закон двойного отрицания</u>***

$\rceil(\rceil a) = a$.

9) ***<u>Законы двойственности</u>*** (правила де Моргана) – приведение инверсии к атомам

$\rceil(a \vee b) = \rceil a \& \rceil b$;

$\rceil(a \& b) = \rceil a \vee \rceil b$.

10) ***<u>Замена импликации бинарными связками &, ∨</u>***

$a \rightarrow b = \rceil a \vee b$.

11) ***<u>Замена эквивалентности</u>***

$a \sim b = (a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (\rceil a \vee b)(\rceil b \vee a)$.

12) ***<u>Замена исключающего ИЛИ</u>***

$a \oplus b = \rceil(a \sim b) = \rceil(a \rightarrow b)(b \rightarrow a) = (a \rceil b) \vee (\rceil a\ b)$.

13) ***<u>Законы сокращения</u>*** – применяются для упрощения формул

$a \vee (\rceil a \& b) = a \vee b$;

$a \& (\rceil a \vee b) = a \& b$.

14) ***<u>Правило склеивания</u>*** – применяется для упрощения формул

$(a \& b) \vee (\rceil a \& b) = b$.

Законы алгебры логики позволяют применять систематические алгебраические методы преобразования формул логики, которые сводятся к тождественным подстановкам в соответствии с тождествами (1-14).

Атомы в формулах являются булевыми переменными и могут принимать значения {0,1}. Логические связки могут быть заменены знаками (& - логическое умножение ( ), операция отрицания $\rceil a$ обозначается инверсией переменной $\overline{a}$).

Пример замены формулы в логике высказываний $(\rceil A \vee B \vee C) \& B$ формулой в булевой алгебре $(\overline{a} \vee b \vee c)\, b$.

Булеву алгебру можно использовать для проверки тождеств, тавтологий, в преобразованиях, упрощающих рассуждения. При этом связки, не относящиеся к алгебре (→, ~, ⊕), заменяются через соответствующие тождества (формулами с алгебраическими операциями (&, ∨, ⌉)).

Формулу $\Phi(x_1, .., x_n)$ в булевой алгебре можно рассматривать как **булеву функцию** $P = \Phi(x_1, .., x_n)$ и отображение $(x_1 ,.., x_n) \rightarrow P$ двоичного вектора на множество $P=\{0,1\}$.

1.6.3. Применение булевой алгебры для проверки тождеств

Можно выделить основные законы (аксиомы) булевой алгебры и законы, которые могут быть доказаны с применением аксиом. К основным законам относят (1-4, 6,7) [8].

Доказательство законов сокращения

1) $\boldsymbol{a \vee (\urcorner a \& b) = a \vee b}$

$a \vee (\urcorner a \& b) = (a \vee \urcorner a) \& (a \vee b) =$ применение дистрибутивного закона

$= 1 \& (a \vee b) =$ применение закона дополнения

$= a \vee b.$ применение закона единичного элемента.

2) $a \& (\urcorner a \vee b) = a \& b$

$a \& (\urcorner a \vee b) = (a \& \urcorner a) \vee a \& b =$ применение дистрибутивного закона

$= 0 \vee a \& b =$ применение закона дополнительного элемента

$= a \& b.$ применение закона нулевого элемента

Доказательство правил де Моргана

1) $\boldsymbol{\urcorner (a \vee b) = \urcorner a \& \urcorner b.}$

Рассмотрим формулу $a \vee b \vee \urcorner a \& \urcorner b =$ дистрибутивный закон

$= (a \vee b \vee \urcorner a) \& (a \vee b \vee \urcorner b) = 1$ закон дополнительного элемента

Рассмотрим формулу $(a \vee b) \& \urcorner a \& \urcorner b =$ дистрибутивный закон

$= a \& \urcorner a \& \urcorner b \vee \urcorner a \& b \& \urcorner b) = 0.$ закон дополнительного элемента

Таким образом, получены тождества:

$$\begin{cases} a \vee b \vee \bar{a} \& \bar{b} = 1 \\ (a \vee b) \& \bar{a} \& \bar{b} = 0, \end{cases}$$

но согласно законам дополнительного элемента

$c \vee \urcorner c = 1;$

$c \& \urcorner c = 0,$

пусть $c = a \vee b$, тогда, из полученных тождеств, следует, что

$\urcorner c = \urcorner (a \vee b) = \urcorner a \& \urcorner b$, что и требовалось доказать.

2) $\boldsymbol{\urcorner (a \& b) = \urcorner a \vee \urcorner b.}$

Рассмотрим формулу $a \& b \vee (\urcorner a \vee \urcorner b) =$ дистрибутивный закон

$= (a \vee \urcorner a \vee \urcorner b) \& (b \vee \urcorner a \vee \urcorner b) = 1$ закон дополнительного элемента

Рассмотрим формулу $(a \& b) \& (\urcorner a \vee \urcorner b) =$ дистрибутивный закон

$= a \& \urcorner a \& b \vee a \& \urcorner a \& \urcorner b = 0.$ закон дополнительного элемента

Таким образом, получены тождества:

$$\begin{cases} a \& b \vee (\bar{a} \vee \bar{b}) = 1 \\ (a \& b) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) = 0, \end{cases}$$

но согласно тем же законам дополнительного элемента

$c \vee \urcorner c = 1;$

$c \& \urcorner c = 0,$

пусть $c = a \& b$, тогда, из полученных тождеств, следует, что

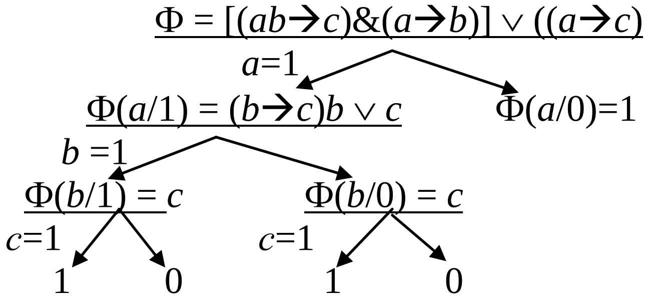
$\urcorner c = \urcorner (a \& b) = \urcorner a \vee \urcorner b$, что и требовалось доказать.

1.6.4. Применение алгебры для вычислений – метод Квайна

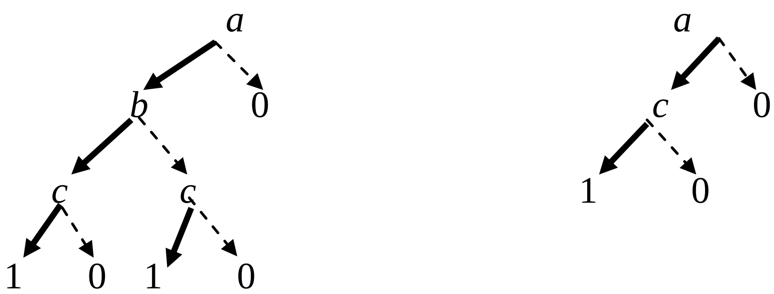
Метод Квайна заключается в следующем: последовательно подставляются значения истинности в формулу для аргументов и вычисляются значения истинности, или выполняются алгебраические преобразования формул до тех пор, пока не получим конечные значения *T* или *F*.

Алгоритм вычислений строится в виде бинарного дерева (двоичной диаграммы) – концевые вершины обозначают все возможные значения формулы.

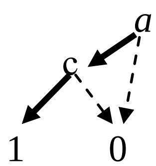
Пример.



Двоичная диаграмма, построенная методом Квайна, может быть использована для вычислений при заданных наборах значений переменных.



Двоичная бинарная диаграмма - **Binary Decision Diagram (BDD)** может быть получена сверткой бинарного дерева относительно значений истинности

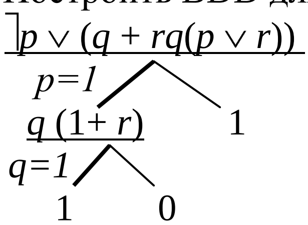


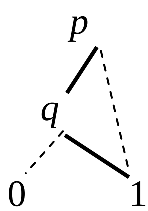

```
if (a)
  if (c)   Φ=1;
     else     Φ=0;
 else   Φ=0.
```

В большинстве компьютеров не поддерживаются битовые переменные (за исключением MCS51 фирмы Intel и C166 фирмы Siemens). В стандартном СИ также отсутствует битовый тип данных, при вычислениях используются условные операторы. Оптимальная формула может быть выбрана на основе BDD.

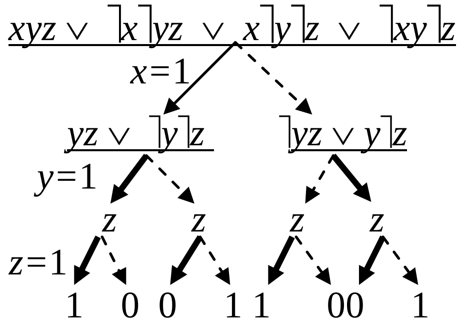
В [9] приводится алгоритм построения BDD по диаграмме Квайна.

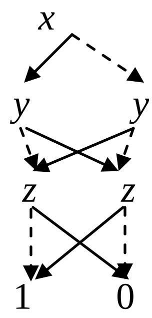
Пример. Построить BDD для формулы





Пример. Построить BDD для функции суммирования





1.5.5. Применение алгебры для доказательства общезначимости

Утверждение 1.3.

Если в результате тождественных алгебраических преобразований формула $\Phi(a, b, ...)$ тождественно равна единице, то формула Ф - тавтология (*прямой метод доказательства*).

Утверждение 1.4.

Если в результате тождественных алгебраических преобразований формула $\neg\Phi(a, b, ...)$ тождественно равна нулю, то формула Ф – тавтология (*обратный метод доказательства*).

Пример - применение прямого метода.

Требуется проверить общезначимость формулы транзитивности

$((p\to r)\&(r\to q))\to(p\to q) = \neg(p\to r) \vee \neg(r\to q)) \vee (p\to q) =$

$= p\neg r \vee r\neg q \vee \neg p \vee q = \neg r \vee r = 1.$

Пример - применение обратного метода.

$\neg(((p\to r)\&(r\to q))\to(p\to q)) = (p\to r)\&(r\to q))\&\neg(p\to q) =$

$= (\neg p\vee r)\&(\neg r\vee q))\&p\&\neg q = q\&\neg q\&p = 0.$

Т.е. $\neg\Phi=0$, значит формула Ф – тавтология.

1.5.6. Нормальные формулы

Определение.

Литера – атом или его отрицание.

Определение.

Формула Ф представлена в *конъюнктивной нормальной форме* (КНФ)

$$\Phi = F_1\&F_2\&\ldots\&F_k,$$

если F_i – дизъюнкция литер – *дизъюнктор* (дизъюнктивный терм).

Пример КНФ.

$$\Phi = (a \vee b)\&(a \vee b \vee \neg c).$$

Определение.

Формула Ф представлена в *дизъюнктивной нормальной форме* (ДНФ)

$$\Phi = F_1 \vee F_2 \vee F_k,$$

если F_i– конъюнкция литер – *конъюнктор* (конъюнктивный терм).

Пример ДНФ.

$$\Phi = (a\&b) \vee (\rceil a\&b\&c).$$

Утверждение 1.5.

Любая Wff - формула алгебраическими преобразованиями может быть приведена к ДНФ или КНФ с использованием следующих правил:

1) заменить все связки $\rightarrow$, ~ формулами, содержащими $\rceil$, $\vee$, &; (законы 8, 9)
2) применяя правило де Моргана, привести все инверсии термов к переменным;
3) применением дистрибутивных законов преобразовать формулу к ДНФ или КНФ.
4) Применить законы нулевого и единичного элемента.

Пример.

Преобразовать формулу $(a\rightarrow(b\rightarrow \underline{c}\ ))\rightarrow \rceil b$ в нормальную форму.

Правило 1. $(a \rightarrow (\rceil b \vee c\ )) \rightarrow \rceil b;$

правило 1. $(\rceil a \vee (\rceil b \vee c)) \rightarrow \rceil b;$

правило 1. $\rceil(\rceil a \vee \rceil b \vee c) \vee \rceil b;$

правило 2. $(a\ b \rceil c\ ) \vee \rceil b;$

получена ДНФ $a\ b \rceil c\ \vee \rceil b.$

Преобразование ДНФ в КНФ и обратно выполняется с использованием дистрибутивных законов, законов дополнительного элемента и закона единицы.

Пример.

Преобразовать ДНФ в КНФ.

$a\ \ b \rceil c\ \vee \rceil b\ =$	дистрибутивный закон
$= (a\ \ b \vee \rceil b)\ (\rceil c\ \vee \rceil b) =$	дистрибутивный закон
$= (a\ \vee \rceil b)\ (b\ \vee \rceil b)\ (\rceil c\ \vee \rceil b) =$	закон дополнительного элемента
$= (a\ \vee \rceil b)\&1\&(\rceil c\ \vee \rceil b) =$	закон единицы
$=(a\ \vee \rceil b)(\rceil c\ \vee \rceil b).$	КНФ

1.5.7. SAT-проблема (прямой метод)

Преобразование формулы в ДНФ позволяет получить конъюнктивные термы, соответствующие выполнимым интерпретациям (наборам).

Проверка общезначимости формул (обратный метод)

Преобразование инверсии формулы $\rceil\Phi$ в ДНФ позволяет опровергнуть общезначимость Ф обратным методом. ДНФ состоит из конъюнктивных термов, определяющих выполнимые интерпретации.

Пример.

Проверить общезначимость следующей формулы

$$\Phi = (ab \vee \rceil c)(a \rceil b \vee \rceil ac).$$

Инверсия этой формулы в алгебраической форме

$\neg Ф = \neg((ab \vee \neg c)(a\neg b \vee \neg ac)) = \neg(ab)\, c \vee \neg(a\neg b)\neg(\neg ac) =$
$= (\neg a \vee \neg b)c \;\vee\; (\neg a \;\vee\; b)(a \vee \neg c) = \neg ac \vee \neg bc \;\vee\; \neg aa \vee\; ba \vee \neg a\neg c \vee b\neg c.$

Не выполняя дальнейших преобразований, можно использовать любой из термов для выбора интерпретации, в которой формула $\neg Ф$ выполнима, а Ф не выполнима, например, для $\neg ac=1$ значения $a=0$ и $c=1$. Следовательно, формула Ф не общезначима.

1.5.8. Приложения булевой алгебры в технике

В технических **приложениях** логические формулы высказываний используются для описания **алгоритмов управления.** Инженерные рассуждения должны быть правильными по смыслу, а системы должны быть правильно построенными на основе этих рассуждений.

Проверка правильности рассуждений - задача анализа, в которой сопоставляются (тестируются) условия работоспособности с заданными рассуждениями-спецификациями.

Построение правильных формул связано как с выполнением требований к Wff-формулам, так и с особенностями реализации вычислений формул (программы, схемы в различных элементных базисах).

В технике формула представлена булевой функцией (тождеством) Q = Ф(X), в левой части которой символ Q обозначает значение функции $\{T,F\}$, Ф-формула и X-множество входных и контрольных булевых переменных.

События двузначны по смыслу ={есть, нет} и задачи логического управления предполагают контроль одних событий и управление другими событиями. Формула представляется уравнением, а алгоритм управления сводится к вычислениям по формулам.

Пример. Работа пресса**.**

Включить двигатель D плунжера P, если аварийные кнопки S_1, S_2, S_3 – выключены, контакт X – замкнут в верхнем положении и нажата кнопка *Пуск,* или контакт Y – разомкнут в нижнем положении и P плунжер двигается вниз.

Событие активное (есть, включено, движение, нажатие, замыкание, ...) обозначается как прямое – *x*. Если смысл события инверсный, то $\neg$**x.**

Тогда рассуждение выглядит так:

Двигатель D включается **тогда и только тогда, когда**

S_1, S_2, S_3 **НЕ** включены **И** (включен *Пуск* **И** замкнут X **ИЛИ** контакт Y – **НЕ** замкнут в нижнем положении **И** плунжер P двигается вниз.)

$$D= (\neg S_1 \& \neg S_2 \& \neg S_3)\&(П\&X \vee \neg Y\&P).$$

Клод Шеннон в **1935** г. предложил применять логику для описания и синтеза релейно-контактных схем, используемых в то время для управления работой объектов [10].

Состояние объекта и условия работы задаются логическими переменными и отождествляются с состоянием контакта или переключателя (например, истина – замкнуты или включены контакты, ложь – разомкнуты или выключены). Нормальное состояние связывают с состоянием активного элемента – контактами управляет реле. Переключатели механически замыкаются или размыкаются при движении объекта или вручную на пульте управления. Если активный элемент A вызывает замыкание группы контактов или переключателей, то их нормальное состояние разомкнутое (ложное) и объединяется общим именем A. Соответственно, если контакты размыкаются, то их нормальное состояние замкнуто и обозначается инверсией $\rceil A$.

Контактная схема замыкания цепи управления двигателем D с активными элементами S_1, S_2, S_3, $П$ и датчиками X, Y, P приведена на рис. 1.1.

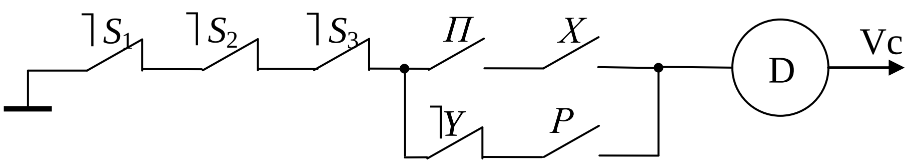


Рис.1.1. Схема управления двигателем

Последовательное соединение контактов обозначается ($\rceil S_1 \& \rceil S_2 \& \rceil S_3$), параллельное соединение – схема ($П \& X \vee \rceil Y \& P$).

В системе автоматического управления циклически решается одна и та же задача – контролируется состояние системы (чтение датчиков состояния), **вычисляется** логическое управление по формуле, задающей алгоритм управления. Значение события – включение или выключение исполнительного устройства D. Графический Язык релейно-контактных схем сохраняет свою актуальность в стандарте IEC1131 при программировании логического управления в системах SCADA [11].

Технические приложения рассматриваются в курсе Дискретной математики и в разделах проектирования систем логического управления [12].

Основной целью рассматриваемых далее разделов логики является обоснование принципов логического вывода, применяемых в обобщенном виде в разделах Логики предикатов и ее приложениях к искусственному интеллекту и базам знаний.

1.3. Метод Девиса - Патнема (DP)

1.6.1. Решение SAT-проблемы

КНФ рассматривается как множество дизъюнктов $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$.

Алгоритм SAT включает формальные шаги в виде правил преобразования множества S:

1) ***Правило однолитерных дизъюнктов***:

а) Если присутствуют однолитерные дизъюнкты L и дизъюнкты $L \vee A$, то дизъюнкты $L \vee A$ исключаются по закону поглощения

$$L\&(L \vee A) = L;$$

б) Найдем для каждого однолитерного дизъюнкта L дизъюнкт, который содержит $\neg L$, тогда в дизъюнктах можно исключить $\neg L$ по закону сокращения

$$L\&(\neg L \vee A) = L\&A;$$

в) после преобразования дизъюнктов вычеркивается однолитерный дизъюнкт L, так как S выполнимо при L=1 и оставшееся множество дизъюнктов не зависит от L.

2) ***Правило чистых литер*****:**

Литера L – *чистая*, если во множестве дизъюнктов S не существует ни одного дизъюнкта с отрицанием ($\neg L$)

$$(L \vee s_1)\&(L \vee s_2)\& \ldots \&(L \vee s_n) = (L \vee s_1\&s_2\&\ldots\&s_n).$$

Вычеркиваются все дизъюнкты, содержащие L, так как S выполнимо при L=1, а оставшееся множество дизъюнктов не зависит от L.

3) ***Если правила* 1) *и* 2) *не применимы***, то можно выбрать для одной из оставшихся литер значение 0 и 1, применить метод Квайна, а затем проверить выполнение правил 1) и 2).

4) ***Повторить правила* 1) - 3)**, пока не будут получены пустая формула или противоречивые дизъюнкты на шаге 1а. Пустая формула обозначает, что при исключении литер $L_1L_2...L_m$=11...1 найдена интерпретация, в которой **Ф выполнима**.

Пример.

Проверить выполнимость формулы

$\Phi = (p \vee \neg q)(\neg p \vee q)(q \vee t)(\neg q \vee \neg t)$.

Правила Девиса - Патнема не применимы, поэтому на первом шаге используем метод Квайна

$\underline{(p \vee \neg q)(\neg p \vee q)(q \vee t)(\neg q \vee \neg t)}$

$p=1$

$\underline{q(q \vee t)(\neg q \vee \neg t)}$ $\underline{\neg q(q \vee t)(\neg q \vee \neg t)}$

$q=1$ правило однолитерных дизъюнктов

$\underline{\neg t}$

$t=0$ правило чистой литеры и Ф выполнима при $pq\neg t$

$\square$ Получена пустая формула и выбрана интерпретация pqt=110, при которой формула Ф выполнима. Другие интерпретации можно найти по правой ветви дерева при p=0, например, при pqt=001.

1.6.2. Проверка формулы на общезначимость

Метод DP применим для проверки формулы на общезначимость обратным методом. Для опровержения достаточно найти хотя бы одну выполнимую интерпретацию SAT-алгоритмом для инверсной формулы $\neg\Phi$ в КНФ.

В этом случае формула $\neg\Phi$ выполнима и Φ не общезначима.

Если на шаге 1а останутся инверсные однолитерные дизъюнкты L и $\neg L$, то $\neg\Phi$ противоречие и Φ общезначима.

Пример.

Проверить общезначимость закона транзитивности импликации

$\Phi = (((p\to r)(r\to q)) \to (p\to q) =$

$= \neg(p\to r) \vee \neg(r\to q)) \vee (p\to q)$ исключение импликации

$\neg\Phi = (p\to r)(r\to q))\neg(p\to q) =$ инверсия Φ

$= (\neg p \vee r)(\neg r \vee q)p\neg q$ исключение всех импликаций

$$\begin{array}{lllllll} \neg p \vee r & \boldsymbol{p}\mathbf{=1} & r & & \boldsymbol{r}\mathbf{=1} & q & \\ \neg r \vee q & \to & \neg r \vee q & & \to & \neg q & \square \\ p & & \neg q & & & & \\ \neg q & & & & & & \end{array}$$

применяя правило 1 для p и r, получим противоречие $q\&\neg q=0$, следовательно, $\boldsymbol{\neg\Phi}$ противоречие и $\boldsymbol{\Phi}$ общезначима.

Пример.

Проверить общезначимость формулы

$\Phi = (p \vee q) \& (p \vee \neg q) \& (r \vee q) \to (\neg r \& q)$.

$\neg\Phi = (p \vee q) \& (p \vee \neg q) \& (r \vee q) \& \neg(\neg r \& q)$

$$\begin{array}{lllll} p \vee q & & & & \\ p \vee \neg q & \boldsymbol{p}\mathbf{=1} & & & \\ r \vee q & \to & r \vee q & \boldsymbol{r}\mathbf{=1} & \\ r \vee \neg q & & r \vee \neg q & \to & \square \end{array}$$

$\neg\Phi$ выполнима при $p=1$ и $r=1$, следовательно, Φ не общезначима.

1.7. Применение тавтологий в рассуждениях

Схемы рассуждений должны быть логически правильно построены, только тогда выводы могут быть признаны истинными.

Тавтологии являются формальными **схемами правильных рассуждений** и стратегией доказательства в математике (например, теоремы элементарной геометрии).

Рассуждения строятся в виде цепочки **общезначимых схем** рассуждений.

Доказательства общезначимости схем формируются алгебраически или DP-методом.

Некоторые простые схемы (правила) рассуждений:

1) Правило отделения

$\boldsymbol{p(p\to q) \to q}$.

“Если условие p истинно и доказано, что из p всегда следует q, то следствие q истинно.”

$$(p(p\to q)) \to q = \neg(pq) \vee q = \neg p \vee q \vee \neg q = 1.$$

Очевидным обобщением правила является правило **modus ponens** (**MP**, лат. правило вывода), где p, $p\to q$ и q-тавтологии**.**

Также и все остальные правила применимы к тавтологиям.

2) Правило Евклида

$$\boldsymbol{(\neg p \to p) \to p.}$$

“Если из предположения, что p ложно следует, что p истинно, то p истинно”.

$$(\neg p \to p) \to p = \neg p \vee p = 1.$$

3) Правило доказательства разбором случаев

$$\boldsymbol{(p \vee q)(p \to r)(q \to r) \to r.}$$

“Доказывается утверждение r, выбираются по крайней мере два условия p и q (одно или оба истинные), для которых может быть доказано $(p\to r)\&(q\to r)$ тогда r истинное утверждение.”

$$\neg\Phi = (p \vee q)(p \to r)(q \to r)\,\neg r$$

$$\begin{array}{llllll}
(p \vee q) & & (p \vee q) & & q & \\
(p \to r) = (\neg p \vee r) & r=0 & \neg p & p=0 & & \square \\
(q \to r) = (\neg q \vee r) & \to & \neg q & \to & \neg q & \\
\neg r & & & & &
\end{array}$$

противоречие и Φ общезначима.

4) Правило контрапозиции (доказательство от противного)

$$\boldsymbol{(p \to q) = (\neg q \to \neg p)}$$

“$(p \to q)$ истинно тогда, когда истинно $(\neg q \to \neg p)$.

Требуется доказать, что из истинности утверждения p следует истинность утверждения q. При этом существует содержательный или конструктивный метод доказательства тождественного утверждения $(\neg q\to\neg p)$. Следовательно, приходим к противоречию с условием p.

Если $\boldsymbol{((p \to q) \sim (\neg q \to \neg p))}$ тавтология, то

$\Phi = \boldsymbol{((p \to q) \to (\neg q \to \neg p))((p \to q) \leftarrow (\neg q \to \neg p))}$ тоже тавтология.

$$\Phi = (p\neg q \vee q \vee \neg p)(p\neg q \vee q \vee \neg p) = 1.$$

5) Правило косвенного доказательства

$$\boldsymbol{(\neg p \to q)(\neg p \to \neg q) \to p.}$$

q, $\neg q$ – противоречие, следовательно, p – истина.

“Доказывается утверждение p. Для этого выбирается некоторое утверждение q, для которого можно доказать, что из p следует как q, так и ($\rceil q$). Тогда для $\rceil p$ приходим к противоречию $q \& \rceil q$ и утверждение p доказано (истинно).”

$$(\rceil p \to q)(\rceil p \to \rceil q) \to p = (p \lor q)(p \lor \rceil q) \to p = p \to p = 1.$$

6) Правило доказательства эквивалентностью

$$\boldsymbol{(a \sim b) = ((a \to b)(b \to a)).}$$

“Для доказательства эквивалентности двух утверждений a и b в математике доказываются необходимость и достаточность для одного из утверждений (($b \to a$) = (a необходимо для b) и ($a \to b$) = = (a достаточно для b)). Левая и правая части тождества истинны и ложны при одинаковых интерпретациях”

Это тождество использовалось при определении связки эквивалентности.

7) Правило доказательства цепочкой импликаций (**свойство транзитивности импликации – силлогизм –** умозаключение, в котором из двух суждений – посылок получается третье – вывод)

$$\boldsymbol{(p \to r)(r \to q) \to (p \to q).}$$

“Требуется доказать, что ($p \to q$). Выбирается промежуточное утверждение r и последовательно доказывается ($p \to r$), далее ($r \to q$). Затем делается вывод ($p \to q$).”

$$(p \to r)(r \to q) \to (p \to q) = p\rceil r \lor r\rceil q \lor \rceil p \lor q = 1.$$

1.8. Аксиоматическая теория высказываний

1.8.1. Схемы аксиом

Множество высказываний составляет предметную область знаний. Меньшая часть этих высказываний (правил) считается истинной или доказуемой.

В математической теории доказуемые высказывания называются ***теоремами***. Теоремы выводятся из некоторых фиксированных истинных высказываний (тавтологий), которые называются ***аксиомами.*** Подобные математические теории называют аксиоматическими.

В математической логике минимальное множество первичных аксиом, из которых следуют все тавтологии, называют ***схемами аксиом.*** Логика высказываний является аксиоматической теорией ***исчисления высказываний***. Теоремами этой теории являются тавтологии.

Известны различные схемы аксиом [13, 14], например, схемы аксиом **Гильберта** и **Аккермана**:

A1) $A \lor A \to A$;

A2) $A \to (A \lor B)$;

A3) $(A \lor B) \to (B \lor A)$;

A4) $(A \to B) \to (C \lor A \to C \lor B)$.

Можно подставлять вместо символов любые формулы и в соответствии с утверждением 2 формулы остаются тавтологиями. Доказывается [5, 13], что все тавтологии могут быть получены из этой схемы аксиом с использованием **подстановок** и одного **правила отделения МР** из множества схем правильных рассуждений.

Определение.

Формальное доказательство (схема вывода) – последовательность формул, каждая из которых:

- аксиома;
- получена подстановкой формул в аксиому;
- результат применения правила МР.

Все формулы в последовательности – тавтологии и последняя формула в этой последовательности - логическое следствие или **теорема.**

Из схемы аксиом выводятся только тавтологии, которые обозначаются

$$\mapsto \text{B}$$

Вывод - доказательство теорем – нетривиальная задача, требующая изобретательности и интуиции.

Вывод - альтернатива алгебраическому доказательству и доказано, что он всегда существует.

Пример вывода:

Доказать $\mapsto (A \vee \rceil A.)$, используя **вывод** из аксиом.

1) $A \vee A \to A$; (А1)
2) $((A \vee A) \to A) \to (\rceil A \vee (A \vee A) \to \rceil A \vee A)$; (из А4: $C/\rceil A$, $A/(A \vee A)$, B/A)
3) $\rceil A \vee (A \vee A) \to \rceil A \vee A$; (МР: (1, 2)→3)
4) $(A \to (A \vee A)) \to (A \to A)$; (тождественная замена дизъюнкции импликацией)
5) $A \to A \vee A$; (А2: B/A)
6) $A \to A$; (МР: (4, 5)→6)
7) $\rceil A \vee A$; (замена импликации на дизъюнкцию)
8) $\rceil A \vee A \to A \vee \rceil A$; (А3: B/A, $A/\rceil A$)
9) $A \vee \rceil A$. (МР: (7, 8)→9)

Теорема доказана.

Для облегчения задачи в исчислении высказываний используются и другие правила вывода, а также тождественные подстановки.

1.8.2. Правила преобразования тавтологий

1) Удаление конъюнкции (УК, Simplification)

“Если $p\&q$ тавтология, то, по определению конъюнкции и импликации, p, q - тавтологии”

$$\frac{p\&q}{p,\ q.}$$

Если формула $p\&q$ тавтология, то $p\&q=1$ и, по определению конъюнкции, $p=q=1$.

2) Введение конъюнкции (ВК, Cojunctions)

"Если p и q тавтологии, то, по определению_конъюнкции, $p\&q$ тавтология"

$$\frac{p,\ q}{p\&q.}$$

При доказательстве используются обратные рассуждения для предыдущего правила.

3) Введение дизъюнкции (ВД, Addition)

«Если p - тавтология, то $p \vee q$ –тавтология»

$$\frac{p}{p \vee q.}$$

Если формула $p=1$, то справедливы тождества $p \vee q = 1 \vee q = 1$.

4) Удаление дизъюнкции (УД, Disjunction Syllogism)

"Если $p \vee q$ тавтология и p противоречие, то q тавтология"

$$\frac{p \vee q,\ \rceil p}{q.}$$

Тавтологии $p \vee q=1$, $\rceil p=1$, противоречие $p=0$, $p \vee q=0 \vee q=1$, $q=1$.

5) Дизъюнктивное расширение (ДР)

"Если $p \rightarrow q$ тавтология, то при добавлении к условию p и следствию q любого высказывания получим тавтологию"

$$\frac{p \rightarrow q}{p \vee b \rightarrow q \vee b.}$$

Тавтология $p \rightarrow q = \rceil p \vee q = 1$,

тождества $\rceil p \vee q = \rceil p \vee q \vee b = (\rceil p \rceil b) \vee (q \vee b) = (p \vee b) \rightarrow (q \vee b) = 1$.

6) Транзитивность импликации (ТИ, Hipotez Syllogism)

«Если $(p \rightarrow r)$ и $(r \rightarrow q)$ тавтологии, то по закону транзитивности $(p \rightarrow \mathrm{q})$ тавтология»

$$\frac{p \rightarrow r,\ r \rightarrow q}{p \rightarrow q.}$$

7) Конструктивная Дилемма (CD)

$$\frac{a \vee b,\ a \rightarrow c,\ b \rightarrow d}{c \vee d.}$$

Тавтологии $(a \vee b)\ (b \rightarrow d) = (\rceil a \rightarrow b)\ (b \rightarrow d) = (\rceil a \rightarrow d) = 1$ (6-правило)

$(\rceil a \rightarrow d) = (\rceil d \rightarrow a)(a \rightarrow c) = (\rceil d \rightarrow c) = (d \vee c) = 1$ (6-правило)

$(c \vee d)$ тавтология.

1.8.3. Утверждение о полноте теории высказываний

Если формула A – тавтология, то она является теоремой исчисления высказываний.

1.8.4. Утверждение о непротиворечивости

Не существует формулы A такой, что A и $\rceil A$ являются теоремами.

Следствие. Существуют формулы, которые не являются тавтологиями. Если A – тавтология, то $\rceil A$ – не тавтология (противоречие).

1.9. Логический вывод из гипотез

Гипотезы – истинные по определению, убеждению или опыту утверждения в некоторой области.

В отличие от аксиом теории высказываний гипотезы $Г$ не обязательно тавтологии, но *непротиворечивы*. В отличие от вывода в аксиоматической теории, вывод формулы B из гипотез ($Г \mapsto B$) подтверждает не общезначимость формулы B, а только ее истинность при интерпретациях, в которых истинны гипотезы $Г$. Формула B вне этой области истинности конкретных гипотез может быть ложной.

Следовательно, правильные рассуждения имеют смысл только в данной конкретной области знаний. Причем тавтология не может быть получена при выводе из гипотез, которые не являются тавтологиями - что следует из полноты и непротиворечивости теории исчисления высказываний.

1.9.1. Прямой метод вывода

Определение.

Формула B *логическое следствие* из гипотез $Г=\{F_1, F_2, \dots, F_m\}(m\geq 0)$, если при любой интерпретация I, где $F_1(I)$ и $F_2(I)$ … и $F_m(I)$ истинны $B(I)$ так же истинно. Обозначается $F_1F_2\dots F_m \mapsto B$.

Утверждение 1.7.

Если $Г=\{F_1, F_2, ..., F_n\} \mapsto B$, то $Ф = F_1 \& F_2 \& \dots \& F_m \to B =$
$= \rceil F_1 \vee \rceil F_2 \vee ... \vee \rceil F_n \vee B = (F_1 \to (F_2 \to ... \to (F_n \to B))...)$ тавтология.

Таким образом, *прямой метод вывода* любой формулы B из гипотез сводится к доказательству общезначимости формулы.

Для заданных гипотез $F_1, F_2, \dots, F_m$ строится цепочка формул с применением правил вывода, пока не будет получена заданная формула B.

Правила при выводе из гипотез:

- если существует интерпретация I, при которой гипотезы выполнимы, то и следствие из гипотез в этой интерпретации выполнимо;
- если гипотезы общезначимы в некоторой области интерпретации, тогда и следствие общезначимо в этой области.

Правила логического вывода аксиоматической теории высказываний применимы и при выводе из гипотез.

1) Правило отделения (MP, modus ponens)

$$\frac{A, A \to B}{B.}$$

По определению импликации $(\rceil A \vee B)A = AB = B = 1$, при A=1.

2) Отрицательный модус (МТ, modus tollens)

$$\frac{A \to B,\ \rceil B}{\rceil A.}$$

По определению импликации $(\rceil A \vee B)\ \rceil B = \rceil A \rceil B = \rceil A = 1$ при $\rceil B = 1$.

3) Удаление конъюнкции (УК)

$$\frac{P\&Q}{P,\ Q.}$$

По определению конъюнкции, если $P(I)\&Q(I)$ выполнима в I, то $P(I)$, $Q(I)$ так же выполнимы.

4) Введение конъюнкции (ВК)

$$\frac{P(I),\ Q(I)}{P(I)\&Q(I).}$$

Если $P(I)$ и $Q(I)$ выполнимые гипотезы в интерпретации I, то и конъюнкция $P(I)\&Q(I)$ выполнима в этой интерпретации.

5) Введение дизъюнкции (ВД, Addition)

$$\frac{A(I)}{A(I) \vee B(I).}$$

Если $A(I)$ выполнима, то $A(I) \vee B(I)$ тоже выполнима в этой интерпретации.

$A(I) \to (A(I) \vee B(I)) = \rceil A(I)\ A(I) \vee B(I) = 1$ тавтология при любых интерпретациях, следовательно $A(I) \vee B(I)$ выполнима при I.

6) Удаление дизъюнкции (УД)

$$\frac{P(I) \vee Q(I),\ \rceil P(I)}{Q(I).}$$

Если $\rceil P(I)$ выполнима в некоторой интерпретации I и $P(I) \vee Q(I)$ выполнима в этой интерпретации, то выполнима и $Q(I)$.

$P(I) \vee Q(I)\&\rceil P(I) = P(I)\&\rceil P(I) \vee Q(I))\&\rceil P(I) = 0 \vee Q(I))\&\rceil P(I)$ выполнима и $Q(I)$ (по УК).

7) Дизъюнктивное расширение (ДР)

$$\frac{P(I) \to Q(I)}{P(I) \vee B(I) \to Q(I) \vee B(I).}$$

$P(I) \to Q(I) \to (P(I) \vee B(I) \to Q(I) \vee B(I)) =$
$= (P(I) \to Q(I)) \to (\rceil P(I)\&\rceil B(I) \vee Q(I) \vee B(I)) =$
$= (P(I) \to Q(I)) \to (\rceil P(I) \vee Q(I) \vee B(I)) = (P(I) \to Q(I)) \to ((P(I) \to Q(I)) \vee B(I)) =$
$= P(I) \to (P(I) \vee B(I)) = 1$, тавтология, при любых интерпретациях, следовательно, выполнима при I.

8) Транзитивность импликации (ТИ)

$$\frac{(P(I) \to R(I)),\ (R(I) \to Q(I))}{P(I) \to Q(I).}$$

Если $(P(I) \to R(I))$ и $(R(I) \to Q(I))$ выполнимы в интерпретации I, то

$(P(I)\to Q(I))$ выполнима в этой интерпретации.

$$(P(I)\to R(I))\,\&(R(I)\to Q(I)) = (\rceil P(I) \vee R(I))\,\&(\rceil R(I) \vee Q(I))$$

$$(\rceil P(I) \vee R(I))\,\&(\rceil R(I) \vee Q(I)) \to (\rceil P(I) \vee Q(I)) =$$

$$= P(I)\,\&\,\rceil R(\mathrm{I}) \vee R(I)\&\,\rceil Q(I) \vee \rceil P(I) \vee Q(I) = \rceil P(I) \vee Q(I) \vee \rceil R(I) \vee R(I) = T$$

выполнима при любых интерпретациях, следовательно, $P(I)\to Q(I)$, выполнима в I.

9) Конструктивная Дилемма (CD)

$$\frac{a \vee b,\ a \to c,\ b \to d}{c \vee d}$$

$$((a \vee b)(a\to c)(b\to d)) \to (c \vee d) = ((\rceil a\ \rceil b) \vee (a\,\rceil c) \vee (b\,\rceil d)) \vee (c \vee d) =$$

$= (\rceil a \vee a \vee b \vee c \vee d) = T$, при любых интерпретациях.

Пример.

Есть три гипотезы: $\underline{A\vee B,\ A\to C,\ B\to D}$

Предполагаемое следствие из гипотез: $C \vee D$.

1) $A\to C$ (гипотеза);
2) $A \vee B\to C\vee B$ (правило ДР к $1\to 2$);
3) $B\to D$ (гипотеза);
4) $C \vee B\to C \vee D$ (правило ДР к $3\to 4$);
5) $A\vee B\to C \vee D$ (правило ТИ к $2, 4\to 5$);
6) $A \vee B$ (гипотеза);
7) $C \vee D$ (правило МР к $5, 6 \to 7$).

Пример.

Гипотезы: $\underline{(A\&D)\to B,\ A,\ C,\ C\to D}$

Следствие: B.

1) A (гипотеза);
2) C (гипотеза);
3) $C\to D$ (гипотеза);
4) D (МР $2, 3\to 4$);
5) $A\&D$ (ВК $1, 4$);
6) $(A\&D)\to$В (гипотеза);
7) B (МР $5, 6\to 7$).

Эффективный частный случай логического вывода из гипотез известен как ***метод математической индукции.*** Осознание метода математической индукции как отдельного важного метода восходит к Блезу Паскалю и Герсониду, хотя отдельные случаи применения встречаются ещё в античные времена у Прокла и Эвклида. Современное название метода было введено де Морганом в 1838 году.

Метод математической индукции заключается в следующем:

1) утверждается гипотеза $P(0)$ - **базис индукции**;
2) доказывается $P(0) \mapsto P(1)$;

3) доказывается $P(n) \mapsto P(n+1)$;

4) последовательно применяя МР-правило для любого целого $n>0$ $P(0), P(1), \ldots, P(n+1)$, **вывод** $P(n+1)$.

В общем случае применение прямого метода вывода **не эффективно**, так как отсутствует алгоритм выбора и применения правил.

1.9.2. Обратный метод логического вывода из гипотез

Утверждение 1.8.

Формула B - логическое следствие из гипотез $F_1, F_2, \ldots, F_n$ тогда и только тогда, когда $\neg\Phi = F_1\&F_2\&\ldots\&F_n\&\neg B$ противоречиво или $F_1\&F_2\&\ldots\&F_n\&\neg B = \square$.

Таким образом, **обратный метод** вывода из гипотез формулируется как задача проверки некоторой формулы на противоречивость. Применимы рассмотренные ранее алгебраические методы и метод DP.

Предполагается, что заключение неверно ($\neg B$), строится цепочка формул по правилам вывода до тех пор, пока не будет получено противоречие.

Противоречие легко обнаружить при выводе, если на очередном шаге получены противоречивые формулы F и $\neg F$, из которых следует пустая формула $F\&\neg F = \square$.

1.9.3. Применение правил вывода из гипотез с использованием тождественных алгебраических преобразований

Пример.

Гипотезы: $\underline{A \vee B, A \to C, B \to D,}$

предполагаемое следствие: $C \vee D$.

Проверить противоречивость или общезначимость формулы $(A \vee B)\&(A \to C)\&(B \to D)\&\neg(C \vee D)$.

1) $A \vee B$;
2) $A \to C$;
3) $B \to D$;
4) $\neg(C \vee D)$;
5) $\neg C\&\neg D$ (правило де Моргана $4 \to 5$);
6) $\neg C$ (УК $5 \to 6$);
7) $\neg D$ (УК $5 \to 7$);
8) $\neg C \to \neg A$ (закон контрапозиции $2 \to 8$);
9) $\neg D \to \neg B$ (закон контрапозиции $3 \to 9$);
10) $\neg A$ (МР $6, 8 \to 10$);
11) $\neg B$ (МР $7, 9 \to 1$);
12) B (УД $1, 10 \to 12$);
13) A (УД $1, 11 \to 13$);
14) $\square$ ($A\&\neg A, B\&\neg B$).

Формула противоречива.

1.9.4. Применение DP-метода при выводе из гипотез

Формула опровержения $\rceil \Phi = F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_n \& \rceil B$ приводится к КНФ (множество дизъюнктов). Формула B - следствие из гипотез, если $\rceil \Phi$ противоречие (не выполнима или не существует интерпретации, при которой $\rceil \Phi$ выполнима).

Рассматривая формулу для Ф, можно встретить следующие условия:

1) Гипотезы могут быть тавтологией, тогда вывод тоже должен быть тавтологией. Метод DP контролирует эти условия и исключает их из S.

2) Гипотезы могут быть противоречивыми, тогда при любой интерпретации любая формула является выводом, что может не согласовываться со здравым смыслом, но не противоречит определению вывода. Следовательно, может быть независимо рассмотрена задача проверки гипотез на непротиворечивость, если по смыслу это не допустимо.

3) Гипотезы и следствие должны содержать общие атомы. В противном случае может быть интерпретация, применимая к гипотезам и не применимая к выводу. Следовательно, не выполняется условие в определении следствия из гипотез.

Дополним метод DP следующим правилом, сокращающим перебор по Квайну, заменяя его алгебраическими преобразованиями.

Правило расщепления (правило 4 для DP) применяется в том случае, если множество дизъюнктов S – не пустое и не применимы правила 1), 2), 3) алгоритма DP.

Разделим дизъюнкты на три подмножества - с одним значением литеры L, с другим значением литеры $\rceil L$ и подмножество R, не содер-жащее этой литеры:

$S=(L \vee A_1)\&(L \vee A_2)\&\ldots\&(\rceil L \vee B_1)\&(\rceil L \vee B_2)\&\ldots\&R,$

где R –подмножество не содержит литер L и $\rceil L$;

$S_1=\{A_1, A_2, \ldots\}$ – подмножество дизъюнктов с литерой L;

$S_2=\{B_1, B_2, \ldots\}$ – подмножество дизъюнктов с литерой $\rceil L$.

Тогда, $S=(L \vee S_1)\&(\rceil L \vee S_2)\&R$.

$((L \vee S_1)\&(\rceil L \vee S_2)) \to (S_1 \vee S_2) =$ по определению импликации

$= \rceil((L \vee S_1)\&(\rceil L \vee S_2)) \vee (S_1 \vee S_2) =$ по правилу де Моргана

$= \rceil S_1 \rceil L \vee \rceil S_2 L \vee S_1 \vee S_2 =$ по правилу сокращения

$=\rceil L \vee L \vee S_1 \vee S_2 = T$ тавтология при любых интерпретациях, т.е. $(S_1 \vee S_2)$, по определению, – следствие из гипотез и выполнима в тех же интерпретациях, что и гипотезы, и не зависит от L.

Правило расщепления $\dfrac{\boldsymbol{(L \vee S_1)\&(\rceil L \vee S_2)}}{\boldsymbol{S_1 \vee S_2}}.$

В частном случае, $S_1 \vee S_2 = T$ и применимо правило 1 – исключение тавтологии.

Для продолжения преобразований по методу Девиса - Патнема формула $S_1 \vee S_2$ должна быть преобразована в конъюнктивную форму:

$(S_1 \vee S_2) = A_1\&A_2\&\ldots\&A_n \vee B_1\&B_2\&\ldots\&B_m =$

$= (A_1 \vee B_1)\& (A_1 \vee B_2)\&\ldots\& A_1 \vee B_m)\&(A_2 \vee B_1)\&(A_2 \vee B_2)\&\ldots\&(A_n \vee B_m)$.

Правила 1-4 последовательно применяются, пока не будет получена пустая формула.

Следствие. Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_k$ - последовательность вычеркнутых литер по правилам 2), 3) и L_k - последняя вычеркнутая литера, после которой $S_{i+1}= \square$ и S – выполнима. Тогда условие $L_1\&L_2\&\ldots\&L_k = T$ обозначает интерпретацию, при которой формула S выполнима.

Пример.

Проверить формулу вывода вместе с гипотезами

$$\frac{(\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}), (\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{C}), (\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{D})}{(\boldsymbol{C} \vee \boldsymbol{D})}$$

$A \vee B$	$A \vee B$	$A \vee B$	$A \vee B$		
$A\to C$	$\neg A \vee C$	$\neg A \vee \cancel{C}$	$\neg A$	B	$\square$
$\underline{B\to D}$	$\neg B \vee D$	$\neg B \vee \cancel{D}$	$\neg B$	$\neg B$	
$C \vee D$	$\underline{\neg(C \vee D)}$	$\cancel{\neg C}$			
		$\cancel{\neg D}$			

Множество дизъюнктов невыполнимо, поэтому формула $(C \vee D)$ является следствием из гипотез.

Пример.

Проверить гипотезы на выполнимость и непротиворечивость

$$\frac{(\boldsymbol{P} \vee \neg\boldsymbol{Q})(\neg\boldsymbol{P} \vee \boldsymbol{Q})(\boldsymbol{Q} \vee \boldsymbol{T})}{\boldsymbol{Q}\&\boldsymbol{T}}$$

$P \vee \neg Q$		$P \vee \neg Q$		$P \vee \neg Q$		
$\neg P \vee Q$	$T=1$	$\neg P \vee Q$	$Q=1$		$P=1$	
$\underline{Q \vee T}$	$\to$	Q	$\to$		$\to$	$\square$
$Q\&T$						

Гипотезы выполнимы при $PQT=111$.

Проверим гипотезу на общезначимость. Для этого проверим инверсию гипотезы $\neg(Q\&T)$ на выполнимость.

$P \vee \neg Q$	$P \vee \neg Q$		P				
$\neg P \vee Q$	$\neg P \vee Q$	$Q=1$		$P=1$		$\neg T=1$	$\square$
$\underline{Q \vee T}$	$Q \vee T$	$\to$		$\to$		$\to$	
$Q\&T$	$\underline{\neg Q \vee \neg T}$		$\neg T$		$\neg T$		

Формула выполнима при $PQT=110$, следовательно, она не общезначима.

1.9.5. Правило резолюции Робинсона

Правило расщепления с использованием алгебраических преобразований может быть заменено правилом резолюции Робинсона, применяемым только к парам дизъюнктов с контрарными литерами.

Утверждение 1.9.

Для дизъюнктов C_1 и C_2 с контрарными литерами $C_1=L \vee S_1$ и $C_2=\neg L \vee S_2$ *резольвента* $C=S_1 \vee S_2$ является логическим следствием C_1 и C_2.

Правило резолюции является частным случаем правила расщепления, применяемого к паре дизъюнктов.

При последовательном применении правила резолюции ко всем парам дизъюнктов, устраняются противоречивые литеры L_1, L_2, и расширяется множество дизъюнктов S_{i+1} новыми дизъюнктами $S_1 \vee S_2$. За конечное число шагов в множестве S_i исключаются все противоречивые литеры.

S_{i+1} – невыполнимо (противоречиво) или выполнимо тогда и только тогда, когда невыполнимо (противоречиво) или выполнимо S_i.

В частном случае, $S_1 \vee S_2 = T$ и применимо правило 1) метода Девиса и Патнема – исключение тавтологии.

Таким образом, алгоритм вывода, основанный на правилах метода Девиса и Патнема с правилом резолюций Робинсона, **эффективен** – завершается за конечное число шагов и может быть использован в основе машинного метода доказательства общезначимости и теорем в исчислении высказываний.

При этом можно выбрать одну из литер L и применить к соответствующим дизъюнктам, содержащим L, правило резолюций ко всем контрарным парам дизъюнктов. Остаются только новые резольвенты и исключаются дизъюнкты с литерой L. Число литер в дизъюнктах сокращается, что и гарантирует завершение вывода за конечное число шагов.

Пример.

Проверить общезначимость следующей формулы

$$\boldsymbol{\Phi = xy \vee xz \vee yz \vee \neg x \neg y \vee \neg x \neg z \vee \neg y \neg z.}$$

Для перехода к обратному методу запишем инверсию формулы

$\neg\Phi=(\neg x \vee \neg y)(\neg x \vee \neg z)(\neg y \vee \neg z)\ (x \vee y)(x \vee z)(y \vee z)$

исключение x по правилу резолюций

$\neg y \vee y \qquad \neg y \vee z \qquad \neg z \vee y \qquad \neg z \vee z$

$(\neg y \vee \neg z)\ (y \vee z)(\neg y \vee z)(\neg z \vee y)$

исключение y

$\neg z \vee z \qquad \neg z \vee \neg z \qquad z \vee z \qquad z \vee \neg z$

исключение тавтологий

$\neg z \qquad z$

$\square$

противоречие

Правила резолюции последовательно применяется, пока не будет найдено противоречие или дизъюнкты с контрарными литерами отсутствуют. В последнем варианте формула $\rceil\Phi$ противоречие и Φ -тавтология.

Если правило резолюции на некотором шаге не применимо, то для оставшихся дизъюнктов можно применить правила Девиса и Патнема и найти набор значений атомов, для которого формула выполнима (SAT-проблема). Например, если в примере исключить любой терм, то получим просто выполнимую формулу

$$\Phi 1 = xz \vee yz \vee \rceil x \rceil y \vee \rceil x \rceil z \vee \rceil y \rceil z;$$

$$\rceil \Phi 1 = (\rceil x \vee \rceil z)(\rceil y \vee \rceil z)\,(x \vee y)(x \vee z)(y \vee z) \;\rightarrow$$

$$\rightarrow (\rceil z \vee y)\,(\rceil y \vee \rceil z)\,(y \vee z) \rightarrow y \rceil z.$$

Выводы

В логике высказываний применимы алгебраические преобразования для вычисления значения истинности составных высказываний и при доказательстве теорем на основе выполнимых гипотез.

Метод доказательства теорем может быть построен на основе правил Девиса - Патнема, которые дополняются правилом резолюции Робинсона.

Логика высказываний — основополагающий раздел современной логики, имеющий широкое применение в различных сферах интеллектуальной деятельности человека. Вместе с тем, поскольку в логике высказываний не учитывается субъективно-предикатная структура высказываний и ряд других содержательных положений, с ее помощью нельзя адекватно формализовать значительную часть содержательных рассуждений, используемых человеком. Для этих целей дополнительно к средствам логики высказываний используются средства логики предикатов и металогики.

Задачи в логике высказываний

I. Символическая запись составных высказываний

1) Если влажность высокая (a), то после полудня или (либо) вечером будет дождь ($b \vee c$).

Высказывания a ,b, c – событие; $a \to b \vee c$.

2) Лечение не будет найдено (a), пока не определены причины болезни (b) и не найдены новые лекарства (c).

Высказывания a, b, c – событие, $b\&c \to a$.

3) Требуется храбрость (a) и мастерство (b), чтобы подняться на эту гору (c).

a, b – свойства, c – событие, $c \to a\&b$.

4) Для того, чтобы число было нечетным (a), необходимо, чтобы число было простым (b) и не делилось на два (c).

a, b, c – свойства чисел, $a \to b\&c$.

II. SAT-проблема и вывод методом Девиса и Патнема

(проверить общезначимость, выполнимость)

1) Если соли (c) не окрашены ($\rceil k$), то они либо неорганические соединения ($\rceil o$) и соли (c), либо неокрашенные ($\rceil k$) органические соединения (o).

$\Phi = c\&\rceil k \to \rceil o\&c \vee \rceil k\&o$.
$\Phi = \rceil c \vee k \vee \rceil o\&c \vee \rceil k\&o = \rceil o \vee o = T$.
$\rceil\Phi = \rceil(c\&\rceil k \to \rceil o\&c \vee \rceil k\&o) = (c\&\rceil k)(o \vee \rceil c)(k \vee \rceil o) \to o\&\rceil o$ противоречие.

2) Если инфляция растет (a), то цены растут (b). Если цены растут (b), то жизненный уровень падает (c). В этом году инфляция растет (a). Падает ли жизненный уровень (c)?

a, b, c – события,
$\Phi = ((a \to b)(b \to c)a) \to c = ((\rceil a \vee b)(\rceil b \vee c)a) \to c = abc \to c = T$.
$\rceil\Phi = \rceil((a \to b)(b \to c)a) \to c = (\rceil a \vee b)(\rceil b \vee c)a\rceil c \to c\&\rceil c$ противоречие.

3) Если человек говорит неправду (a), то он заблуждается (b) или вводит в заблуждение (c). $a \to (b \vee c)$.

Пусть человек говорит неправду (a), но не заблуждается ($\rceil b$). Следовательно, он вводит в заблуждение (c).

$\Phi = ((a \to (b \vee c))a\rceil b) \to c = ((\rceil a \vee b \vee c)a\rceil b) \to c = (ac\rceil b) \to c = T$.
$\rceil\Phi = \rceil(((\rceil a \vee b \vee c)a\rceil b) \to c) = \rceil((ac\rceil b) \to c) = ac\rceil b\rceil c$ противоречие.

4) Если жарко (a) и высокая влажность (b), то будет дождь (c). Если высокая влажность (b), то жарко (a) и дождливо (c).Сегодня высокая влажность (b). Будет ли дождь (c)?

a, b, c – события,

$\Phi = ((ab \to c)(b \to ac)b) \to c = ((\rceil a \vee \rceil b \vee c)(\rceil b \vee ac)b) \to c =$
$= ((\rceil b \vee a\, c)b) \to c = abc \to c = T.$
$\rceil\Phi = \rceil\, (((\rceil a \vee \rceil b \vee c)(\rceil b \vee ac)b) \to c) = \rceil(abc \to c) = abc\rceil c$ противоречие.
Дождь будет.

5) Курс акций падает (a), если ставки растут (b). Если курс падает (a), то предприниматели разоряются (c) . Пусть ставки растут (b), будут ли разоряться предприниматели (c)?

a, b, c – события,
$\Phi=((b \to a)(a \to c)b) \to c= ((\rceil b \vee a)(\rceil a \vee c)b) \to c= abc \to c = T.$
$\rceil\Phi=\rceil(abc \to c) = abc\rceil c$ противоречие.

6) Если A участвует в проекте (a), то не участвует B ($\rceil b$): ($a\to\rceil b$). Если A участвует (a), то участвует D и C: $a \to (d\, c)$.

Участвует ли C, когда участвует B?
$\Phi=(a \to \rceil b)(a \to (dc))b \to c = (\rceil a \vee \rceil b)(\rceil a \vee dc)b \to c =$
$= (\rceil a \vee \rceil bdc)b \to c = \rceil(\rceil a \vee \rceil bdc)b) \vee c = ab \vee a\rceil d \vee a\rceil c \vee b \vee c =$
$= b \vee a \vee \rceil c \vee c = T.$

7) Если конгресс отказывается принять требования (a) или забастовка не длится более года ($\rceil c$), то забастовка на фирме не закончится ($\rceil b$). Конгресс не отказывается ($\rceil a$) или (И) забастовка длится 2 месяца ($\rceil c$). Следовательно, забастовка не закончится ($\rceil b$)?

a, b, c – события $\Phi=(((\rceil c \vee a) \to \rceil b)(\rceil a \vee \rceil c)) \to \rceil b.$

$((c \vee \rceil b)$ c
$(\rceil a \vee \rceil b)$ $b/1$ $\rceil a$ $c/1$ $\rceil a$ $a/0$ $\rceil\Phi$ выполнима.
$(\rceil a \vee \rceil c)$ $\to$ $(\rceil a \vee \rceil c)$ $\to$ $\to$
b

Проверим на выполнимость $\rceil\Phi$ для $\rceil b$.
$((c \vee \rceil b)$
$(\rceil a \vee \rceil b)$ $b/0$ $\rceil a$ $\rceil a$ $a/0$ $\rceil\Phi$ выполнима.
$(\rceil a \vee \rceil c)$ $\to$ $(\rceil a \vee \rceil c)$ $\to$
$\rceil b$

Меняем связку $\vee$ на $\&$ и проверяем $\rceil b$.

$\Phi=(((\rceil c \vee a) \to \rceil b)(\rceil a \,\&\, \rceil c)) \to \rceil b.$

$((c \vee \rceil b)$ $((c \vee \rceil b)$
$(\rceil a \vee \rceil b)$ $a/0$ $\rceil b$ $\rceil b$
$\rceil a$ $\to$ $c/0$ $\rceil\Phi$ противоречие,
$\rceil c$ $\rceil c$ $\to$ забастовка не закончится.
b b b

8. Можно ли получить H_2CO_3 (a), если
$MgO + H_2 \;\longrightarrow\; Mg + H_2O$ $(gh \to mv)$
$CO_2 + H_2O \;\longrightarrow\; H_2CO_3$ $(uv \to a)$
$C + O_2 \;\longrightarrow\; CO_2$ $(co \to u)$

и есть MgO, O_2, C gco,

g, h, m, v, u, a, c, o – события.

$(\rceil g \vee \rceil h \vee m)$ $\rceil h \vee m$
$(\rceil g \vee \rceil h \vee v)$ $\rceil h \vee v$ u=1 $\rceil h$. Для получения противоречия
$(\rceil u \vee \rceil v \vee a)$ $\rightarrow$ $\rceil u \vee \rceil v$ не хватает h.
$(\rceil c \vee \rceil o \vee u)$ u
gco
$\rceil a$

Поэтому, если к гипотезам добавить h - есть H_2, то получение H_2CO_3 возможно.

9. Если капиталовложения сохранятся (a), то возрастут правительственные расходы (b) или будет безработица (c). Если расходы правительства не возрастут ($\rceil b$), то налоги будут снижены (d). Если налоги будут снижены (d) и капиталовложения останутся постоянными (a), то безработицы не будет ($\rceil c$). Следовательно, правительственные расходы возрастут (b).

a, b, c, d - события,
$a \rightarrow (b \vee c)$, $\rceil a \vee b \vee c$,
$\rceil b \rightarrow d$, $b \vee d$,
$da \rightarrow \rceil c$, $\rceil d \vee \rceil c$, $\rceil a \vee \rceil c$,

$\rceil a \vee b$ $\rceil a$ $\rceil a$
$\rceil a \vee c$ $\rceil a \vee c$ Для получения противоречия
$b \vee d$ d d не хватает a
$\rceil d \vee \rceil c$ $d \vee \rceil c$
$\rceil a \vee \rceil c$ $\rceil a \vee \rceil c$
$\rceil b$

Если добавить a - “капиталовложения постоянные” к гипотезам, то правительственные расходы возрастут (b).

10. Уровень содержания в крови элементов высокий (a), что свидетельствует об обезвоживании организма (b) или печеночной недостаточности (c). $(b \vee c) \rightarrow a$

Уровень содержания элементов в крови низкий ($\rceil a$), что указывает на нарушение функций печени (c) или сильное утомление (d).

$(c \vee d) \rightarrow \rceil a$.

Высокий уровень содержания элементов в крови (a) обозначает заболевание печени (c) или почек (e), если пациент не спортсмен ($\rceil f$). Пациент спортом не занимается ($\rceil f$).

Страдает ли пациент печеночной недостаточностью (c)?

$(b \vee c) \rightarrow a$, $(\rceil b \vee a)$, $(\rceil c \vee a)$,
$(c \vee d) \rightarrow \rceil a$, $(\rceil c \vee \rceil a)$, $(\rceil d \vee \rceil a)$,
$((\rceil f(c \vee e)) \rightarrow a)$, $(f \vee \rceil c \vee a)(f \vee \rceil e \vee a)$.

Проверить $\rceil c$.

$(\rceil b \vee a)$ $\quad (\rceil b \vee a)$

$(\rceil c \vee a)$ $\quad a \quad a$

$(\rceil c \vee \rceil a)$ $\quad \rceil a \quad \rceil a$ противоречие.

$(d \vee \rceil a)$ $\quad (\rceil d \vee \rceil a)$

$(f \vee \rceil c \vee a)$ $\quad a$

$(f \vee \rceil e \vee a)\rceil$ $\quad (\rceil e \vee a)$

$\rceil f$

c

Следовательно, $\rceil c$ и пациент не болен печеночной недостаточностью.

11. По обвинению в ограблении арестованы три подозреваемых А, В и С. Из опроса свидетелей установлено:

1) Каждый из подозреваемых был в лавке в течении дня $a \vee b \vee c$.
2) Если А виновен, то у него был ровно один сообщник. $a \rightarrow (b \oplus c)$.
3) Если В не виновен, то С тоже не виновен. $\rceil b \rightarrow \rceil c$.
4) Если виновны ровно двое, то А один из них. $(b \oplus c) \rightarrow a$.
5) Если С не виновен, то В тоже не виновен. $\rceil c \rightarrow \rceil b$.

Кто виновен ?

1) $a \vee b \vee c$

2), 4) $(a \rightarrow (b \oplus c))((b \oplus c) \rightarrow a) = (a \sim (b \oplus c)) =$ Т, по предположению. Следовательно, $a = (b \oplus c)$.

3), 5) $(\rceil b \rightarrow \rceil c)(\rceil c \rightarrow \rceil b) = (\rceil c \sim \rceil b) = (c \sim b)$ и $c = b$.

Тогда $a = b \oplus c = F$ и a не виновен.

Из 1) $b \vee c = b = c = T$ виновны.

12. В следствии установлены следующие факты:

а) Если A виновен, а B не виновен, то в деле участвовал C.

$$A \rceil B \rightarrow C.$$

б) C никогда не действует в одиночку. $C \rightarrow B \vee A$.

в) A никогда не участвует вместе с C. $A \rightarrow \rceil C$.

г) По крайней мере один из A, B, C виновен. $A \vee B \vee C$.

Кто может быть виновен?

$A \rceil B \rightarrow C, \quad B \vee \rceil A \vee C$

$C \rightarrow (B \vee A) \quad \rceil C \vee B \vee A$

$A \rightarrow \rceil C \quad \rceil A \vee \rceil C$

$A \vee B \vee C \quad A \vee B \vee C$

Предположим, что виновен A, тогда

$B \vee \rceil A \vee C \quad B \vee C \quad B$

$\rceil C \vee B \vee A$

$\rceil A \vee \rceil C \quad \rceil C$

$A \vee B \vee C$

A

Если A виновен, то виновен и B.

Предположим, что виновен B, тогда

$B \vee \neg A \vee C$

$\neg C \vee B \vee A$

$\neg A \vee \neg C$ $\qquad A \vee \neg C$

$A \vee B \vee C$

B

Если B виновен, то виновен и A.

Предположим, что виновен C, тогда

$B \vee \neg A \vee C$

$\neg C \vee B \vee A$ $\qquad B \vee A \qquad B$

$\neg A \vee \neg C$ $\qquad \neg A$

$A \vee B \vee C$

C

Если C виновен, то виновен и B.

Получается, что B виновен, а A и C не виновны вместе, но могут быть в отдельности.

$\neg A \vee \neg C = \neg(AC)$.

13. Если A утверждает правду, то B обманывает, $A \to \neg B$.

Если A обманывает, то B утверждает правду, $\neg A \to B$.

Если B утверждает правду, то C обманывает, $B \to \neg C$.

Если B обманывает, то C утверждает правду, $\neg B \to C$.

Если C утверждает правду, то A и B обманывают,

$(C \to \neg A \neg B)(\neg C \to (A \vee B))$.

Кто же обманывает?

1) $(A \to \neg B)(\neg A \to B) = (A \to \neg B)(\neg B \to A) = (A \sim \neg B)$.

2) $(B \to \neg C)(\neg B \to C) = (B \sim \neg C) = (\neg B \sim C)$.

Из 1), 2) (A~C).

3) $(C \to \neg A \neg B)$.

4) $(\neg C \to \neg(\neg A \neg B)) = (\neg A \neg B \to C)$.

Из 3), 4) $(C \sim \neg A \neg B)$.

Из 1) и 3) $(C \sim \neg A \neg B) = (C \sim \neg A A) = (C \sim F)$ и, следовательно, $C=F$ обманывает.

Тогда из 2) $B=T$ не обманывает и из 1) $A=F$ обманывает.

14. В суде рассматривается следующее дело:

а) Если A и B виновны, то C их соучастник. $ab \to c$.

б) Если A виновен, то B или C его соучастники. $a \to (b \vee c)$.

в) C всегда участвует вместе с B. $b \to c$.

г) Если A не участвовал, то участвовал B. $\neg a \to b$.

Кто виновен ?

Предполагается также, что A, или B, или C виновны, так как преступление имело место. $a \vee b \vee c$.

$ab \to c, \qquad \neg a \vee \neg b \vee c.$

$a \to (b \vee c), \qquad \neg a \vee b \vee c.$

$b \to c, \qquad c \vee \neg b.$

$\neg a \to b, \qquad a \vee b.$

$a \vee b \vee c.$

$\neg a \vee \neg b \vee c \qquad \neg a \vee c$

$\neg a \vee b \vee c$

$c \vee \neg b \qquad c \vee \neg b \qquad c=1$

$a \vee b \qquad a \vee b \qquad \to \quad a \vee b$

$a \vee b \vee c \qquad b \vee c$

Следовательно, C – участник, а A и B остаются под подозрением.

15. Если философ не дуалист (d), то он не может быть материалистом (m). $\neg d \to \neg m$.

Если он не материалист (m), то он диалектик (a). $\neg m \to a$.

Если он не метафизик (f), то дуалист (d) или не диалектик (a).

Философ не материалист и не метафизик. $\neg m \neg f$.

Кто он ?

$\neg d \to \neg m$

$\neg m \to a$

$\neg f \to d \vee \neg a$

$\neg m \neg f$

$d \vee \neg m$

$m \vee a \qquad a$

$f \vee d \vee \neg a \qquad d \vee \neg a \qquad d$

$\neg m$

$\neg f$

подтверждается философ – дуалист.

16. Если завод не работает ($\neg a$), то не платит за электричество ($\neg b$) и нет заказов ($\neg c$). $\neg a \to (\neg b \neg c)$.

Если завод не платит за электричество ($\neg b$), то нет электричества ($\neg d$) и завод не работает ($\neg a$). $\neg b \to (\neg d \neg a)$.

Какие условия необходимы, чтобы завод работал (a)?

$\neg a \to (\neg b \neg c) \qquad (a \vee \neg b)\ (a \vee \neg c)$

$\neg b \to (\neg d \neg a) \qquad (b \vee \neg d)\ (b \vee \neg a)$

a

$(a \vee \neg b) \qquad \neg b$

$(a \vee \neg c) \qquad \neg c$

$(b \vee \neg d) \qquad (b \vee \neg d) \qquad \neg d$ Для получения противоречия

$(b \vee \neg a)$ не хватает d

$\rceil a$

Для того, чтобы завод работал, необходимое условие d - есть электричество.

17. Если курс ценных бумаг растет (a), то падает курс акций (c) или снижаются налоги (d). $a \to c \vee d$.

Курс ценных бумаг растет (a) и налоги снижаются ($\rceil d$), когда курс акций не понижается ($\rceil c$). $\rceil c \to a \rceil d$.

Если процентная ставка снижается (b), то курс акций снижается ($\rceil c$) или курс ценных бумаг не растет ($\rceil a$). $b \to (\rceil c \vee \rceil a)$.

Следовательно, курс акций растет. (c).

$a \to c \vee d$ $\quad \rceil a \vee c \vee d$

$\rceil c \to ad$ $\quad c \vee a$

$b \to (\rceil c \vee \rceil \alpha)$ $\quad c \vee d$

$b \vee \rceil c \vee \rceil a$

c

$\rceil a \vee c \vee d$ $\quad \rceil a \vee d$ $\quad \rceil a$

$c \vee a$ $\quad a$ $\quad a$ противоречие, курс акций растет.

$c \vee d$ $\quad \rceil d$

$b \vee \rceil c \vee \rceil a$

$\rceil c$

18. Если он не скажет ей ($\rceil a$), то она не узнает ($\rceil b$). $\rceil a \to \rceil b$.

Если она не спросит его ($\rceil c$), он ей не скажет ($\rceil a$) . $\rceil c \to \rceil a$.

Она узнала (b).

Следовательно, она спросила (c).

$\rceil a \to \rceil b$ $\quad a \vee \rceil b$

$\rceil c \to \rceil a$ $\quad c \vee \rceil a$

b $\quad b$

c

$a \vee \rceil b$ $\quad a$

$c \vee \rceil a$ $\quad \rceil a$ противоречие, она спросила.

b

$\rceil c$

19. В темной комнате лежали шляпы - 2 белые и 3 черные.Трое вошли в комнату, одели шляпы и вышли, не зная, какие на них шляпы. По дороге каждый видел только шляпу впереди идущего. Первый спросил третьего, какая на нем шляпа - ответ: не знаю. Первый спросил второго - ответ: не знаю. Тогда первый понял, какая на нем шляпа.

$a, b, c \in \{ч, б\} = \{0, 1\}$.

$a \to b \to c$

3 2 1

Универсальное множество для a $\{bc \vee b\neg c \vee \neg bc \vee \neg b\neg c\}$=1.

$\neg(bc)$, a знал бы, что он в черной, при условии, что белых 2.

$\neg(\neg bc)$, b, видя перед собой белую шляпу, знал бы, что при $\neg(bc)$, он не может быть в белой.

Следовательно, $\neg(bc)\neg(\neg bc) = (\neg b \vee \neg c)\neg(b \vee \neg c) = \neg c$ – черная.

20. Если курс ценных бумаг растет (a) или процентная ставка снижается (b), то либо падает курс акций (c), либо налоги не повышаются (d). $(a \vee b) \to (c \oplus d)$.

Курс акций понижается (c) тогда и только тогда, когда растет курс ценных бумаг (a) и налоги растут. ($\neg d$). $c \sim (a\neg d)$.

Если процентная ставка снижается (b), то либо курс акций не снижается ($\neg c$), либо курс ценных бумаг не растет ($\neg a$).

$b \to (\neg c \oplus \neg a)$.

Следовательно, либо повышаются налоги ($\neg d$), либо курс акций понижается (c) и снижается процентная ставка (b). $\neg d \oplus (cb)$.

1) $(a \vee b) \to (c \oplus d)$ $\quad$ $a \vee \neg b \vee d$ (1, 2) гипотеза ($c \sim a\neg d$)=T, следовательно $c = a\neg d$ и

2) $c \sim a\neg d$

3) $b \to (\neg c \oplus \neg a)$ $\quad$ $\neg b \vee ad$ (2, 3)

4) $\neg d \oplus cb$ $\quad$ $\neg(\neg d \oplus cb) = (d \vee ab)$ (2, 4)

1) $a \vee \neg b \vee d$ $\quad$ удалить(1, 3)
2) $\neg b \vee a$ $\quad$ $\neg b \vee a$ $\quad$ $\neg b \vee a$ $\quad$ $\neg b \vee a$
3) $\neg b \vee d$ $\quad$ $\neg b \vee d$ $\quad$ d (3, 5)
4) $d \vee a$ $\quad$ $d \vee a$ $\quad$ $d \vee a$
5) $d \vee b$ $\quad$ $d \vee b$ $\quad$ $d \vee b$ $\quad$ Противоречие при $\neg ab$ -

если курс ценных бумаг не растет ($\neg a$) и процентная ставка снижается (b).

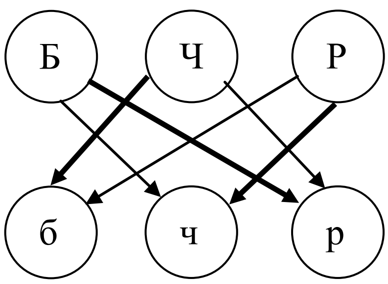
21. Три друга: Белов, Чернов, Рыжов, глядя друг на друга, замечают, что у всех цвет волос не совпадает с фамилиями.

Об этом заявляет черноволосый, а Белов подтвердил это мнение.

Какой цвет волос у каждого из друзей?

Прежде, чем использовать логику, решим задачу **графически**.

Бинарный граф отношений между фамилиями (Б, Ч, Р) и цветом волос (б, ч, р).



Из условия – Белов не черноволосый, по графу выбираем не противоречивые условия: Белов – рыжий; Чернов – белый и Рыжов – черный.

Алгебраическое решение:

Ребра обозначим как 0-местные предикаты, и запишем возможные высказывания:

(Б, ч) = a, (Б, р) = b, (Ч, б) = c, (Ч, p) = d, (Р, б) = e, (Р, ч) = f.

Составим уравнение $(a \vee b)(c \vee d)(e \vee f)(a \vee f)(b \vee d)(c \vee e)\rceil a =$
$= b\rceil af(\mathbf{c} \vee \mathbf{d})\,(e \vee f)\,(b \vee d)(\mathbf{c} \vee \mathbf{e}) = b\rceil af\rceil d\rceil e\,(\mathbf{c} \vee \mathbf{d})\,(c \vee e) =$
$= b\rceil af\rceil d\rceil ec \rightarrow bfc$. Значит (Б, р), (Р, ч) а (Ч, б).

2. Логика предикатов

Если логика высказываний демонстрирует методы вывода для конкретных фактов-высказываний и только подтверждает известные факты, то логика предикатов существенно расширяет область приложений и применима к общим задачам – поиска данных и получения новых фактов-знаний.

В общих рассуждениях присутствуют не только факты, но и **закономерности (правила)**, которые позволяют делать общие выводы для классов фактов.

Пример.

Если животное – хищник, то оно опасно – общее правило для класса хищников.

Крокодил – хищник – известный факт-высказывание.

Следовательно, крокодил опасен – предполагаемый факт-высказывание.

В логике высказываний можно построить интуитивно равнозначное рассуждение в виде фактов.

Хищники (p) опасны (m) – правило ($p\rightarrow m$).

Крокодил (i) – хищник (p) – высказывание ($i\rightarrow p$).

Следовательно, крокодил (i) опасен (m) – высказывание ($i\rightarrow m$).

В логике высказываний можно подтвердить истинность вывода, так как рассуждение в логике высказываний построено правильно.

$$(p\rightarrow m)(k\rightarrow p)\rightarrow(k\rightarrow m) = \rceil((\rceil p\vee m)(\rceil k\vee p))\vee(\rceil k\vee m) = \rceil(\rceil p\vee m)\vee\rceil(\rceil k\vee p)\vee(\rceil k\vee m) =$$

$$=p\rceil m\vee k\rceil p\vee\rceil k\vee m = p\vee\rceil p\vee\rceil k\vee m = 1.$$

Однако, для множества фактов общность рассуждений не очевидна.

Знание – новый факт и правила, которые следуют из общих правил и известных фактов.

Для получения знаний:

1) должно быть убеждение в истинности правил, например, для “*всех животных класса хищников*“ правило истинно;
2) необходимо выполнить логический переход к новым правилам, конкретизировать правила на основе известных фактов и вывести новые факты-знания.

Выбирается предметная **область определения** - конечное или бесконечное множество (**универсальный класс**) объектов и некоторое свойство P объектов из W.

$P(x)$ – символическое обозначение этого свойства называется одноместным предикатом, где P - предикатный символ, $x\in W$ - переменная (аргумент) предиката.

$P(x)$ = (x обладает свойством P) – утверждение, которое может быть истинным или ложным в зависимости от конкретного значения аргумента.

Если выбрана область определения W, выбрано содержание предикатного символа P и выбрана подстановка значения переменной из области определения, то для предиката выбрана ***интерпретация.***

Свойство определяет подмножество **(класс)** объектов ($K \subseteq W$), где утверждение $P(x)$ истинно.

Для предыдущего примера $x \in W$={животные}, $I(x)$=(x - хищники), $I(к)$=(крокодил - хищник), $R(x)$=(x - опасны) и общее формальное рассуждение с предикатами может быть записано в виде

$$((I(x) \rightarrow R(x))\&I(к)) \rightarrow R(к).$$

Здесь $I(к)$=(*крокодил* - хищник)=($k \rightarrow p$), $R(к)$=(*крокодил* - опасен)= ($k \rightarrow m$) простые высказывания (0-местные предикаты).

Правило подстановки

Значения из W обозначаются буквами (A, B, C, ..), подстановки $p(x/A) = p(A)$, $p(B)$, $p(C)$ являются **0-местными предикатами - фактами (высказываниями)**, которые могут быть заменены символическими обозначениями - атомами, принимающими значения $\{T, F\}$:

$p(A) = A, p(B) = B, p(C) = C.$

Предикат $P(x)$ представляет множество истинных или ложных утверждений (фактов) при условии, что аргумент x пробегает значения из области интерпретации.

2.1. Формулы с одноместными предикатами

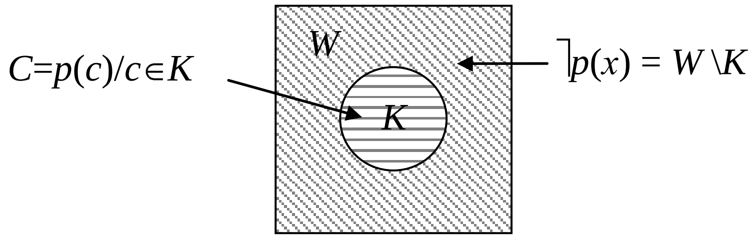
Одноместные предикаты и соответствующие классы могут быть **интерпретированы** множествами и представлены **графиками - диаграммами** Эйлера-Венна, что позволяет получить представление о структуре объекта, определяемого двумя и более свойствами.

Определения.

1) Универсальный класс **универсум *W*** обозначает предметную область.

2) Одноместный предикат $p(x)$ – **характеристическая функция,** подмножество $K \subseteq W$, где предикат $p(x)$ – истинный, называется **экзистенциалом.**

Операция *дополнения* некоторого подмножества K до единичного W ($W \setminus K$) интерпретирует **отрицание** простого предиката в логике $\neg p(x)$ и обозначает класс в W, в котором $p(x)$ ложно. При этом в каждом из подмножеств P_0 и P_1 можно выбрать по одному представителю-факту и обозначить их истинность, соответственно p и $\neg p$, Точно также можно полагать, что при подстановке в $P(x/C)$ некоторого факта C могут быть два значения истинности предиката $\{C, \neg C\}$ или $\{p, \neg p\}$.



Пример.

$P(x)$ = (x – целое), $x \in W$ – множество действительных чисел, K – класс целых чисел.

При подстановке конкретного значения C=5 из K в $p(x)$, получаем истинное по смыслу утверждение $P(5)$ = (5–целое) = T, при подстановке произвольного значения из W, например, $P(x/5.5)$ = (5.5–целое) = F. В дальнейшем смысл отрицания трактуется так, что если высказывание в p принимает значение истинности из $\{T, F\}$, то $\rceil p$ имеет инверсное значение.

Утверждение 2.1.

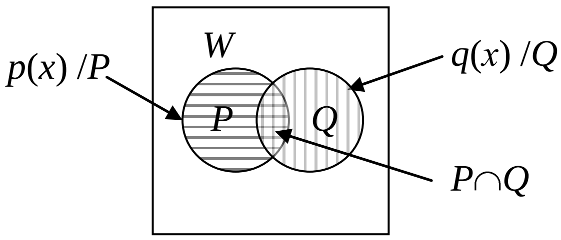
Всевозможные интерпретации одноместного предиката $p(x)$ в W **разделяют** область интерпретации не более, чем на два подмножества (2^1), в одном $p(x) = p$ истинно, а в другом $p(x) = \rceil p$ ложно. При этом для любой интерпретации $a \in W$, $p(x/a) \in \{T, F\}$.

Формулы с предикатами

Два предиката $p(x)$, $q(x)$ определяют два свойства в W.

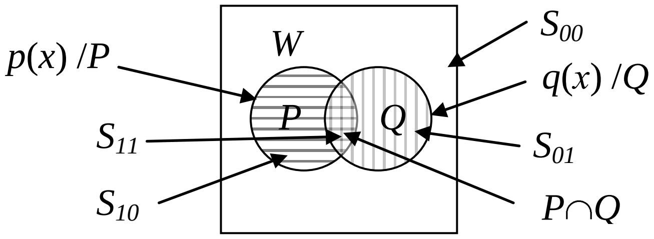
Применение связок к предикатам можно определить составным предикатом в виде формулы составного предиката.

Интерпретация формулы с конъюнкцией $p(x)\&q(x)$ двух предикатов на диаграммах Эйлера-Венна выглядит следующим образом:



Утверждение 2.2.

Всевозможные интерпретации предикатов, определяющих свойства объектов области интерпретации W, **разделяют** область не более чем на четыре (2^2=4) подмножества $\{S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}\}$. Каждое из подмножеств состоит из точек (объектов), для которых предикаты $p(x)=p$ и $q(x)=q$ принимают значения $(pq) = \{TT = 11, FF = 00, TF = 10, FT = 01\}$. Например, подмножество S_{10} определяет истинность следующего высказывания-факта "объект x обладает свойством $p(x)$ и не обладает свойством $q(x)$" или формулой $p\&\rceil q$. Таким образом, на диаграмме можно показать все четыре различающих интерпретации подмножествами $Spq = \{S_{11} = pq, S_{00} = \rceil p \rceil q, S_{10} = p \rceil q, S_{01} = \rceil pq\}$.



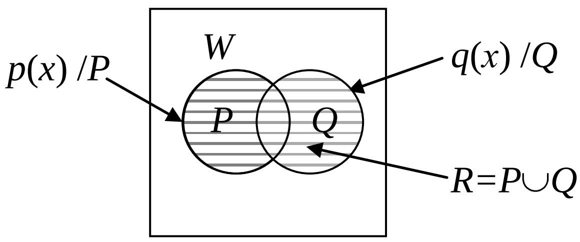
Пример.

Пусть $p(x)$ = (x делится на 2), $q(x)$ = (x делится на 5), тогда

$S(x) = p(x)$ & $q(x)$ – формула (**конъюнкция**) с предикатами, область истинности которой S_{11} совпадает с утверждением (x делится на 10), в котором оба предиката истинны.

Следствие. Все возможные интерпретации формулы для двух предикатов со свободными переменными определяются 2^2 наборами значений двоичных переменных, обозначающих подмножества объектов S_{ij} с соответствующими значениями предикатов.

Интерпретация формулы с дизъюнкцией $p(x) \vee q(x)$ двух одноместных предикатов на диаграммах Эйлера-Венна выглядит следующим образом:



Предикат $r(x) = p(x) \vee q(x) = p \vee q$ истинный, если **$p(x)$ или $q(x)$** истинно при некоторой подстановке x/a, $a \in W$. Экзистенциал $R = (P \cup Q)$ – объединение соответствующих экзистенциалов.

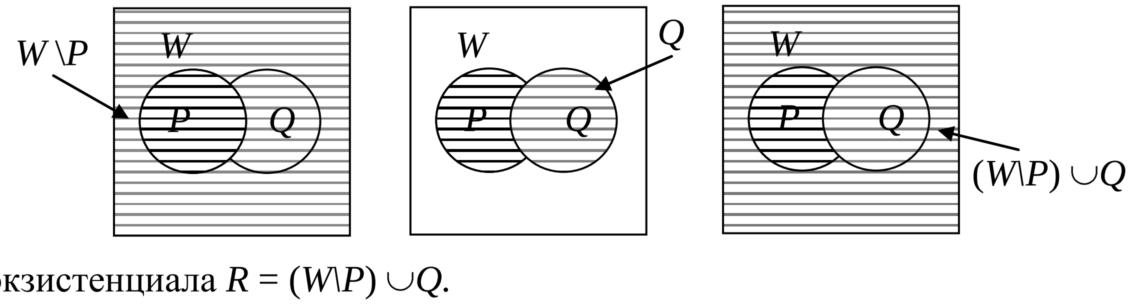
Пример.

Пусть $x \in [0,5 \div 20]$ и $((x > 0,5) \vee (x=0,5))$, тогда ($x \geq 0.5$ и $x \leq 20$).

Импликация одноместных предикатов

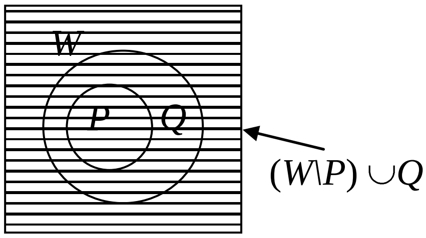
$$r(x) = p(x) \to q(x) = \neg p(x) \vee p(x).$$

Истинно для объектов, где свойство $p(x)$ **ложно** или свойство $q(x)$ **истинно.** Соответствующая формула для



экзистенциала $R = (W \backslash P) \cup Q$.

Если формула $p \to q$ тавтология и истинна на всех наборах значений двоичных переменных, то это свойство можно показать на диаграмме как отношение включения для всех интерпретаций *P, Q*.



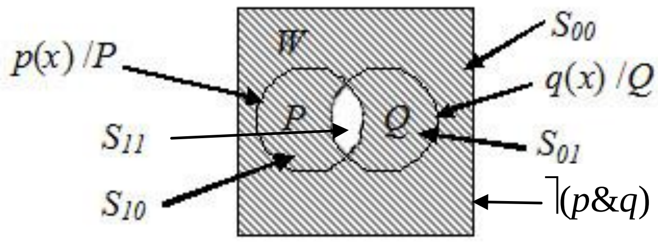
Аналогичным образом можно интерпретировать и определить другие логические связки – эквивалентность и исключающее ИЛИ.

На диаграммах Эйлера-Венна можно продемонстрировать тождества и законы булевой алгебры на всевозможных интерпретациях формулы с двумя предикатами, что эквивалентно интерпретации формулы с булевскими переменными, представляющими формулу с предикатами.

Пример.

Представим на диаграмме правило (закон) де Моргана:

$$\neg(p\&q) = \neg p \vee \neg q.$$



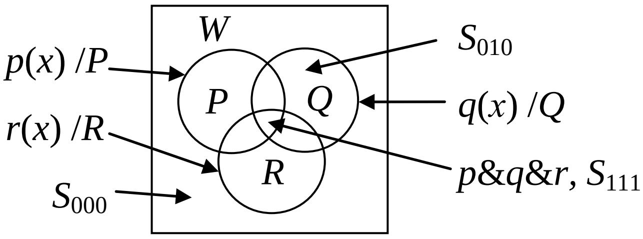
Формула с тремя одноместными предикатами $F[p(x), q(x), r(x)]$ определяет объекты в *W* тремя свойствами.

Утверждение 2.3.

Всевозможные интерпретации одноместных предикатов $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ разделяют область интерпретации *W* не более, чем на восемь подмножеств (2^3=8), для которых двоичные переменные, обозначающие возможные значения предикатов, pqr = {000, 001,…, 111} представляют каждое из подмножеств S_{000}, S_{001}, ..., S_{111}.

Следствие. Все возможные интерпретации формулы для трех предикатов со свободными переменными определяются 2^3 наборами значений двоичных переменных, обозначающих подмножества объектов S_{pqr} с соответствующими значениями предикатов.

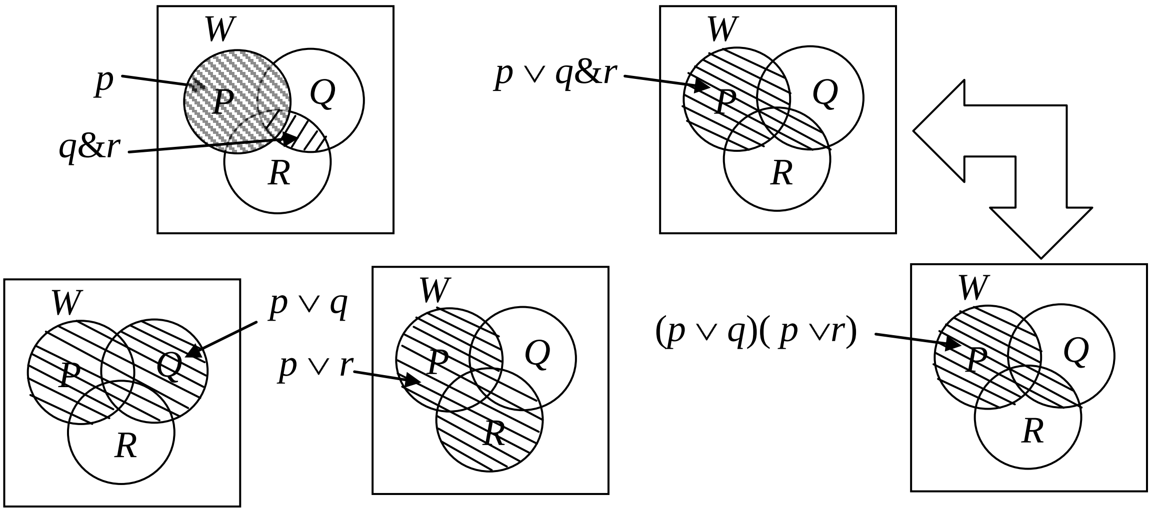
На диаграммах Эйлера-Венна демонстрируются тождества и законы булевой алгебры на всевозможных интерпретациях формулы с тремя предикатами, что эквивалентно интерпретации формулы с булевскими переменными, представляющими формулу с предикатами.



Диаграммы Эйлера-Венна могут быть использованы для подтверждения тождеств в булевой алгебре предикатов, так как любая формула имеет графическую интерпретацию и соответствующие фигуры для левой и правой частей тождеств совпадают.

Пример.

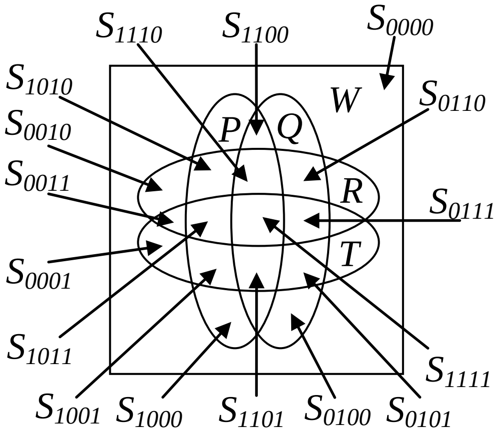
Проверим на диаграммах дистрибутивный закон: $p \vee qr = (p \vee q)(p \vee r)$.



Формула с четырьмя одноместными предикатами $F[p(x), q(x), r(x), t(x)]$ определяет объекты в W четырьмя свойствами.

Утверждение 2.4.

Всевозможные интерпретации одноместных предикатов $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $t(x)$ разделяют область интерпретации W не более, чем на шестнадцать подмножеств (2^4=16), для которых двоичные переменные, обозначающие возможные значения предикатов, $pqrt$ = {0000, 0001,…, 1111} представляют каждое из подмножеств S_{0000}, S_{0001}, ..., S_{1111}.



Следствие. Все возможные интерпретации формулы для трех предикатов со свободными переменными определяются 2^4 наборами значений двоичных переменных, обозначающих подмножества объектов S_{pqrt} с соответствующими значениями предикатов.

Формулу с пятью и более предикатами интерпретировать диаграммами невозможно, но **по индукции** можно принять за истинное следующее утверждение.

Утверждение 2.5.

Всевозможные интерпретации формулы с N одноместными предикатами $P_1(x)$, …, $P_N(x)$ **разделяют** область интерпретации W не более, чем на 2^N подмножеств, для которых наборы значений булевских переменных p_1 .. p_N представляют каждое из подмножеств.

Следствие. Возможно представление произвольных интерпретаций формулы с предикатами булевскими формулами на 2^N наборах значений булевских переменных, обозначающих значения истинности предикатов**.**

По аналогии с Wff-формулами в логике высказываний в логике предикатов будем называть **Wff-формулами** формулы, состоящие из предикатов, правильно попарно соединенных связками.

Wff-формулы с предикатами также являются предикатами (аналогия с Wff формулами высказываний) – область предикатов **замкнута** относительно применимых к ним связок (операций в алгебре предикатов).

Определения.

1) Переменная в формуле **свободная**, если не используется ни в одном из предикатов в подстановке значения из области интерпретации.

2) Переменная в формуле **связанная**, если хотя бы в одном из предикатов используется подстановка значения для переменной из области интерпретации и предикат принимает значение из $\{T, F\}$.

В формуле $t(x) = (p(x) \vee q(x)) \& p(5) \vee q(5)$ переменная x - связанная в $t(x)$ подстановкой x/c в $p(5)$ и $q(5)$ и свободна в $p(x)$ и $q(x)$.

В частном случае, свободные переменные в предикатах могут иметь разные обозначения и подразумевать ограниченные и различные области интерпретации. Для записи таких рассуждений в [9] используются **ограниченные предикаты.**

При этом в интерпретациях $p(x/c)$ и $q(y/c)$ два 0-местных предиката не равны, а ограниченные подстановки могут быть заданы ограничивающим предикатом $e(x)$ для $q(y) = e(x) \& q(x)$.

Однако дальнейшего развития в приложениях теория ограниченных предикатов не получила и в рассуждениях можно принять, что рассматривается общая область интерпретация W.

Определение.

Формула **замкнута,** если содержит связанную переменную. В рассмотренном примере $t(x)$ - замкнутая формула.

Следствие. Любую незамкнутую формулу с предикатами можно **интерпретировать** на подмножествах из области определения W, рассматривать ее как утверждение относительно свойств некоторого множества и представить соответствующий экзистенциал формулой с использованием операций на множествах.

Например, незамкнутая формула $t(x) = (p(x)\ \&\ \rceil q(x)) \vee r(x)$ может быть интерпретирована как утверждение (предикат) о свойствах экзистенциала S из W и $S = (P \cap (W \backslash Q) \cup R$, где P, Q, R - экзистенциалы, или в алгебраической форме $s = p\ \&\ q \vee r$.

Определение.

Формула с предикатами **выполнима**, если существует интерпретация, где формула принимает значение истинно (T). Формула **общезначима,** если формула истинна (T) на всех интерпретациях.

Заменяя предикаты в формуле атомами, кодирующими номера соответствующих подмножеств из 2^N, проверяем выполнимость, решая **SAT-проблему** полученной логической формулы. Назовем интерпретацию формулы системой различных представителей (СРП) из 2^N подмножеств **М-интерпретацией.**

Утверждение 2.5 а.

Если формула, зависящая от N предикатов, выполнима, то существует, по крайней мере, один набор значений предикатов из 2^N, в котором интерпретация выполнима. Набор определяет свойства (значения соответствующих предикатов) в этой интерпретации.

Пример.

$t(x) = ((p(x) \vee \rceil q(x))\&r(x)) \vee \rceil q(x), \quad x \in W.$

Формула $(p \vee \rceil q)\&r \vee \rceil q$ выполнима, например, при $pqr = 101$.

Утверждение 2.5 б.

Для проверки общезначимости незамкнутой формулы с предикатами выполняется М-интерпретация, что эквивалентно построению таблицы истинности для формулы высказываний, в которой каждый предикат обозначен атомом. При этом применимы алгебраические методы доказательства общезначимости формулы.

Пример.

$(p \vee \rceil q)\&r \vee \rceil q = pr \vee \rceil q$ - формула не общезначима.

Законы логики предикатов с незамкнутыми формулами представлены тождествами, являются обобщением законов логики высказываний 1-15 и могут быть проверены М-интерпретацией на диаграммах Эйлера-Венна.

Следствие. Булева алгебра применима к незамкнутым формулам с предикатами.

2.2. Формулы с многоместными предикатами

Двуместный предикат $P(x, y)$ представляет класс K, на котором определено **бинарное отношение** между объектами из классов A и B. Универсальный класс-область определения предиката $W=A*B$, ($K \subseteq A*B$), $(x, y) \in W$. В частном случае, $W=A*A=A^2$.

Выбирая конкретное отношение $P(x, y)$, заменяем его утверждением, которое может быть истинным или ложным в зависимости от значений пары переменных (x, y). Если подставить только одно значение, например, x/C, то двуместный предикат становится одноместным $P(C, y)$. Если выполнены подстановки констант вместо двух переменных, то $P(x/C, y/D)=CD$ простое высказывание, истинное или ложное для конкретных значений из W.

Пример.
$P(x, y)$ = (x меньше y) или $(x < y)$ – двуместный предикат;
$P(5, y) = (5 < y)$ – одноместный предикат;
$P(4, 10) = (4 < 10)$ истинное высказывание.

Аргументом предиката может быть функция.

Пример.
Предикат $P(y, f(x, z))$ при интерпретации на множестве действительных чисел $(y = f(x, z)) = (y=x*z)$ является определением функции $f(x, z) =x*z$.

Предикат $P(y, f(x, z))$ – бинарные отношения $(y, f(x, z))$ и $s = f(x, z)$ - функциональное отображение в любую область интерпретации, кроме $s\in\{T, F\}$, поэтому при интерпретации $P(y, f(x, z)) = P(y, s)$.

Если принять, что значение функции $s = f(x, z)$ может быть $s\in\{T, F\}$, то формула $P(y, f(x, z))$ относится к **логике второго порядка** – аргументом предиката P является предикат f. В дальнейшем ограничимся формулами **логики первого порядка.**

Утверждение 2.6.
Интерпретация множествами также применима к двуместным предикатам, где элементами множества W являются пары элементов. Следовательно, для формул с двуместными предикатами применима М-интерпретация.

Используя **правило подстановки**, незамкнутую формулу с двуместными предикатами можно привести к формуле с высказываниями и проверить ее на выполнимость или общезначимость, используя М–интерпретацию.

Пример.
Рассуждения, формализованные в логике высказываний, могут быть формализованы в логике предикатов с одной областью определения и

представляют более детально структуру объектов:

если число *P* делит *M***N*, то *P* делит *M* или *N*;

P не делит *M*, число *P* делит *M***N*, следовательно, *P* делит *N*(*c*).

Формула этого рассуждения с предикатами уточняет структуру рассуждения

$R(p, f(m, n)) \to (R(p, n) \vee R(p, m))$;

$\underline{\rceil R(p, m) \& R(p, f(m, n)).}$

$R(p, n)$, где $R(p, n)$ = (p делит n), $f(m, n) = m{*}n$.

Для того, чтобы перейти к высказываниям, выбираем область определения для $p, m, n,$ например, $W(x)$=(x целое число) и $p/5$, $m/6$, $n/7$ – константы из W.

Таким образом,

$R(5, f(6, 7)) \to (R(5, 7) \vee R(5, 6)) = R(5, 6{*}7) \to (R(5, 7) \vee R(5, 7))$.

Обозначив высказывания атомами, истинность любой интерпретации можно исследовать анализом формулы $a \to (b \vee c)$.

Тогда и рассуждение можно представить следующей формулой высказываний:

$(a \to (b \vee c)) \rceil b a \to c = T$, при любых интерпретациях формулы с предикатами.

Следствие 1. Незамкнутая формула с предикатами равносильна некоторой формуле с высказываниями в М-интерпретации.

Любая интерпретация эквивалентна подстановке значений истинности предикатов вместо соответствующих атомов в формуле высказываний, формулы принимают значения T или F.

Формулы с предикатами могут содержать и символы, обозначающие простые высказывания.

Однако, обратное обобщение высказывания в рассуждения с предикатами выполняется не всегда.

Пример.

Курс акций падает (a), если ставки растут (b). Если курс падает (a), то предприниматели разоряются (c). Пусть ставки растут (b), будут ли разоряться предприниматели (c)?

a, b, c – двузначные события, $((b \to a)(a \to c)b) \to c.$

Здесь рассуждение состоит из фактов и записывается в форме высказываний, но при обобщении простых высказываний предикатами возникает затруднение с выбором области определения и обобщением на области определения.

Следствие 2. Таким образом, **обобщение произвольных фактов** в виде правил и переход к формулам с предикатами возможны не всегда.

Многоместный предикат $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ определяет класс n-

местных отношений ($n \geq 2$) в области определения $X_1 * X_2 * \ldots * X_n$, X_i - множества значений аргументов предиката. В частном случае, при изучении свойств предикатов ограничиваются множеством значений

$W = X_1 = X_2 = \ldots = X_n$.

Тогда предикат $P(x_1, x_2, .. x_n)$ определен на множестве W^n.

Аргументами предиката являются *термы*.

Определение.

Термом (t) являются:

1. предметная константа $c \in W$;
2. переменная x, принимающая значение из W;
3. функция $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, принимающая значение из W, где t_i – терм.

Если для термов t_i:

1) выбрана область определения W;

2) конкретные функции, определенные в этой области;

3) содержание предикатного символа P – свойство или отношение на W, то для предиката выбрана ***интерпретация***.

n-местный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ***выполним***, если n–местное отношение истинно в некоторой интерпретации в W. Предикат тождественно-истинный, если он принимает значение T на всех интерпретациях, и предикат тождественно-ложный, если интерпретации не существует.

Пример.

Для предиката $P(t_1, f(t_1, t_2))$:

1. выбрать область интерпретации W для переменных и принять $t_1 = x_1$, $t_2 = x_2$, $(x_1, x_2) \in$ W и константы $a, b, c \ldots \in W$. Пусть $W = \{a, b, c \ldots\}$ - целые числа;
2. выбрать конкретную функцию $f(x_1, x_2) = x_1 * x_2 + a$, значения $t = f(x_1, x_2) \in W$;
3. выбрать конкретное свойство или отношение вместо предикатного символа: $P(x_1, x_1 * x_2 + a) = (x_1 < (x_1 * x_2 + a))$. При подстановках $x_1/1$, $x_2/8$, $a=2$, получим истинное высказывание $(1<(1*8+2))$.

Утверждение 2.7.

Интерпретация множествами также применима и к многоместным предикатам, где элементами множества W являются n-местные отношения элементов.

Следовательно, для формул с многоместными предикатами применима М-интерпретация.

С использованием **правила подстановки** и М–интерпретации, незамкнутую формулу с многоместными предикатами можно привести к формуле с высказываниями и проверить ее на выполнимость или общезначимость.

2.3. Формулы с кванторами

Определение.

Формула с **квантором всеобщности** $(\forall x)P(x)$ - истинное высказывание в области интерпретации W, если на всех значениях из W предикат принимает значение T («для всякого $x \in W$»).

Квантор всеобщности – обобщение конъюнкции на всю область интерпретации, т.е. $(\forall x)P(x) = P(e_1)\&P(e_2)\& \ldots \&P(e_n) = \Pi\, P(e_i)|\, e_i \in W =$
$= \Pi\, P(e_i) = e_i \in \{T, F\}$.

В конечной области W $(\forall x)P(x)$ – конъюнкция простых высказываний e_i.

Высказывание $\Pi P(e_i)$ истинно только тогда, когда истинны все простые высказывания e_i.

Примеры высказываний с квантором всеобщности:

$(\forall x)P(x) = (\forall x)\ (x + x = 2x) = T$, в области действительных чисел.

$(\forall x)P(x) = (\forall x)\ (2x = 5) = F$, если x из области целых чисел.

Если $(\forall x)P(x)$ истинное высказывание (**тавтология**), то экзистенциал $P \subset W$ и $P(x)$ **тождественно-истинный** предикат.

Если $(\forall x)P(x)$ ложное высказывание, экзистенциал $P \subset W$**,** $P(x)$-выполнимый предикат, в частном случае **- тождественно-ложный (противоречие).**

В формуле с несколькими предикатами и кванторами переменные могут быть **связаны** или **свободны**.

Если переменная x в формуле с предикатом находится в области действия квантора, то она ***связанная***. Область действия обозначается скобками.

Если некоторое вхождение переменной x в формуле с предикатом не находится в области действия квантора $\forall x$, то это вхождение x называется ***свободным для квантора***. Одна и та же переменная в формуле может быть связанной и свободной.

Пример.

$\forall y\, [\forall x\, P(x) \vee q(y)] \vee q(x)$, x связана и свободна, y связана.

Для проверки формулы с кванторами на общезначимость может быть использована М-интерпретация.

При этом кванторы навешиваются на свободные переменные. Полученная замкнутая формула заменяется формулой с высказываниями в М-интерпретации и проверяется на общезначимость.

Рассматривается не одно значение-подстановка, а некоторое количество, заменяющее связку “всякий”. Для проверки законов достаточно применить две разные подстановки констант x/a и x/b для $x \in W$ и в соответствующей формуле вместо квантора $(\forall x)P(x)$ иметь ввиду произведение высказываний $\prod_j \lambda(j) = \lambda(a)\lambda(b) = ab.$

Пример.

В формуле $\forall y\ [\forall x\ P(x) \vee q(y)] \vee q(x)$

$\forall y\ [\forall x\ P(x) \vee q(y)] \vee \forall x\ q(x)$ - навешивание

$\prod_i [\prod_j \lambda 1(j) \vee \lambda 2(i)] \vee \prod_j \lambda 2(j)$ - замена

$(ab \vee A)(ab \vee B) \vee AB$ - М-интерпретация.

Пример.

"Для всяких целых x справедливо утверждение, что x четный или нечетный":

$\forall x\ (p(x) \vee \rceil p(x)) = \prod_j \lambda(j) \vee \neg\lambda(j)) = (a \vee \neg a)(b \vee \neg b) = T$ общезначима.

Для **двухместного предиката**

$\forall x \forall y\ P(x,y) = \prod_i \prod_j \lambda(i, j) = \lambda(a,a)\lambda(a,b)\lambda(b,a)\lambda(b,b) = A_a \ \&\ A_b \ \&\ B_a \ \&\ B_b$,

где A_b – булева переменная, представляющая значение $\lambda(a,b)$.

Для **многоместного предиката** $\forall x_1$ **....** $\forall x_n\ P(x_1, \ldots x_n) = = \prod_i \prod_j \lambda(i,\ldots j,\ldots)$ – произведение 2^n высказываний для 2^n подстановок значений $\{a, b, \ldots.\}$ вместо индексов i, j.

Определение.

Формула с **квантором существования** $(\exists x)P(x)$ истинное высказывание, если по крайней мере для одного значения аргумента x из W предикат истинный («существует x из D»).

Квантор существования – обобщение дизъюнкции на область интерпретации W. Если W – конечная область, то

$(\exists x)P(x) = P(e_1) \vee P(e_2) \vee \ldots \vee P(e_n) = \sum_i P(e_i) / e_i \in W = \sum_i e_i$, где $P(e_i) = e_i \in \{T,F\}$ – простое высказывание.

Высказывание $(\exists x)P(x)$ истинное, если $P(x)$ - выполнимый предикат. Экзистенциал выполнимого предиката P - непустое подмножество W.

Если высказывание $(\exists x)P(x)$ ложно, то $P(x)$ невыполнимый (тождественно-ложный) предикат или противоречие, экзистенциал предиката P - пустое подмножество.

Следствие. Для анализа на выполнимость формула со свободными переменными должна быть замкнута кванторами существования. Квантор заменяет сумма для двух подстановок $\{a,b\}$ каждой переменной одноместного предиката $P(x)$.

Примеры.

$\exists x\ P(x) = \Sigma\ \lambda(i) = \lambda(a) \vee \lambda(b) = a \vee b$ – формула выполнима.

$\exists x\ (p(x) \vee \rceil p(x)) = \Sigma(\ \lambda(j) \vee \rceil\lambda(j)) = (a \vee \rceil a) \vee\ (b \vee \rceil b) = T$ – формула общезначима.

Для двухместного предиката $\exists x\exists y\, P(x,y)=\sum\sum\lambda(i,j)= A_a \vee A_b \vee B_a \vee B_b$.

В общем случае формулы могут содержать разные кванторы, константы и функции.

Пример интерпретации формулы с кванторами

$\forall y\, [\forall x\, P(x) \vee q(y)] \vee \exists\, q(x) \;\sim \forall j\, [\forall i\, \lambda(i) \vee \lambda 1(j)] \vee \exists i\, \lambda 1(i) =$

$\prod\limits_{j}[\prod\limits_{i}\lambda(i)\vee\lambda 1(j)]\vee\sum\limits_{i}\lambda 1(i) = (ab \vee c)(ab \vee d) \vee c \vee d = ab \vee cd \vee c \vee d =$

$= ab \vee c \;\vee d.$

2.4. Законы логики предикатов с кванторами

Новые законы представлены формулами с кванторами и для их подтверждения может быть применена М-интерпретация.

2.4.1. Дизъюнктивное расширение области действия кванторов

1. $\exists x\, p(x) \vee \exists y\, q(y) = \exists x\, (p(x) \vee \exists y\, q(y)) = \exists y\, \exists x\, (p(x) \vee q(y))$;
2. $\exists x\, p(x) \;\vee\; \exists x\, q(x) = \exists x\, (p(x) \;\vee\; q(x))$;
3. $\forall x\, p(x) \vee\forall y q(y) \; = \forall x\, \forall y\, (p(x) \vee q(y))= \forall y\, \forall x\, (p(x) \vee q(y))$;
4. $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \rightarrow\forall x\, (p(x) \vee q(x))$.

Доказательство.

1. $\exists x\, p(x) \vee \exists y\, q(y) = \Sigma\lambda_1(i) \vee \Sigma\lambda_2(j) = (a \vee b) \vee (A \vee B) = \exists x\exists y\, (p(x) \vee q(y))$ равносильность выполняется.

Обозначим $A(x,y) = \; [p(x) \vee \exists y\, q(y) \sim \exists y\, \exists x\, (p(x) \vee q(y))]$.

2. Выполним подстановку $A(x, y/x) = A(x,x) = \exists x\, p(x) \;\vee\; \exists x\, q(x) =$
$= \Sigma\lambda_1(i) \vee \Sigma\lambda_2(i) = (a \vee b) \vee (A \vee B) = \exists x\, (p(x) \vee q(x))$ – равносильность (тождество) выполняется и $A(x,y) = A(x,x)$ с учетом подстановки.

3. $\forall x\, p(x) \vee \forall y q(y) \; = \Pi\, \lambda_1(i) \vee \Pi\, \lambda_2(j) = ab \vee AB = F1$
$\forall x\forall y\, (p(x) \vee q(y)) = \Pi\, \Pi\, (\lambda_1(i) \vee \lambda_2(j)) = \Pi(\lambda_1(i) \vee A)(\lambda_1(i) \vee \mathrm{B}) =$
$=(a \vee A)(b \vee A)(a \vee B)(b \vee B) = F1$. Следовательно, $A(x,y)=[\forall x\, p(x) \vee\forall y q(y)=$
$= \forall x\forall y\, (p(x) \vee q(y))]$ – тождество.

При этом *применение кванторов* $\forall x\, \forall y$ *коммутативно.*

4. Выполним подстановку $A(x,y/x)=A(x,x)= A(x)= \alpha \sim \beta$

$\alpha)$ $\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) = \Pi\, \lambda_1(i) \vee \Pi\, \lambda_2(i) = ab \vee AB =$
$= (a \vee A)(a \vee B)\, (b \vee A)(b \vee B) = F1.$
$\beta)$ $\forall x\, (p(x) \vee q(x)) = \Pi\, (\lambda_1(i) \vee \lambda_2(i)) = \; (a \vee A)(b \vee B) \; = F2.$

$F1(x) \rightarrow F2(x)$ тождественно-истинное по правилу УК.

$\forall x\, p(x) \vee \forall x\, q(x) \rightarrow \forall x\, (p(x) \vee q(x))$ – формула общезначима.

Также экзистенциал $F1$ – подмножество $F2$ подтверждает, что расширение области действия квантора может быть не эквивалентно

$A(x,y) \neq A(x,x)$ при подстановке y/x.

Определение.

Терм t **свободен** для замещения y (y/t) в $A(y)$, если $A(t)$ и $A(y)$ имеют одинаково ограниченные кванторами вхождения переменных y и t.

В данном случае $A(x,y) \neq A(x,y/x)$ и квантор $\forall x$ имеют разные области действия.

Следствие. При интерпретации формул с кванторами с изменением наименования переменной эквивалентны (допустимы) замены-подстановки только для тех переменных, которые **свободны** для замещения. В противном случае могут быть получены разные формулы.

Пример для многоместных предикатов [13].

Пусть $A(x,y) = \exists x\, \exists y\, p(x,y)$ при интерпретации $\exists x\, \exists y$ (x ребенок y) $=T$, для (x/y), где $s = y$, $A(x/y,y) = \exists y\, p(y,y) = \exists y$ (y ребенок y) $= F$, так как используется недопустимая подстановка (x/y), где y не свободен для замещения-подстановки вместо x/y, выполнимый предикат становится ложным высказыванием.

Общая формула эквивалентного расширения области действия и вынесения кванторов - $\mathrm{K}xp(x) \vee D = \mathrm{K}x(p(x) \vee D)$, D - не содержит свободной x. М-интерпретацией можно проверить, что все тождества сохраняются.

Если D содержит связанную x, то ее следует переименовать, так как $\mathrm{K}xq(x) = \mathrm{K}yq(y)$.

Таким образом, после переименования x/y приходим к той же формуле $\mathrm{K}xq(x) \vee B = \mathrm{K}y(q(y) \vee B)$, где B не содержит y свободно.

Следовательно, $\mathrm{K}xp(x) \vee \mathrm{K}yq(y) = \mathrm{K}x\mathrm{K}y(p(x) \vee q(y))$.

В частном случае, $\exists x\, p(x) \vee \exists x\, q(y) = \exists x\, (p(x) \vee q(x))$

2.4.2. Конъюнктивное расширение области действия кванторов

5. $\forall x\, p(x) \& \forall y\, q(y) = \forall x\, (p(x) \& \forall q(y)) = \forall x \forall y\, (p(x) \& q(y)) =$
$= \forall y \forall x\, (p(x) \& q(y))$ – тождество.
6. $\forall x\, p(x)\ \&\ \forall x\, q(x) = \forall x\, (p(x)\ \&\ q(x))$ – тождество.
7. $\exists x\, p(x) \& \exists y\, q(\mathrm{y}) = \exists x\, (p(x) \& \exists y\, q(y)) = \exists x\, \exists y\, (p(x) \& q(y)) =$
$= \exists y \exists x\, (p(x) \& q(y))$ – тождество.
8. $\exists x\, p(x)\ \&\ \exists x\, q(x) \leftarrow \exists x\, (p(x)\ \&\ q(x))$ – формула общезначима.

Доказательство.

6. $\forall x\, p(x)\ \&\ \forall x\, q(x) = \Pi\, (\lambda_1(i)\ \&\ \lambda_2(i)) = \forall x\, (p(x)\ \& q(x))$.
7. $\exists x\, p(x)\ \&\ \exists y\, q(y) = \Sigma\lambda_1(i)\ \&\ \Sigma\lambda_2(j) = (a \vee b)\ \&\ (A \vee B) =$
$\exists x\, \exists y\, (p(x)\ \&\ q(y)) = \Sigma\, \Sigma\, (\lambda_1(i)\ \&\ \lambda_2(j)) = \Sigma\, (\lambda_1(i)\ \&\ A \vee \lambda_1(i)\ \&\ D) =$
$= aA \vee aB \vee bA \vee bB = (a \vee b)(A \vee B) = \exists x\, p(x)\ \&\ \exists y\, q(y)$ – тождество.
При этом применение кванторов $\exists x\, \exists y$ коммутативно.

8. $\exists x\, p(x)\ \&\ \exists x\, q(x) = \Sigma\lambda_1(i)\ \&\ \Sigma\lambda_2(i) = (a \vee b)\ \&\ (A \vee B) =$

$=aA \vee aB \vee bA \vee bB = F1$;

$\exists x\,(p(x)\ \&\ q(x)) = \Sigma(\lambda_1(i)\ \&\ \lambda_2(i)) = (aA \vee bB) = F2$.

Экзистенциал $F2$ подмножество экзистенциала $F1$, следовательно, $F2 \rightarrow F1$.

$\exists x\, p(x)\ \&\ \exists x\, q(x) \leftarrow \exists x\,(p(x)\ \&\ q(x))$ и $A(x,y) \neq A(x,y/x)$ - терм x не свободен для замещения x.

Общая формула эквивалентного расширения области действия и вынесения кванторов - $\mathrm{K}x\, p(x)\ \&\ D = \mathrm{K}x(p(x)\ \&\ D)$, D - не содержит свободной x. М-интерпретацией можно проверить, что все тождества сохраняются.

Если D содержит связанную x, то ее следует переименовать, так как $\mathrm{K}xq(x) = \mathrm{K}yq(y)$.

Таким образом, после переименования x/y приходим к той же формуле $\mathrm{K}xq(x)\ \&\ B = \mathrm{K}y(q(y)\ \&\ B)$, где B не содержит y свободно.

Следовательно, $\mathrm{K}xp(x)\ \&\ \mathrm{K}xq(y) = \mathrm{K}x\mathrm{K}y(p(x)\ \&\ q(y))$.

В частном случае, $\forall x\, p(x)\ \&\ \forall x\, q(y) = \forall x\,(p(x) \vee q(x))$.

2.4.3. Законы для формул со смешанными кванторами

9. Общий случай.

Пусть $F(p(x), q(y))$ – формула с одноместными предикатами и применяются кванторы в следующем порядке

$$\exists x\, \forall y\, F(p(x), q(y)),$$

тогда в М-интерпретации

$\exists x\, \forall y\, F(p(x), q(y)) = \sum_i \prod_j F(\lambda_1(i), \lambda_2(j)) =$ (подстановки i/a, i/b, i/a, i/b)

$= F(a,A)*F(a,B) \vee F(b,A)*F(b,B) = xy \vee zk = F1$.

При изменении последовательности применения кванторов

$\forall y\, \exists x\, F(p(x), q(y)) = \sum_i \prod_j F(\lambda_1(i), \lambda_2(j)) = (F(a,A) \vee F(b,A))\&(F(a,B) \vee F(b,B)) =$

$= (x \vee z)(y \vee k) = F2$.

Формулы $F1$ и $F2$ не совпадают, причем $F1 \rightarrow F2$,

$\exists x\, \forall y F(p(x), q(y)) \rightarrow \forall y\, \exists x\, F(p(x), q(y))$ **(общезначима)** и смешанные кванторы, в общем случае, не коммутативны.

Например, в $\exists x\, \forall y\, F(p(x) + q(y)) \rightarrow \forall y\, \exists x\, F(p(x) + q(y))$,
$x = \lambda_1(a) + \lambda_2(a)$, $y = \lambda_1(a) + \lambda_2(b)$, $z = \lambda_1(b) + \lambda_2(a)$, $k = \lambda_1(b) + \lambda_2(b)$.

10. Формулы с дизъюнкцией

$F(p(x), q(y)) = p(x) \vee q(y)$.

$\exists x\, \forall y\,(p(x) \vee q(y)) = \sum_i \prod_j (\lambda_1(i) \vee \lambda_2(j)) =$

$= \prod_j (a \vee b \vee \lambda_2(j)) =$ $(a \vee A)(a \vee B) \vee (b \vee A)(b \vee B) = a \vee b \vee AB.$

$\forall y\ \exists x\ (p(x) \vee q(y)) = \prod_j \sum_i (\lambda_1(i) \vee \lambda_2(j)) = \prod_j (\lambda_1(a) \vee \lambda_1(b) \vee \lambda_2(j)) =$

$= (a \vee b \vee A)(a \vee b \vee B) = a \vee b \vee AB.$

$\exists x\ \forall y\ (p(x) \vee q(y)) = \forall y\ \exists x\ (p(x) \vee q(y)) =$
$= \forall y\ (\exists x\ p(x) \vee q(y)) = \exists x\ (p(x) \vee \forall y\ q(y))$ – тождества.

11. Закон коммутативности для конъюнкции

$F(p(x), q(y)) = p(x)\ \&\ q(y).$

$\exists x\ \forall y\ (p(x) \vee q(y)) = \sum_i \prod_j (\lambda_1(i)\ \&\ \lambda_2(j)) = \sum_i (\lambda_1(i)\ \&\ A)\ \&\ (\lambda_i(i)\ \&\ B) =$

$= aAB \vee bAB = (a \vee b)(a \vee A)(a \vee B)A(A \vee B)(B \vee b)B = (a \vee b)AB.$

$\forall y\ \exists x\ (p(x)\ \&\ q(y)) = \prod_j \sum_i (\lambda_1(i)\ \&\ \lambda_2(j)) = \prod_j (a\ \&\ \lambda_2(j)) \vee (b\ \&\ \lambda_2(j)) =$

$= (aA \vee bA)(aB \vee bB) = (a \vee b)AB.$

$\exists x\ \forall y\ (p(x) \vee q(y)) = \forall y\ \exists x\ (p(x)\ \&\ q(y)) =$
$\forall y\ (\exists x\ p(x)\ \&\ q(y)) = \exists x\ (p(x)\ \&\ \forall y\ q(y))$ – тождества.

12. Коммутативность смешанных кванторов для простой формулы с двухместным предикатом:

1) $\exists x\ \forall y\ p(x,y) = \sum_i \prod_j \lambda(i,j)$, $i, j \in M = \{1, 2\} = \{a, b\}$.

а) применяя квантор $\forall y$, получим $\sum_i (\lambda(i,a)\ \&\ \lambda(i,b))$;

б) применяя квантор $\exists x$, получим формулу

$$(\lambda(a,a)\ \&\ \lambda(a,b)) \vee (\lambda(b,a)\ \&\ \lambda(b,b)).$$

Значения истинностных функций $\lambda(a, a)$, $\lambda(a, b)$, $(\lambda(b, a)$, $\lambda(b, b)$ можно обозначить различными булевскими переменными A, B, C, D, так как в общем случае они не совпадают.

Следовательно, $\exists x\ \forall y\ p(x,y) = A\&B \vee C\&D = (A \vee C)(A \vee D)(B \vee C)(B \vee D) = F1.$

2) $\forall y\ \exists x\ p(x,y) = \prod_j \sum_i (\lambda(i, j) = \prod_j (\lambda(a, j) \vee (\lambda(b, j)) =$

$= ((a, a) \vee \lambda(b, a))((a, b) \vee \lambda(b, b)) = (A \vee C)(B \vee D) = F2.$

Так как $F1 = F2\&f$, то $F1 \rightarrow F2$ по правилу удаления конъюнкции или

$$\exists x\ \forall y\ p(x,y) \rightarrow \forall y\ \exists x\ p(x,y).$$

В [13] примером опровергается обратное утверждение

$$\exists x\ \forall y\ p(x,y)\ \leftarrow\ \forall y\ \exists x\ p(x,y).$$

Если $p(x,y) = (x < y)$, то для целых чисел $\exists x\ \forall y\ p(x,y)=F$, а $\forall y\ \exists x\ p(x,y)=T$.

Смешанные кванторы для двуместных предикатов не коммутативны.

13. Правила де Моргана с кванторами.

$\rceil\forall x\ p(x)= \exists x\ \rceil p(x)$ и $\rceil\exists x\ p(x)= \forall x\rceil p(x)$ – тождества.

14. Замена импликации дизъюнкцией.

$$\forall x\rceil p(x) \vee \forall x\ q(x) = \rceil\exists x\ p(x) \vee \forall x\ q(x) = \exists x\ p(x) \to \forall x\ q(x);$$
$\forall x\ (p(x) \vee q(x)) = \forall x\ (p(x) \to q(x))$ – тождества.

$$\forall x\ (\rceil p(x) \vee q(x)) \leftarrow \forall x\rceil p(x) \vee \forall x\ q(x) = (a \vee A)(b \vee B)\leftarrow ab \vee AB =$$
$$= \forall x\ (p(x) \to q(x)) \leftarrow (\exists x\ p(x) \to\forall x\ q(x));$$

$$\exists x\ (p(x) \to q(x)) = \exists x(\rceil p(x) \vee q(x)) = \exists x\ \rceil p(x) \vee \exists x\ q(x) =$$
$= \rceil\forall x\ p(x) \vee \exists x\ q(x) = \forall x\ p(\mathrm{x}) \to \exists x\ q(x)$ – тождества.

15. Закон существования (ЗС).

$\forall x\ r(x) \to \exists x\ r(x) = \exists x\rceil r(x) \vee \exists x\ r(x) = \exists x(\rceil r(\mathrm{x}) \vee r(x))$ – формула общезначима.

2.5. Нормальные формулы с предикатами

Определение.

Формула в **приведенной форме (ПФ)** не содержит других операций, кроме $\vee$, &, $\rceil$ и кванторов, причем отрицание относится только к предикатам.

Утверждение 2.8.

Для каждой предикатной формулы существует равносильная ей приведенная форма.

Доказательство состоит в применении правила де Моргана и тождественных преобразований, исключающих импликацию и эквивалентность.

Пример преобразования для исключения эквивалентности.

$$\rceil(\forall x\ r(x) \leftrightarrow q(y)) = \rceil(\rceil\forall x\ r(x)\&q(y)\ \vee\ \forall x\ r(x)\&\rceil q(y)) =$$
$$= \rceil(\rceil\forall x\ r(x)\&q(y))\ \&\ \rceil(\forall x\ r(x)\&\rceil q(y)) =$$
$$= (\rceil\rceil\forall x\ r(x) \vee \rceil q(y)))\ \&\ (\rceil\forall x\ r(x) \vee \rceil\rceil q(y)) =$$
$$= (\forall x\ r(x) \vee \rceil q(y))\ \&\ (\exists x\rceil r(x) \vee q(y)).$$

Определение.

Приведенная нормальная форма (ПНФ) $K_1x_1, K_2x_2, \dots K_nx_n$ (M), содержит цепочку кванторов $K_1x_1, K_2x_2, \dots K_nx_n$ (префикс) и следующую за ней приведенную формулу без кванторов M (матрица).

Утверждение 2.9.

Существует эффективная процедура преобразования всякой формулы A в эквивалентную *предваренную нормальную форму* [13].

В общем случае могут быть непосредственно использованы рассмотренные ранее законы расширения области действия кванторов с тождествами в виде:

$\mathrm{K}xq(x) = \mathrm{K}yq(y)$;

$\mathrm{K}yq(y) \vee B = \mathrm{K}y(q(y) \vee B)$, где B не содержит y свободно;

$\mathrm{K}yq(y)$ & $\mathrm{B} = \mathrm{K}y(q(y)$ & $B)$, где B не содержит y свободно

и формула должна быть приведена к формуле без импликаций ПФ.

Целесообразно учитывать неоднозначность для выбора более простого в последующих применениях преобразования в ПНФ (см. Скулемовскую форму). В частности, целесообразно выбирать преобразование, в котором кванторы $\exists$ предшествуют кванторам $\forall$.

Примеры [13].

1. $\forall x\, (A(x) \to \forall y\, (B(x,y) \to \neg\forall z\, C(y,z))) =$ преобразование в ПФ
   $= \forall x\, (A(x) \to \forall y\, (B(x,y) \to \exists z \neg C(y,z)))=$
   $= \forall x\, (A(x) \to \quad (\forall y\, (\neg B(x,y) \vee \exists z \neg C(y,z))) =$
   $= \forall x\, (\neg A(x) \vee \forall y\, (\neg B(x,y) \vee\ \exists z \neg C(y,z)) =$ преобразование в ПНФ
   $= \forall x\ \neg A(x) \vee \forall y\, (\exists z\, (\neg B(x,y)\ \vee\ \neg C(y,z))) =$
   $= \forall x \forall y\, (\neg B(x,y)\ \vee \exists z \neg \mathrm{C}(y,z) \vee \vee \neg A(x)) =$
   $= \forall x \forall y\, \exists z\, (\neg C(y,z) \vee\ \neg A(x)\ \vee\ \neg B(x,y))$;
2. $\forall x\ p(x)\ \vee\ \exists x\ q(x,y)$ & $\forall z\ r(z) =$ сначала необходимо вынести $\exists x$ во внутренних скобках
   $= \forall x\, p(x) \vee \exists x\, \forall z\, (q(x,y)$ & $r(z)) =$ с переименованием x/t
   $= \exists t\, (\forall z\, (q(t,y)$ & $r(z)) \vee \forall x\, p(x)) = \exists t\, \forall z\, \forall x\, (q(t,y)$ & $r(z) \vee p(x))$.

Примеры [15].

1) $\neg(\forall x\, R(x)$ & $\exists y\, Q(x,y)) =$ преобразование в ПФ
   $= \neg(\forall z\, R(z)$ & $\exists y\, Q(x,y)) = \neg\forall z\, (R(z)$ &$\exists y\, Q(x,y)) = \exists z \neg R(z) \vee \neg\exists y\, Q(x,y) =$
   $= \exists z \neg (R(z) \vee \forall y \neg \mathrm{Q}(x,y)) =$ преобразование в ПНФ
   $= \exists z\, \forall y\, (\neg Q(x,y) \vee\ \neg R(z))$.
2) $\exists x\, R(x) \vee \forall x\, Q(x,y) = \exists t\, (R(t) \vee \forall x\, Q(x,y)) = \exists t\, \forall x\, (R(t) \vee Q(x,y))$.

2.6. Теории первого порядка

Теория первого порядка – логическая система с предикатами, в которой выполняются законы логики предикатов и аргументами предикатов могут быть константы, переменные, функции и не могут быть предикаты.

Аксиомы теории – общезначимые формулы логические и собственные.

Логические аксиомы – обобщенные формулы Гильберта и Аккермана [13]:

Для любых A, B, C - формул теории

A1) $A \vee A \to A$;

A2) $A \to (A \vee B)$;

А3) $(A \vee B) \to (B \vee A)$;
А4) $(A \to B) \to (C \vee A \to C \vee B)$;
А5) $\forall x\, A(x) \to A(t)$, t - терм, свободный для x.

В частности, если x/x свободно, то $\forall x A(x) \to A(x)$. Но если не свободно, то может быть ошибка в рассуждении

$$\forall x\, (\neg \forall y\, (x=y)) \to \neg\forall y\, (y=y) = F, \text{ если } x/y \text{ или } t=y.$$

А6) $\forall x\, (A(x) \to B) \to (A \to \forall x\, B(x))$, A не содержит свободных вхождений x.

Когда нарушено требование, пусть $A=B$ и

$$\forall x\, (A(x) \to A(x)) \to (A(x) \to \forall x\, A(x)),$$

тогда $\forall x\, ((x \text{ - четный}) \to (x \text{ - четно})) \to ((x \text{ - четный}) \to \forall x\, (x \text{ - четно})) = F$

$$T \quad \to \quad \underbrace{(T \quad \to \quad F)}$$

$$\underbrace{T \quad \to \quad F}_{F}$$

Исчисление предикатов первого порядка – теория первого порядка, не содержащая *собственных* (отличных от логических) аксиом и область интерпретации не ограничена.

В [13] приведены примеры других теорий с собственными аксиомами – теория частичного упорядочения или теория групп.

Определение.

Модель теории первого порядка – всякая интерпретация (приложение) теории первого порядка в некоторой предметной области. В этой области могут быть собственные законы и специальные символы, обозначающие специальные свойства и отношения и истинны все логические аксиомы.

Правило подстановки [14].

При замещении (подстановке) переменных высказываний и переменных предикатов формулами вместо всех вхождений этих переменных общезначимая формула остается общезначимой.

При этом соблюдаются определенные в [14] ограничения (аналогичное правило в логике высказываний без ограничений).

Пример.

1) $xy[A \vee zH(z,x)\ \&\ \neg A]$.

Подстановка $A/zt[A\&H(z,t_0)]$

$xy[\ zt[A\&H(z,t_0)] \vee zH(z,x)\ \&\ \neg\{zt[A\&H(z,t_0)]\}$.

2) $A \vee xF(x)$; $A/\mathrm{U}(x)$; $U(x) \vee xF(x)$ не допустимо;

$A/\mathrm{U}(z)$; $U(z) \vee xF(x)$ допустимо;

$x\,(A \vee F(x))$; $A/(xU(x))$; $x\,(xU(x) \vee F(\mathrm{x}))$ не допустимо.

Также не допустимы подстановки свободных и замкнутых переменных, изменяющих область действия кванторов. Однако всегда возможны подстановки, изменяющие имя переменной.

Вывод в исчислении предикатов – цепочка формул, полученных из аксиом с применением правил вывода.

1) ***Правило вывода*** (MP)

$$\frac{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}}$$

"Если $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ - формулы с предикатами истинные в интерпретации ***I,*** то $\boldsymbol{B}$ (следствие) формула истинная в этой интерпретации"

2) ***Правило обобщения*** (*Generalization* - GEN)

$$\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}{\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}$$

"Если $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ формула с предикатами истинная в интерпретации ***I,*** то $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ (следствие) формула истинная в этой интерпретации"

Утверждение о полноте исчисления предикатов.

Если в исчислении предикатов формула B выводима ($\mapsto$), то B – общезначимая.

Утверждение Гёделя: если формула B общезначима, то она является теоремой (т.е. она выводима: $\mapsto B$) в исчислении предикатов.

Исчисление предикатов непротиворечиво, т.е не выводимы B и $\rceil B$. Для упрощения преобразований при выводе используются и дополнительные правила как обобщение многократно используемых схем вывода.

Все правила вывода применимы при выводе **из гипотез** – истинных формул в некоторой интерпретации, в результате **вывода** $\boldsymbol{\Gamma} \mapsto \boldsymbol{B}$ формула $\boldsymbol{B}$ – **следствие** – истинная формула в этой интерпретации.

3) правило индивидуализации (ПИ)

$$\frac{\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})},$$ где $\boldsymbol{t}$ – свободные термы для $\boldsymbol{x}$ в $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$,

"Если $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ истинна, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ - истинна в той же интерпретации"..

Доказательство [13].

1. $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ - гипотеза;
2. $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ (4 аксиома);
3. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ (MP 1, 2).

В частном случае возможны следующие подстановки:

- Замыкание квантором всеобщности $\forall x\, A(x) = A(x)$, так как $(\forall x\, A(x) \to A(x))\&(\forall x\, A(x) \leftarrow A(x))$ общезначимы в А5 и GEN;
- $\forall x\, A(x) \to A(b)$, где x/b обобщение УК в логике высказываний;
- $\forall x\, A(x) \to A(f(x))$, где $x/f(x)$;
- $\forall x\, A(x) = A(y)$ – переименование.

4) правило существования (ПС)

$$\frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})}{\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})}$$

"Если $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})$ истинно в некоторой интерпретации, то $\exists \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ истинно в этой интерпретации”.

Доказательство [13].

1. $\forall x \rceil A(x) \rightarrow \rceil A(t)$ (4 аксиома);
2. $(A \rightarrow \rceil B) \rightarrow (B \rightarrow \rceil A)$ (тавтология) =

$= (\forall x \rceil A(x) \rightarrow \rceil A(t)) \rightarrow (\rceil A(t) \rightarrow \forall x \rceil A(x)$;

3. $A(t) \rightarrow \rceil \forall x \rceil A(x)$ (МР 1, 2);
4. $A(t) \rightarrow \exists x A(x)$ (правило де Моргана).

Частные случаи для различных термов:

- $A(x) \rightarrow \exists x\, A(x)$;
- $A(b) \rightarrow \exists x\, A(x)$ – обобщение правила ВД в логике высказываний;
- $A(f(x)) \rightarrow \exists x\, A(x)$;
- $A(y) \rightarrow \exists x\, A(x)$.

5) Транзитивное замыкание 3 и 4 правил - ***закон существования*** (ЗС) в виде $(\forall x)A(x) \rightarrow (\exists x)A(x)$, можно использовать М-интерпретацию этого правила.

6) ***Правило выбора С*** (choice)

$$\frac{\exists x\, A(x)}{A(b)}$$

“Если $\exists x\, A(x)$ истинно, то $A(b)$ истинно.

Допускается только единовременное применение этого правила, имеющего смысл подстановки некоторой константы из D, принимающей произвольное значение. После этого правила не допускается применение правила обобщения GEN.

1. $\forall x\, \exists y\, A(x, y)$ гипотеза;
2. $\exists y\, A(x, y)$ правило индивидуализации А5;
3. $A(x, b)$ С- правило;
4. $\forall x\, A(x, b)$ GEN;
5. $\exists y\, xA(x, y)$ правило существования;
6. $\forall x\, \exists y\, A(x, y) \rightarrow \exists y\, \forall x\, A(x\, ,y)$ по теореме дедукции – если $U \rightarrow B$, то $\rightarrow U \rightarrow B$.

Ранее М-интерпретацией доказывалось, что это неверно и общезначимо $\forall x \exists y A(x,y) \leftarrow \exists\, y \forall (x) A(x,y)$.

Примеры вывода.

1. $$\frac{\exists x\, (p(x) \rightarrow q(x)), \forall x\, p(x)}{\exists x\, q(x)}$$

1) $\exists x\, (p(x) \rightarrow q(x))$ (гипотеза);

2) $\forall x\, p(x)$ (гипотеза);

3) $\exists x\, p(x)$ (ЗС к 2);

4) $\forall x\, p(x) \rightarrow \exists x\, q(x)$ (тождественная замена 1);

5) $\exists x\, q(x)$ (МР к 2,4).

2. $\underline{\forall x\,(p(x) \to q(x)),\ p(a)}$

$q(a)$

1) $\forall x\,(p(x)) \to q(x))$ (гипотеза);
2) $p(x) \to q(x)$ (ПИ к 1);
3) $\exists x\,(p(x) \to q(x))$ (ПС к 2);
4) $p(a) \to q(a)$ (С-правило к 3);
5) $p(a)$ (гипотеза);
6) $q(a)$ (МР к 4,5).

Вывод формулы из гипотез с использованием правил вывода – трудоемкий и не эффективный, требуется изобретательность и неформальные интуитивные шаги.

Теорема Черча [13].

Исчисление предикатов первого порядка **неразрешимо**.

Не существует способа (алгоритма), позволяющего за конечное число шагов построить доказательство теорем в исчислении предикатов.

А это означает, что не существует эффективной машинной процедуры доказательства теорем выводом из гипотез.

Эффективные методы доказательства следствия B из гипотез Γ, заменяющие вывод, следуют из следующих утверждений (теорем).

Утверждение 2.10 [14].

Формула B – логическое следствие из гипотез $\Gamma = F_1, F_2, \ldots F_m$ тогда и только тогда, когда формула

$\Gamma \to B = (F_1 \to (F_2 \to \ldots \to (F_m \to B)) = F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m \to B$ – **общезначима.**

(Обобщение прямого метода доказательства в логике высказываний)

Утверждение 2.11.

Формула B – логическое следствие из гипотез $\Gamma = F_1, F_2, \ldots F_m$, если $F_1 \& F_2 \& \ldots \& F_m \& \neg B$ **противоречие**.

(Обобщение обратного метода доказательства в логике высказываний)

Таким образом, построение вывода заменяет доказательство общезначимости некоторой формулы.

Формулы преобразуются в ПНФ и после этого проверяется общезначимость М-интерпретацией или правилом резолюции.

3. $\underline{\forall x\,(p(x) \to q(x)),\ p(a)}$

$q(a)$

$\Pi(\neg\lambda_1(\mathrm{i}) \vee \lambda_2(\mathrm{i})) \& \lambda_1(a) \to \lambda_2(a)$ доказать общезначимость.

$(\bar{a} \vee a)(\bar{b} \vee b)(\bar{c} \vee c)(\bar{d} \vee d) \,\&\, a \to a;$

$a(\bar{b} \vee b)(\bar{c} \vee c)(\bar{d} \vee d) \to a;$

$\neg(a(\bar{b} \vee b)(\bar{c} \vee c)(\bar{d} \vee d)) \vee a = 1$ общезначимая формула, $q(a)$ – следствие.

В приложениях М-интерпретация – не эффективный, ручной метод доказательства.

Эффективный метод машинного доказательства теорем основывается на применении правила резолюции.

2.7. Метод резолюций в логике предикатов

Для применения метода необходимо устранить кванторы и определить правила интерпретации.

Утверждение 2.11 [7, 16].

Всякую формулу в ПНФ можно привести к форме Скулема без кванторов (Совершенная Скулемовская форма ССФ).

Алгоритм преобразования:

Формула представлена в ПНФ $\mathrm{K}x_1, \mathrm{K}x_2, ..., \mathrm{K}x_n\ \mathrm{M}(x_1, \ldots x_n)$, где смешанные кванторы некоммутативны.

1) Если $\mathrm{K}x_1$ первый слева квантор существования $\exists x_i$, то можно применить С-правило, которое позволяет *элиминировать* квантор:

квантор устраняется и вместо всех вхождений переменной x_1 подставляется константа

$$\exists x_1\ \mathrm{K}x_2, \ldots \mathrm{K}x_n\ (\mathrm{M}(x_1 \ldots x_n)) \mapsto \mathrm{K}x_2, \ldots \mathrm{K}x_n\ (\mathrm{M}(a, \ldots x_n));$$

2) Если первому квантору существования предшествует i кванторов всеобщности, то квантор *элиминируется* следующим образом:

квантор удаляется и вместо соответствующей переменной x_{i+1} подставляется скулемовская функция $f(x_1, \ldots x_i)$.

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_i\ \exists x_{i+1}\ \mathrm{K}_{i+2}, ..., \mathrm{M}(x_1, \ldots x_{i+1}, \ldots x_m) \mapsto$$
$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_i\ \mathrm{K}_{i+2}, ..., \mathrm{M}(x_1, \ldots f(x_1, ... x_i), \ldots x_m).$$

Доказательство [7].

Пусть $\forall x\, \exists y\, R(x, y)$ выполнимо в D. При этом для любого a из D существует b из D такое, что $R(a, b)$ истинно в D. Что эквивалентно утверждению, что существует функция $f(x)$ с областью определения D и принимающая значения в D (отображение $D \rightarrow D$) такая, что для каждого a высказывание $R(a, f(a))$ истинно в D

$$\forall x\, \exists y\, R(x, y) = \forall x\, R(x, f(x)).$$

3) По правилу индивидуализации (ПИ) можно исключить все оставшиеся кванторы $\forall$ и прийти к Совершенной Скулемовской Формуле без кванторов.

Примеры.

1.$F = \exists x\, \forall y\, \forall z\ \exists u\, \forall v\ \exists w\, P(x, y, z, u, v, w) = P(a, y, z, f(y, z), v, g(y, z, v))$.

$a \quad f(y, z) \quad g(y, z, v)$

2. $\exists y\, \forall z\, (\neg D(z, y))\&\forall y\, \exists x\, (F(x, y))\&(\neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y)) =$

$= \exists q\, \forall t\, (\neg D(t, q))\&\exists x\, \forall y\, (F(x, y))\&(\neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y)) =$

$= \exists q\, \forall t\, \exists r\, \forall m\, (\mathrm{F}(r, m)\ \&\neg D(t, q)\&(\neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y)) =$ ПФ

$= F(f(t), m)\&\neg D(t, a)\&(\neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y))$ скулемовская НФ.

ССФ преобразуется в КНФ и представляет собой множество дизъюнктов, к которым добавляется $\neg B$ (теорема 2) – таким образом, задается множество дизъюнктов S.

Если задано множество формул-гипотез A_1, … A_n, то по теореме 2 они объединяются в конъюнкцию $A_1\&...\&A_n\&\neg B$.

Утверждение 2.12.

Формула F противоречива, если S противоречиво (невыполнимо) и существует вывод пустого дизъюнкта.

Унификация – процедура сравнения предикатов и поиск **подстановки-интерпретации**, при которой предикаты совпадают.

Предикаты $P(t_1, \dots t_n)$ и $P(l_1, \dots l_n)$ (t_i и l_i – термы) сравнимы, если существует унифицирующая подстановка для всех пар аргументов

$$(t_i \leftrightarrow l_i).$$

Алгоритм унификации (Martelli-Montanari)

Для выбранных пар дизъюнктов формируется *множество рассогласования:* сопоставляются пары термов и решаются уравнения.

Если пара предикатов $P(t_1, \dots t_n)$ и $P(l_1, \dots l_n)$, то $\{t_1=l_1, \dots t_i=l_i\}$ - уравнения для выбора подстановок или множества рассогласования.

В машинном алгоритме выполняется посимвольное сравнение и выписываются пары символьных $t_1=l_1$ строк-термов с первым различимым символом.

Для каждой пары $t_1=l_1$ подстановка возможна, если один из термов – переменная и ее можно заменить частью или полностью другим термом.

1.2.$x = y$ переменные, заменить x/y для всех x в уравнениях; уравнение исключается;

1.3.$a = x$ и a – константа, заменить x/a для всех вхождений x в уравнения рассогласования;

1.4.$x = f(y)$, x не принадлежит t, применим $x/t = x/f(y)$ ко всем уравнениям.

Допустимые пары рассогласования и соответствующие подстановки

$$\begin{cases} x/y \text{ или } y/x, & \text{если } x=y; \\ x/a, & \text{если } x=a; \\ x/f(y), & \text{если } x=f(y) \text{ или } x=f(a), \text{ но не унифицируется } x=f(x),\ f(x)=a. \end{cases}$$

Примеры.

1. $P(x, f(x)) = P(y, f(b))$

$x = y$ (x/y) $(x/y/b)$

$f(x) = f(b)$ $f(y) = f(b)$ (y/b) $P(b, f(b))$ – унифицированный предикат.

Две последовательные подстановки $x/y * y/b$ и итоговая замена x/b – **наибольший общий унификатор.**

2. $P(a, x, f(g(y)))$

$P(z, f(z), f(u))$

$a = z$ $\quad z/a$

$x = f(z)$ $\quad x = f(a)$ $\quad x/f(a)$

$g(y) = u$ $\quad g(y) = u$ $\quad g(y) = u$ $\quad u/g(y)$

и наибольший общий унификатор $z/a * x/f(a) * u/g(y)$, после унификации

$$P(a, f((a), f(g(y)))).$$

Если унификация выполнена, то возможно применение правил Девиса-Патнема и правила резолюции к предикатам. Если унификация не выполнена, то не возможны и общая интерпретация для этих предикатов, и применение соответствующих правил. Следовательно, необходимо сопоставлять другие пары предикатов и выбирать для них общую интерпретацию – процедура **бектрекинга** (backtracing - откат, или поиск с возвратом, или механизм поиска в глубину)**.**

При этом дизъюнкт может содержать предикаты, имеющие одинаковые предикатные символы. Возможно применение унификации к таким предикатам, если выбранная подстановка применима или терм t свободен для замещения x в $A(x)$.

Правила Девиса – Патнема (DP):

1. Правило тавтологии (исключение тождественно-истинного дизъюнкта) обобщается и на предикаты.

2. Правило чистой литеры (предиката) применяется после унификации, после чего исключаются дизъюнкты с унифицированными предикатами, для которых существуют выполнимые интерпретации.

3. В отличие от логики высказываний унификация имеет локальное применение (для конкретной пары дизъюнктов) и удалять контрарные литералы (предикаты) можно только, если выполняется унификация.

Дизъюнкты, к которым унификация не применялась, сохраняются.

Применение этого правила совмещается с правилом резолюции и сопровождается исключением **наддизъюнктов *D***, для которых полученная резольвента $C \subseteq D$.

Правило резолюции применимо, если контрарные предикаты сравнимы и унифицированы. Если сравниваются и унифицируются единичные предикаты, то вывод завершается – найдено опровержение и, возможно, доказана теорема.

В отличие от логики высказываний может быть не одно опровержение и доказаны несколько различных теорем с различными унифицирующими подстановками.

Пример доказательства с применением правил DP.

F_1: $\forall x\,(c(x) \to w(x)\&r(x))$ $\qquad$ F_1: $\forall x\,(c(x) \to w(x)\&r(x))$

$\underline{F_2\text{: } \exists t\,(c(t)\&o(t))}$ $\qquad$ ССФ $\qquad$ F_2: $\exists t\,(c(t)\&o(t))$

G: $\exists z\,(o(z)\&r(z))$ $\qquad \to \qquad$ $\neg G$: $\neg\exists z\,(o(z)\&r(z)) = \forall z\,(\neg z(o(z) \vee \neg r(z))$

F_1: $c(x) \to w(x)\&r(x)$ $\qquad$ 1) $\neg c(x) \vee w(x)$ $\qquad w(a)$

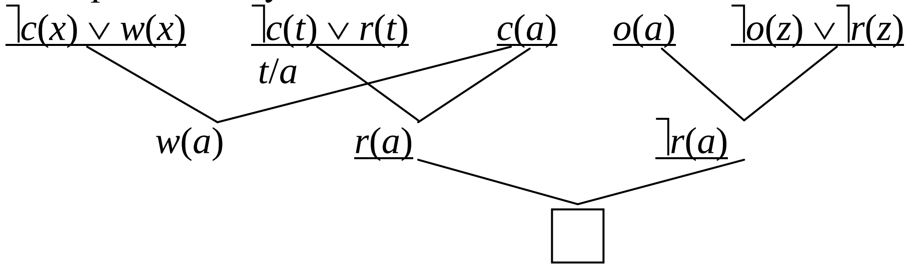
F_2: $c(a)\&o(a)$ $\qquad$ 2) $\neg c(t) \vee r(t)$ $\qquad r(a)$ $\quad \to \quad \square$

$\neg G$: $\neg z(o(z) \vee \neg r(z)$ 3) $o(a)$ $\neg r(a)$

4) $c(a)$

5) $\neg o(z) \vee \neg r(z)$

Если ограничиться применением правила резолюции, то доказательство теоремы следующее:



Применяя правило резолюции попарным перебором упорядоченного списка дизъюнктов, получаем новые дизъюнкты, исключающие соответствующие дизъюнкты, из которых они были получены – остаются $w(a)$, $r(a)$, $\neg r(a)$ и на следующем шаге находим противоречие.

В [16] рассматривается множество стратегий вывода с применением правила резолюций. Дизъюнкты с чистой литерой образуют **множество поддержки**, внутри которого правило резолюции не применяется.

Пример доказательства теорем [17].

Применение логики для решения задач Искусственного интеллекта связывают с доказательством теорем в прикладной теории, построенной на основе гипотез. Всякое истинное утверждение, выводимое в теории, по определению, является теоремой этой теории.

Гипотезы:

F_1: "Если x – отец y и z – отец x, то z – дед y".
$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (F(x, y) \& F(z, x)) \rightarrow \quad D(z, y) = \neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y)$ - (гипотеза);

F_2: "отец t существует у каждого p", можно записать следующей формулой (порядок применения кванторов имеет принципиальное значение)

$$\forall p\ \exists t\ (F(t, p)).$$

После применения преобразования Скулема
F_2: "Для всякого р существует отец $t/f(p)$"

$$F(f(p), p) \qquad \text{(гипотеза).}$$

Теорема
G: "Какой r является дедом m?" или "для всякого ли m существует r–дед?"

$$\forall m\ \exists r\ D(r, m)?$$

Формула инвертируется и после преобразования Скулема

$$\neg G = \exists m \forall r\ \neg D(r, m) = \neg D(r, b).$$

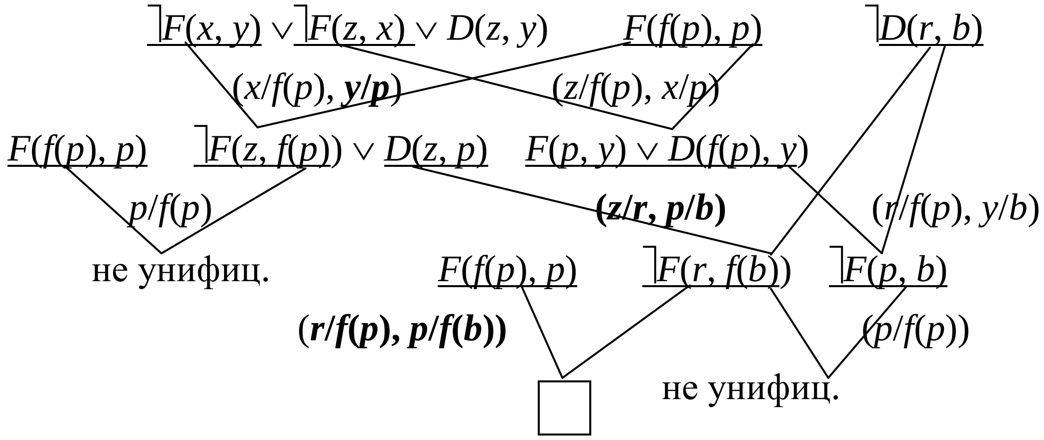
Формулы, подготовленные для доказательства:

F_1: $\neg F(x, y) \vee \neg F(z, x) \vee D(z, y)$;
$\underline{F_2\text{: } F(f(p), p);}$

$\neg G$: $\neg D(r, b)$.

В формуле F_1 пара $\neg F(x, y)$, $\neg F(z, x)$ не унифицируется, так как терм $t = z$ не свободен для замещения x в $\neg F(z, x)$.

Применим правило резолюции:



Последовательно делая подстановки, получили:

$$y/p \to (z/r,\ p/b) \to (r/f(p),\ p/f(b)) \to \mathbf{D(f(f(b), b))},\ \text{т. е.}$$

$\forall m\ \exists z\ D(m, z) = D(f(f(b), b)$ в данной интерпретации **доказана теорема:**

"отец отца b является его дедом"

Получена новая информация - знание.

При этом выполнены формальные преобразования, результаты требуют специальной интерпретации – в данном случае смысла функции, полученной формальными преобразованиями. В [17] предлагается модифицированный метод вывода, в котором совмещается формирование ответа и вывод с использованием правила резолюции.

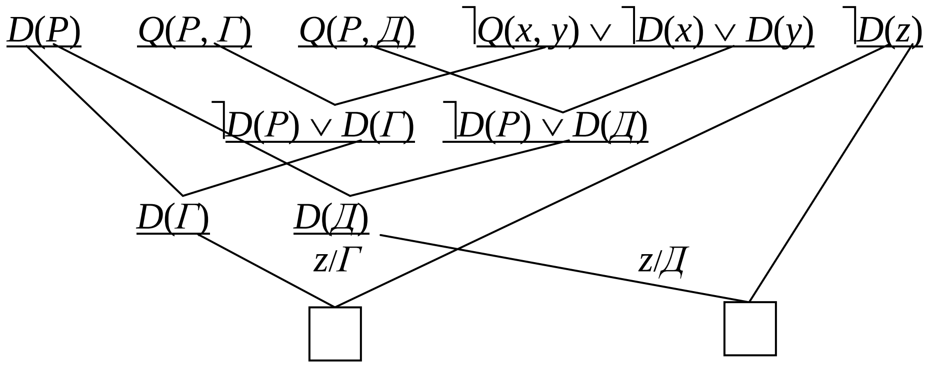
Пример. Задача в информационно-справочной системе.

Рекс – собака $D(P)$;
Рекс – родитель Голда $Q(P, Г)$;
Рекс – родитель Джека $Q(P, Д)$.
Если родитель животного собака, то животное – собака
$Q(x, y) \& D(x) \to D(y)$.

Какие существуют собаки? $\exists z\ D(z)$?

Описание задачи в дизъюнктах:
$D(P)$;
$Q(P, Г)$;
$Q(P, Д)$;
$\neg Q(x, y) \vee \neg D(x) \vee D(y)$ не унифицируются D, так как не свободны для замещения в Q;
$\neg D(z)$.

Вывод – доказательство теорем.



$z \in \{P, Г, Д\}$ ответ получен в результате доказательства теоремы $\exists z\, D(z)$.

2.8. Приложения логики предикатов

Помимо рассмотренных примеров машинного доказательства теорем в задачах **искусственного интеллекта**, в информационно-справочных системах, рассматриваются несколько прикладных задач, которые также могут быть сформулированы в логике предикатов.

2.8.1. Применение логики в базах данных

Базы данных - важнейшая область информатики, в которой изучаются методы организации данных разнообразных прикладных областей и алгоритмы управления данными - доступ, преобразования, оптимизация хранения и др.

Данные имеют сложную структуру, определяемую таблицами, которые являются многоместными отношениями.

Логика эффективно применима при описании данных и разработке методов доступа, формулируемых в виде задачи логического вывода в информационно поисковых системах [18].

Пример структуры данных [19].

Данные определяются многоместными предикатами и задаются таблицами:

Поезд (x, y, z)

Номер поезда x	**Откуда** y	**Куда** z
28	Москва	Казань
10	Смоленск	Казань

Категория поезда (x, y)

Номер поезда x	**Категория** y
28	Скорый
10	Пассажирский

Обслуживание (x, y)

Номер поезда x	**Обслуживание** y
28	Буфет
10	Ресторан

Расписание (x, y, z, k) t = {<20, 20> . . . }

Номер поезда x	**Время отправления <час, мин>** y	**Время прибытия <>** z	**Время в пути <>** k
28	<20.20>	. . . .	. . . .
10	<10.15>		

Остановки (x, y, z, k)

Номер поезда x	**Остановки** y	**Время прибытия** z	**Время отправления** k
28	Муром	<23.20>	<23.25>
10			

В данном приложении используются различные области интерпретации переменных $x_1 \in Q_1$; $x_n \in Q_n$.

Рассмотрим расширенную область интерпретации:

$Q = Q_1 \vee Q_2 \vee . . . \vee Q_n$

Теперь все переменные могут быть определены в одной области интерпретации; к предикатам применимы связки и законы теории первого порядка.

Следующая логическая формула связывает заданные отношения в составе утверждения

$$\exists x\ \exists y\ \exists z\ \exists t\ \exists p\ (\text{остановка}(x, \text{Муром}, y, z)\ \&\ ((\text{Поезд}(x, \text{Москва}, t) \vee \vee\ \text{Поезд}(x, \text{Тверь}, p))$$

Интерпретация этой формулы при подстановке конкретных данных из таблиц и является ответом на следующие запросы к базе данных:

1) Существует ли данная остановка на пути из Москвы или Твери? Ответом на этот вопрос (запрос) является хотя бы одна подстановка, при которой формула выполнима.

2) Показать все остановки заданного маршрута

3) Номер поезда, который останавливается в Муроме в t = <23.20>.

2.8.2. Применение логики к программам [9, 16]

Программы разрабатываются интуитивно, вследствие этого могут быть допущены принципиальные ошибки.

Предписывающие (вычислительные) алгоритмы могут быть представлены неформальным описанием в виде блок-схем. Описание состоит из последовательности шагов – операторов и инструкций. Предписывающий алгоритм исполняется (интерпретируется) неймановской машиной и является ее программой.

Проверка корректности неформального алгоритма может быть основана на логической модели алгоритма, исследования которой могут быть выполнены формальными логическими методами [16].

В программе выбираются контрольные точки (узлы), которым ставят в соответствие предикаты, обозначающие состояние программы в соответствующих узлах.

Термы t_i обозначают переменные и их значения в процессе выполнения программы.

Логическое описание семантики программы:

1) если i и j – это вход и выход операторной вершины, то переход из i в j – это дуга, которая определяется формулой $Q_i(t_1\, t_2 \ldots t_n) \to Q_j(l_1\, l_2 \ldots l_n)$, где $l_j = f(t_1 \ldots t_n)$ - обозначение соответствующего преобразования, выполняемого оператором;

2) если i и j – вход и выход условной вершины. Тогда дуге «$i \to j$» ставится в соответствие формула с контрольным предикатом

$$Q_i \,\&\, P \to Q_i, \quad \text{где } P = P(t_1 \ldots t_n) \text{ - контрольный предикат;}$$

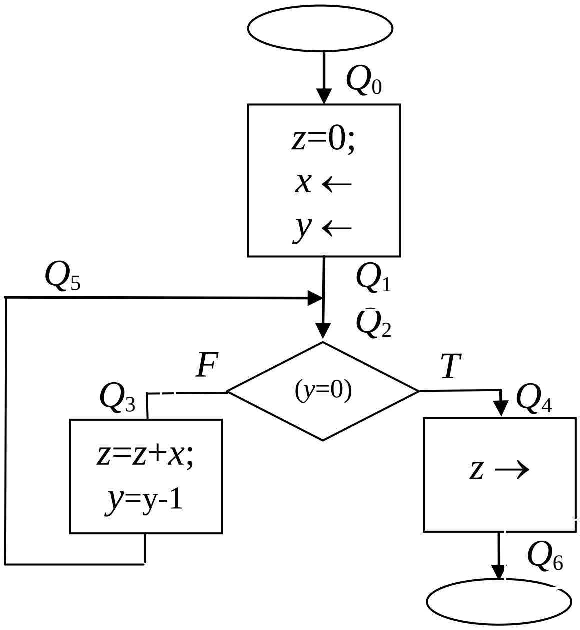
3) узел Q_k объединяет два и более состояний Q_i на входе операторной или условной вершины и записывается в виде тождества

$$Q_k = \sum Q_i(t_1\, t_2 \ldots t_n);$$

4) начало программы Q_0 - нульместный предикат (простое высказывание);

5) конец программы Q_k.

Пример логического описания программы «умножения».



x, y – целые числа;
x – множимое; y – множитель;
z – произведение вычисляется по формуле $z = \sum_x y$.

Формулы $\boldsymbol{F}$, описывающие программу:

1. $Q_0 \to Q_1(x, y, z=0) \& (y \geq 0) \& (x \geq 0)$;
2. $Q_1(x, y, 0) \to Q_2(x, y, 0)$;
2. $Q_2(x, y, z) = Q_1(x, y, 0) \vee Q_5(x, y, z)$;
3. $Q_2 \& (y = 0) \to Q_4(x, y, z)$;
4. $Q_2 \& (y > 0) \to Q_3(x, y, z)$;
5. $Q_3(x, y, z) \to Q_5(x, y - 1, z + x)$;
6. $Q_4(x, y, z) \to Q_6(x, y) \& (y = 0)$.

Контрольные свойства - инварианты в программе:

7. $Q_3(x, y, z) \& (z > 0) \to Q_5(x, y - 1, z + x) \& (z > x)$;
8. $Q_3(x, y, z) \& (z = 0) \to Q_5(x, y - 1, x)$.

Задачи анализа программы:

1. Доказать, что при любых исходных данных программа имеет завершение;

$$F \mapsto \forall x\, \forall y\, (\, Q_6\, (x, y) \,\&\, (y = 0)).$$

2. Интерпретация формул для конкретных исходных данных эквивалентна исполнению программы.

1) подстановка значений переменных после ввода данных в формулу 1.

$$y = 5,\ \ x = 10;$$

2) интерпретация формул после подстановки значений переменных.

$$Q_1(x, y, z = 0)\&(y \geq 0) = Q_1(10, 5, 0)\&(5\geq 0) = Q_1(10, 5, 0);$$

3) переход к следующей формуле, в которой условие импликации истинно и запуск итерационного процесса интерпретации (Q_1=T):

1. выполняются формулы, пока F_{i+1} не равно F_i;
2. формулы можно упорядочить для ускорения итерации;
3. формулы можно интерпретировать параллельно.

3. Символическое тестирование и частичные вычисления – при не полностью определенных данных с целью тестирования алгоритма, в результате интерпретации при частично определенных данных будет получена формула, которая совпадает с исходным определением метода вычисления.

Задаемся множимым $x = a$; и множителем $y = 3$.

Интерпретация:

$Q_0 \rightarrow Q_1(x = a, y = 3, z = 0) \rightarrow$
$\rightarrow Q_2(a, 3, 0) \rightarrow Q_3(a, 3, 0) \rightarrow$
$\rightarrow Q_5(a, y = 2, z = 0 + a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_2(a, 2, a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_3(a, 2, a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_5(a, y = 1, z = a + a) \rightarrow$
$\rightarrow \mathrm{Q}_2(a, 1, a + a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_5(a, y = 0, z = a + a + a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_2(a, 0, a + a + a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_4(a, 0, a + a + a) \rightarrow$
$\rightarrow Q_6(a, 0)$ - конец программы.

Подтверждается исполнение формулы $z = a*3 = \sum_x y = \boldsymbol{a + a + a}$.

4. В традиционном программировании используются **контрольные формулы**, в которых проверяется состояние данных в конкретных точках программы. В языках программирования (С++, Паскаль) используется оператор **assert (логическая формула с предикатами**), при интерпретации этой формулы формируется признак (0 или 1), по которому можно контролировать возможные ошибки в исходных данных и вычислениях.

Выводы

В узком исчислении предикатов переменные являются пропозициональными переменными, именные переменные и переменные представляющие предикаты. В формулах этого исчисления кванторы связывают только именные переменные. Это исчисление явно не завершено.

Например, формула $\forall \boldsymbol{P} \forall \boldsymbol{x} \, (\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) \vee \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}))$ выполняется для любого предиката $\boldsymbol{P}$. Значит, мы должны располагать квантором общности для предиката. С другой стороны формула $\forall \boldsymbol{x} \; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ явно не общезначима. Но она выполняется для некоторых $\boldsymbol{F}$. Чтобы выразить это мы должны располагать и кванторами существования для предиката, и выполнимость этой формулы записать так: $\exists \boldsymbol{F} \; \forall \boldsymbol{x} \; \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$.

Исчисление предикатов, получаемое посредством применения квантора общности и квантора существования не только к предметным переменным, но и к переменным предикатам, принято называть расширенным исчислением предикатов. Очевидно, что все правила узкого исчисления предикатов распространяются как на расширенное исчисление предикатов, так и на любую систему, получаемую присоединением к расширенному исчислению предикатов каких угодно аксиом и новых правил образования истинных формул. Справедливость этого ясна, так как все аксиомы и правила вывода исчисления предикатов, на основании которых выведены производные правила, во всех случаях сохраняются.

Смешение символов для разных формул не может произойти, так как из контекста, обычно, видно, в каком формализме выводится та или иная формула.

Расширенное исчисление предикатов и полученные из него некоторые системы посредством добавления к его аксиомам аксиом специальной структуры дали возможность получить очень важные результаты в теории множеств, геометрии, арифметике, теории алгоритмов и во многих других областях. Однако как показали К. Гедель и др., проблема разрешимости в таких системах становится очень запутанной. И все дело в том, что, формализуя словесный оборот «все» с помощью квантора $\forall$ мы пытаемся заключить бесконечное в конечные рамки. Но при этом мы можем рассчитывать лишь на частный успех.

Алгоритмическая неразрешимость расширенного исчисления предикатов, формализованной теории множеств, формализованной арифметики и других формальных систем лишний раз доказывает, что математика не является нанизыванием силлогизмов в направлении, избранном наугад. Алгоритмическая неразрешимость показывает, что математическое исследование включает в себя интуицию, догадку, воображение и другие элементы творчества!

Задачи в логике предикатов

(записать утверждения формулами с предикатами, преобразовать их к ССФ)

1. Мощность любого подмножества (z) множества (t) (z подмножество t) не больше мощности множества (t). $\forall z \forall t\ (z \subset t) \to (m(z) \le m(t))$, z, t- множества.

2. Если две прямые на плоскости не параллельны ($\neg(x \parallel y)$), то они имеют общую точку (предикаты: b – плоскость, $a1$, $a2$ - прямые, c - точка, $a1 \| a2$, $a1$ на b).

Содержательная интерпретация

$\forall a1\ \forall a2\ \exists b\ [((a1 \text{ на } b)(a2 \text{ на } b) \neg(a1 \| a2)) \to \exists c\ (c \text{ на } a1)(c \text{ на } a2)]$.

В общем виде

$\forall a1\ \forall a2\ \exists b\ [L(a1, b) \& L(a2, b) \& \neg P(a1, a2) \to \exists c\ L(c, a1) \& L(c, a2)]$.

Области определения A={прямые}, B={плоскость}, C={точка}.

3. Через две различные точки проходит одна прямая

$\forall c1\ \forall c2\ \exists a1\ \exists a2[((c1 \ne c2)(c1 \text{ на } a1)(c2 \text{ на } a1)) \to (a2 = a1)]$.

4. Все, кого любит Джон, любят музыку.

$\forall x\ (L(D, x) \to B(x))$.

Анна любит музыку. $B(A)$

Следовательно, Джон любит Анну. $L(D, A)$.

$\forall x\ (L(D, x) \to B(x))$, $\quad \neg L(D, x) \vee B(x)$, $\quad B(A)$, $\quad \neg L(D, A)$.

$B(A)$

$L(D, A)$

правило резолюции не применимо, поэтому быть уверенным в этом нельзя.

5. Предок предка данного индивидуума также предок этого индивидуума.

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ (x \text{ предок } y) \& (y \text{ предок } z) \to (\text{x предок } z)$.

Не существует предка самого себя. $\neg\exists t\ (t \text{ предок } t)$.

Следовательно, существует некто, не имеющий предков.

$\exists x \neg\exists\ m\ (m \text{ предок } x)$.

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ P(x, y) \& P(y, z) \to \mathrm{P}(x, z)$, $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee P(x, z)$, $\neg P(t, t)$,

$\neg\exists t\ \ P(t, t) = \forall t\ \neg P(t, t)$, $\exists x \neg\exists m\ P(m, x)$,

$\neg\exists x \neg\exists m\ P(m, x) = \forall x\ \exists m\ P(m, x) = P(f(x), x)$.

$\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee \underline{P(x, z)} \qquad \underline{\neg P(t, t)} \quad P(f(x), x)$

$(x/t,\ z/t)$

$\neg P(t, y) \vee \underline{\neg P(y, t)} \qquad \underline{P(f(x), x)}$

$(y/f(x),\ t/x)$

$\neg P(x, f(x))$

дальше не унифицируется и вывод не подтверждается.

6. Всякий парикмахер x бреет всех тех и только тех y, кто не бреет-

ся сам.

$\forall x \exists y$ (x - парикмахер)&(x бреет y) $\rightarrow \neg$(y бреет y).

$\forall x \exists y\, P(x) \& B(x, y) \rightarrow \neg B(y, y)$.

В Джонсвиле все бреются сами, $\forall y$ (y бреет y). $\forall y\, B(y, y)$.

Следовательно, в Джонсвиле нет парикмахеров $\neg \exists z\, P(z)$.

7. Никакой торговец старыми автомобилями не покупает старые автомобили.

$\forall x$ (x торговец старыми автомобилями) $\rightarrow \neg x$ (x покупает старые автомобили).

Некоторые покупатели старых автомобилей обманщики.

$\exists x$ (x покупает старые автомобили) $\rightarrow$ (x обманщик).

Следовательно, существуют обманщики, которые не торгуют старыми автомобилями.

$\exists t$ (t обманщик) $\rightarrow \neg t$ (t торговец старыми автомобилями).

8. Если философ дуалист ($D(x)$), то он не материалист

$$(\neg M(x)),\ \forall x\, (D(x) \rightarrow \neg M(x)).$$

Если философ – материалист, то он может быть дуалистом или метафизиком

$$\exists x\, ((M(x) \rightarrow D(x) \vee F(x)).$$

Сократ не метафизик. $\neg F(C)$.

Кто Сократ?

$\forall x\, (D(x) \rightarrow \neg M(x)) \rightarrow$частный случай (правило замыкания)

$(D(C) \rightarrow \neg M(C))$,

$\exists x\, ((M(x) \rightarrow D(x) \vee F(x)) \rightarrow (\neg M(C) \vee D(C) \vee F(C))$,

$\neg F(C)$.

1) $\neg D \vee \neg M$ $\qquad \neg D \vee \neg M$ $\qquad \neg$M - Сократ не материалист.

2) $\neg$M $\vee D \vee F$ $\qquad \neg M \vee D$

3) $\neg F$

9. Если число простое ($P(x)$), то некоторые четные числа ($O(y)$) делятся на это число ($D(z, f(x, y)) = (z=y/x)$. $\forall x\, (P(x) \rightarrow \exists y \exists z\, (O(y) \& D(z, f(x, y))$.

Если число нечетное ($\neg O(y)$), то любое простое число ($P(z)$) не делится на него. $\forall y\, (\neg O(y) \rightarrow \forall z\, \neg \exists t\, (P(z) \& D(t, f(z, y)))$.

Для того, чтобы число было нечетным, необходимо, чтобы число было простым и не делилось на два.

$$\forall y\, O(y) \rightarrow P(y) \& \neg \exists z\, D(z, f(2, y)).$$

10. Для каждой пары натуральных чисел m и n существует такое натуральное число p, что $m + p = n$.

$\forall y \forall x$[(x натуральное)&(y натуральное)$\rightarrow \exists p$ ((p натуральное)&($m + p = n$))].

Всякое натуральное число меньше его квадрата

$$\forall x\, ((x \text{ натуральное}) \rightarrow (x < x^2)).$$

11. Некоторые республиканцы любят демократов.

$$\exists x \forall y\ (R(x) \to D(y) \& L(x, y)).$$

Ни один республиканец не любит социалистов.

$$\rceil \exists x \forall y (R(x) \to S(y) \& \rceil L(x, y)).$$

Следовательно, ни один демократ не является социалистом.

$$\rceil \exists z\ D(\mathrm{z}) \& S(z).$$

12. Все рациональные числа являются действительными числами.

$\forall x$ [(x рациональные) → (x действительное)].

Некоторые рациональные числа целые.

$\exists z$ (z рациональные)&(z целое).

Следовательно, некоторые действительные числа целые.

$\exists y$ [(y действительное)&(y целое)].

13.Отец отца данного индивидуума является дедом индивидуума.

$\forall x \forall y \forall z\ f(x, y) \& f(y, z) \to D(x, z).$

У всякого индивидуума есть отец.

$\forall x\ \exists y\ f(x, y).$

Следовательно, у каждого индивидуума есть дед.

$\forall x \exists y\ D(x, y).$

14. Фирма Widco поставляет отвертки $P(W, o)$.

Фирма Bronco – шурупы $P(B, h)$.

Фирма Elco – набор инструментов $\forall x\ P(E, x)$.

Если существует фирма, которая поставляет набор инструментов, то она поставляет и шурупы.

$$\exists y \forall x\ P(y, x) \to P(y, h).$$

Кто поставляет шурупы?

$\exists z\ P(z, h).$

15. Можно обманывать некоторых все время, $\exists x \forall t\ fool(x, t)$.

Можно обманывать всех некоторое время, $\forall x \exists t\ fool(x, t)$.

Но нельзя обманывать всех все время. $\rceil \forall x \forall t\ fool(x, t)$.

Следовательно, существует некто, кто может быть обманут только однажды $\exists x\ \exists t\ fool(x, t) \& \exists p\ fool(x, p) \to (t = p)$.

16. Докажем справедливость следующего рассуждения.

Посылки:

$F1$: некоторые пациенты любят докторов.

$F2$: ни один пациент не любит знахарей.

Заключение:

R: никакой доктор не является знахарем.

Выделим элементарные высказывания:

$P(x)$: “x – пациент”;

$D(x)$: “x – доктор”;

$Z(x)$: “x – знахарь”;

$L(x, y)$: “x любит y ”.

Предикатная запись рассуждения:

$F1$: $(\exists x\, P(x))(\forall y\, D(y))L(x, y)$, некоторые пациенты любят (всех) докторов.

$F2$: $(\forall x\, P(x))(\forall y\, Z(y))\urcorner L(x, y)$, ни один пациент не любит (всех) знахарей.

R: $(\forall x\, D(x))\urcorner Z(x)$, никакой доктор не является знахарем.

Раскрытие предикатов:

$F1$: $\exists x\, [P(x))\&\ \forall y\, (D(y)\rightarrow L(x, y))]$,

$F2$: $\forall x\, [P(x))\rightarrow \forall y\, (Z(y)\rightarrow \urcorner L(x, y))]$,

R: $\forall x\, (D(x)\rightarrow \urcorner Z(x))$.

Отрицание заключения:

$\urcorner R$: $\exists x\ \urcorner(\urcorner D(x) \vee \urcorner Z(x))$.

Представление посылок и отрицания заключения в предваренной конъюнктивной нормальной форме:

$F1$: $\exists x\ \forall y\ [P(x))\&(\urcorner D(y) \vee L(x, y)]$,

$F2$: $\forall x\ \forall y\ (\urcorner P(x) \vee \urcorner Z(y) \vee \urcorner L(x, y))$,

$\urcorner R$: $\exists x\ D(x)\&Z(x)$.

Представление посылок и отрицания заключения в скулемовской нормальной форме:

$F1$: $\forall y\ P(a))\&(\urcorner D(y) \vee L(a, y))$,

$F2$: $\forall x\ \forall y\ (\urcorner P(x) \vee \urcorner Z(y) \vee \urcorner L(x, y))$,

$\urcorner R$: $D(b)\&Z(b)$.

Замена переменных:

$F1$: $\forall y\ P(a))\&(\urcorner D(y) \vee L(a, y))$,

$F2$: $\forall x\ \forall z\ (\urcorner P(x) \vee \urcorner Z(z) \vee \urcorner L(x, z))$,

$\urcorner R$: $D(b)\&Z(b)$.

Здесь произведена замена переменных, связанных квантором всеобщности: в $F2$ переменная y заменена на z с тем, чтобы не было коллизий с утверждением $F1$.

Дизъюнкты для доказательства методом резолюции:

1. $P(a)$
2. $\urcorner D(y) \vee L(a, y)$
3. $\urcorner P(x) \vee \urcorner Z(z) \vee \urcorner L(x, z)$
4. $D(b)$
5. $Z(b)$.

Резольвенты:

6. $L(a, b)$ резольвента (4) и (2)
7. $\urcorner P(a) \vee \urcorner Z(b)$ резольвента (6) и (3)
8. $\urcorner Z(b)$ резольвента (7) и (1)
9. $\square$ резольвента (8) и (5) пустая.

Доказательство методом резолюции позволяет построить словесную форму убедительного доказательства, каждый шаг которого обоснован. Посылки и заключение те же.

Предположим противное, то есть что существует некий доктор, одновременно являющийся знахарем. Пусть этот человек b (отрицание следствия $D(b)\&Z(b)$). Тогда из утверждения $F1$ следует, что существует пациент (назовем его a), который любит всех докторов и, конечно, любит конкретного доктора b (первое заключение - $L(a, b)$). Отсюда и из второго утверждения $F2$ следует, что или a не пациент, или b не знахарь (заключение 7: $\rceil P(a) \vee \rceil Z(b)$. Но из утверждения $F1$ мы знаем, что a – пациент (дизъюнкт (1): $P(a)$), а из отрицания заключения ($\rceil R$) по предположению, b – знахарь (дизъюнкт (5): $Z(b)$. Таким образом, мы пришли к противоречию и, следовательно, заключение нашего рассуждения верно.

3. Логическое (сентенциальное) программирование

Логическое программирование - метод решения задач, основанный на логике. Язык программирования – **Пролог**. История создания языка связана с осознанием возможности построения универсальной модели преобразования символьных данных при решении задач искусственного интеллекта - языки и методы решения таких задач впервые реализованы в системах SmallTalk, Planner, Lisp.

Ален Кольмеро в 1971 г. предложил язык для решения задач с логическими базами знаний. В 1982 г. Osterby T. разработал интерпретатор языка. В 1984 разработан компилятор языка для PC.

Дальнейшее развитие языка связано с устранением ограничений, свойственных чисто символической обработке данных, – добавление графики, численной арифметики, списковых структур данных и человеко-машинного интерфейса.

Таким образом, поздние версии фирмы Borland -, Турбо -, PDC -, Visial - Пролог не столь очевидно связаны с логикой, изучение и применение языка могут быть организованы без использования логики в явном виде [20].

Синтаксис и семантика языка Пролог могут быть определены логическими обозначениями, однако явная алгоритмическая запись преобразований данных отсутствует, что позволяет обозначать метод решения задач в Прологе как не алгоритмический, сентенциальный, декларативный [20].

Программа состоит из объявлений (деклараций) – отсутствуют общепринятые управляющие конструкции do, while, for, … Интерпретатор языка сам принимает решение, как получить ответ на запрос.

Алгоритм = Логика + Управление.

Логика - определение области знаний (модель области);

Управление - интерпретатор языка.

3.1. Декларативная семантика программ Пролога

Декларативная модель – определяет истинность отношений, представленных формулами логики предикатов первого порядка.

Начальник (Фамилия, Оклад):

Служащий (Фамилия, Оклад), Оклад > 20000

Декларативное прочтение: Некто Начальник, если …

Программа $P = \{F_i\}$ – множество ССФ формул, определяющих отношения и свойства в некоторых областях (не обязательно в одной) областях интерпретации.

Синтаксис предложений – формулы с Хорновскими дизъюнктами.

Хорновский дизъюнкт содержит не более одного (+) положительного литерала, соответствующее условное выражение содержит в виде следствия однолитерный дизъюнкт (Предикат). В явном виде отсутствуют логические операции $\urcorner$, $\vee$, & вместо них используются запятые и знак (-) в теле правила.

if a then b; $a \to b$; $\rceil a \vee b$; записывается как b:-a, где b- голова, a-тело;
if $a\&c$ **then** b; $a\&c \to b$; $\rceil a \vee \rceil c \vee b$; записывается как b:-a, c, где b- голова, a, c-тело.

Дизъюнкты называются правилами (**клаузами** – Clauses) с предикатами и записываются с использованием содержательных обозначений предикатов:

Grandparents(x, z): - parent(x, y),
parent(y, z).

Таким образом, записано правило "Если (x родитель y) и (y родитель z), то (x дед (бабушка) z)".

Sister(x,y): - parent(z, x),
parent(z, y),
female(x).

" Если (z родитель x) и (z родитель y) и (x женского рода), то (x сестра y)"

?- $a(X)$, $b(X, Y)$; $c(Z)$.

Сначала проверяется истинность $a(X)$ и $b(X, Y)$ и если неудача, то проверяется по ИЛИ $c(Z)$.

Допускается применение инверсии - встроенный предикат **not**
Сельский_Житель(X):-
not(Горожанин(X)),
not(Житель-пригорода(X)).

Предикаты, аргументы которых заданы константами (высказывания), называются фактами и просто перечисляются:
male(Tom)
male(Jim)
female(Liz)
female(Pat)
parent(Tom, Liz).

Для запуска программы должна быть сформулирована **цель – предикат со знаком вопроса.**
? – parent(x, Ann), parent(x, Pat)
"Кто является родителями Ann и Pat?"

Таким образом, данный пример имеет отношение к базе данных.

Выполнение программы – доказательство (вывод) цели с использованием унификации и правила резолюции.

Решение задачи – ответ на вопрос – это значения переменной x, при которых предикаты цели истинны T.

Таким образом, если P-программа и $B1\&B2\& ...\&B$n – цели, то

$P \to B1\&B2\& ...\&B$n выполнимо, а

$P \rightarrow \neg(B1\&B2\& \ldots \&B\text{n})$ противоречие.

Цели при выполнении опровергаются согласованием термов в предикатах цели с правилами и фактами.

Согласование в логическом программировании не совпадает с унификацией. Отличие в том, что допускается рекурсивное применение подстановки ($x/f(x)$). Таким образом, разрешено **рекурсивное** исполнение программы, заменяющее цикл с параметрами в традиционном программировании.

Рекурсивные определения:

Предок (*А*, *Б*):-

Родитель (*В*, *Б*).

Предок (*А*, *В*):-

Родитель (*В*, *Б*),

Предок (*А*, *В*).

Пример вычисления $f(x)=x!$.

Программа состоит из факта и одного правила

fact(0, 1) обозначает базис рекурсии 0! = 1,

fact(x, y) $\leftarrow$ fact(x -1, $f(y, x)$) правило вычисления факториала $f(y, x) = y*x$.

Цель ?fact(8, y) - вычислить y = 8!

Работа программы по правилу резолюции

fact(0,1) $\neg$fact(8, y) fact(x, y) $\vee$ $\neg$fact(x-1, $f(y, x)$)

$y/f(y, x)$, $x/8$

$\neg$fact(7, $f(y,8)$) fact(x, y) $\vee$ $\neg$fact(x-1, $f(y, x)$)

$y/f(y, x)$, $x/7$

$\neg$fact(6, $f(f(y, 8), 7)$) fact(x, y) $\vee$ $\neg$fact(x-1, $f(y, x)$)

$y/f(y, f(y, 8))$, $x/6$

$\neg$fact(5, $f(f(f(y, 8), 7), 6)$)

fact(0, 1) $\neg$fact(0, $f(f(f(f(y, 8), 7), 6), \ldots , 1)$)

$x/0$, $y/1$

Решение $f(f(f(f(y, 8), 7),6), .., 1)$ при $y/1$ определяется рекурсивной формулой 8*7*6* …*1 – формула далее не унифицируется, но возможна обратная подстановка $y/1$.

3.2. Процедурная семантика программ Пролога

Начальник(Фамилия, Оклад) :-

Служащий(Фамилия, Оклад), Оклад >20000

процедурное прочтение: Процедура Начальник – запрос и вызов процедуры с этим именем, для ее выполнения следует выполнить процедуры в условии в определенной последовательности.

Более близкой к традиционному представлению об алгоритме и его исполнению является процедурная семантика программы Пролога, в большинстве своем реализуемая в известных системах фирмы Borland.

Программа – множество правил вида
$A \leftarrow B1, B2, ..., B\mathrm{m}$, где $B\mathrm{i}$ – процедуры, вызываемые с головы A, которая является входом в это множество процедур, называемое телом процедуры.

Цели – упорядоченное линейно множество литералов (запросов-вызовов процедур) $C1, C2, ..., C\mathrm{n}$.

Таким образом, организован порядок вызова процедур исполнения программы, называемый линейной резолюцией (SLD – State Linear Definition).

Пусть исходное упорядоченное множество целей

$$C1, C2, \ldots, C\mathrm{n}.$$

Найти правило (клауз) и согласовать его аргументы с первым литералом из головы $A \leftarrow B1, B2, ..., B\mathrm{m}$. Клаузы должны иметь различные переменные – переименовать при необходимости.

Заменить $C1$ телом процедуры для первой найденной и согласованной с целью головы

$$B1, B2, ..., B\mathrm{m}, C2, \ldots, C\mathrm{n}.$$

Продолжать исполнение с $B1$.

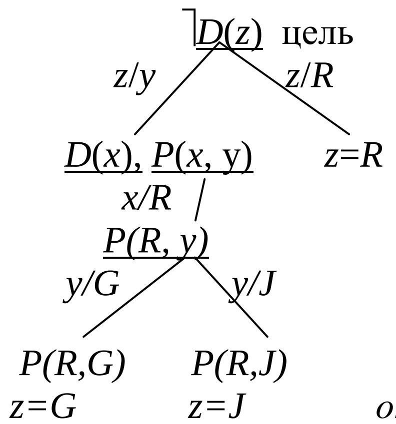
С процедурной семантикой согласуются встроенные процедуры человеко-машинного интерфейса (графика, клавиатура), структуры данных и численная арифметика, ввод-вывод, работа с файлами, экранами.

?-*X* is 10*4
X=40
?-*X* is 3, *X*<4
X=3
tes.

Для демонстрации вычислений используется дерево вычислений.

Пример.

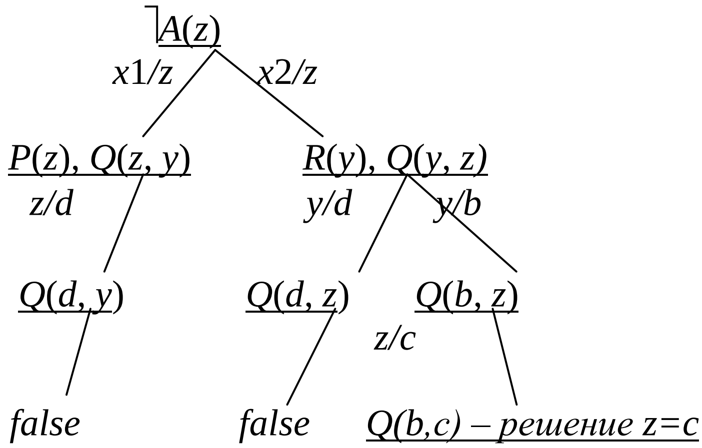
Рекс – собака $D(R)$;
Голден - родитель Рекса $P(R, G)$;
Джон - родитель Рекса $P(R, J)$;
Если родитель животного собака, то животное тоже собака
$\forall x \forall y\ P(x, y) \& D(x) \rightarrow D(y)$.
Какие здесь существуют собаки?
$\exists z\ D(z)$.



ответ: $z=\{R, G, J\}$.

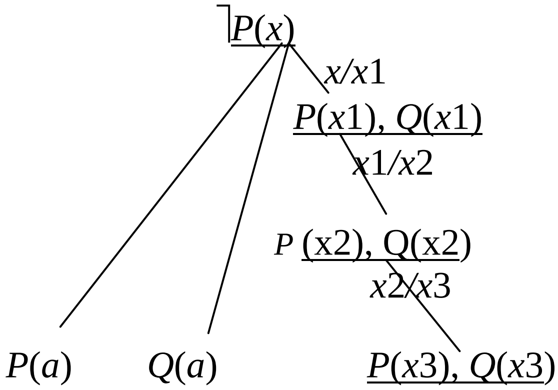
Пример.

$P(d)$
$Q(b, c)$
$R(d)$
$R(b)$
$A(x1) \leftarrow P(x1), Q(x1, y)$
$A(x2) \leftarrow R(y), Q(y, x2)$
$\urcorner A(z)$



Пример рекурсии.

$Q(a)$
$P(a)$
$P(f(x))$: $\urcorner P(x)$, $\urcorner Q(x)$
$\urcorner P(x)$



Выводы

Логика является математической дисциплиной имеющей, фундаментальное значение для математики и разнообразных приложений:

- в гуманитарных науках - основа правильных логически корректно построенных рассуждений.
- в технических науках позволяют формализовать сложные практические задачи проектирования и перейти к их автоматизированному решению.

Самостоятельное значение имеет логическое программирование, в котором используется декларативное описание задачи вместо традиционного процедурного (алгоритмического). И это дает определенные преимущества при решении задач искусственного интеллекта, при разработке баз знаний и информационно-справочных систем.

4. Прикладная логика

4.1. Схемотехника логических утверждений

Цифровая схемотехника в общем случае реализует логику технических утверждений в различных технологиях.

Пример перехода от рассуждений к схемам в **Логическом управлении**.

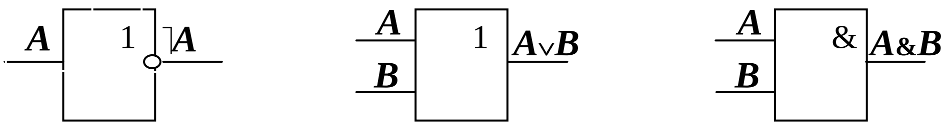
“Включить свет (Q), если на улице темно (не B) И не включено освещение (не S) или наступило утро (U) и закрыты шторы (не H)”.

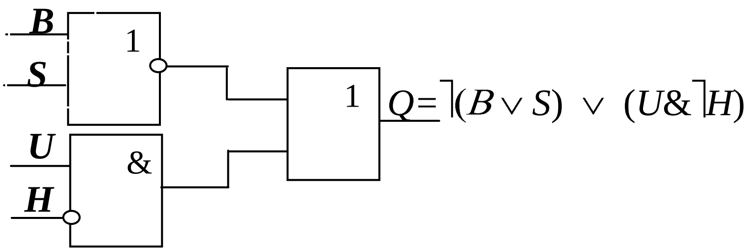
Рассуждение запишем в виде формулы и обозначим ее как функцию

$$Q(B, U, S, H) = \neg B \& \neg S \vee U \& \neg H = \neg(B \vee S) \vee (U \& \neg H).$$

S, H, B, U – двоичные датчики со смыслом: S = (включено освещении), H = (шторы закрыты), U = (таймер, контролирующий время суток).

Графический язык **Функциональных блоков (FBD) –**





4.2. Приложения многозначной логики в моделировании схем

Из многочисленных способов кодирования информации особый интерес представляет многозначная (более двух значений переменных) логика, как один из опытов расширения границ осознания и формального описания логических связей реального мира. При общепризнанном значении двоичной логики Я.Лукашевич [21] обратил внимание на многозначность как способ отображения различных оттенков информации в рассуждениях.

Таким образом, возникло направление многозначной логики, в которой работали многие известные математики, экономисты, философы, заинтересованные в повышении качества передачи информации в рассуждениях. Многозначные признаки информации – различные уровни дискретности (0, 1, 2), в измерениях (мало, много, среднее значение), ощущениях и представлениях требуют оценки и распознавания, несмотря на нечеткость значений.

4.2.1. Временное моделирование цифровых схем

В цифровых САПР задача моделирования и тестирования работоспособности – обязательный этап и, по существу, единственный доступный метод проверки качества и точности синтеза схем с учетом реальных условий их работы на этапе проектирования.

Двузначные, по применению, дискретные сигналы вследствие емкостной нагрузки могут быть представлены как трехзначные или четырехзначные на переходах, когда формируются значения на выходах логических элементов.

Значения сигналов могут быть представлены как четырехзначные {*L*, *H*, *x*/, *x*\}, где {*L*, *H*} - постоянные, *x*/ - положительный фронт, *x*\ - отрицательный фронт.

Работу элементов с такими сигналами можно представить таблицами, заменяющими традиционные таблицы истинности

A	**⌉A**
0	**1**
x/	**x**
x	**x/**
1	**0**

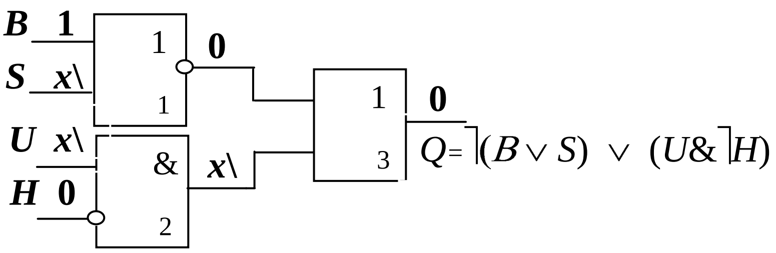
A&B	**0**	**x/**	**x**	**1**
0	**0**	**0**	**0**	**0**
x/	**0**	**x/**	**0**	**x/**
x	**0**	**0**	**0**	**x**
1	**0**	**x/**	**x**	**1**

A∨B	**0**	**x/**	**x**	**1**
0	**0**	**x/**	**x**	**0**
x/	**x/**	**x/**	**1**	**x/**
x	**x**	**1**	**x**	**x**
1	**1**	**x/**	**x**	**1**

A⊕B	**0**	**x/**	**x**	**1**
0	**0**	**x/**	**x**	**1**
x/	**0**	**x/**	**0**	**0**
x	**x**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**x**	**x/**	**1**

Задержка Пример вычислений

A	**ΔA**
0	**0**
x/	**1**
x	**0**
1	**1**



Здесь на входе элемента 1 изменяется сигнал *x*\=H/0, в дальнейшем на выходе элемента 3 формируется устойчивое значение нуль.

Набор значений на входе схемы выбирается с учетом задержек сигналов.

Промежуточные значения формируются с задержками и при моделировании выбирается такт для расчета значений сигналов с учетом задержек на элементах и соединениях.

4.2.2. Четырехзначное логическое моделирование

Современные системы проектирования цифровых схем в ПЛИС контролируют их работоспособность тестированием.

Языки HDL (Hardware Description Language) проектирования Verilog и VHDL [22] содержат соответствующие средства поддержки временного моделирования и опираются на четырехзначные логические вычисления.

1) **Verilog**

Рассматриваются значения сигналов 0, 1 – для L и H уровней, X – неопределенный уровень.

В начале моделирования запоминающие элементы имеют неопределенное состояние – соответственно, связанные с ними логические эле-

менты по входу также неопределенны. При моделировании для разработчика это указывает на необходимость начального сброса.
Z – плавающий уровень на входах вызывает неопределенное значение X на выходе.

Таблицы истинности для определения логических связок с четырехзначными сигналами

&	0	1	Z	X
0	0	0	0	0
1	0	1	X	X
Z	0	X	X	X
X	0	X	X	X

2) В системах с **VHDL** при моделировании рассматриваются пять значений сигналов. К перечисленным для Verilog сигналам добавляется значение U – неинициализированное значение

&	0	1	Z	X	U
0	0	0	0	0	0
1	0	1	X	X	X
Z	0	1	X	X	U
X	0	X	X	X	U
U	0	U	U	0	U

Аналогичным образом могут быть представлены другие связки в логических рассуждениях.

4.3. Тестирование логических схем

4.3.1. Структурное троичное тестирование цифровых схем

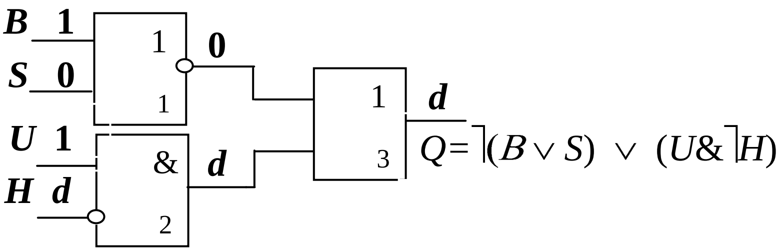
При изготовлении и отладке реальных цифровых схем ставится задача тестирования. Предполагаются возможные неисправности, относящиеся к “катастрофическим” - обрыв соединений или короткие замыкания.

При этом можно сформировать смежные тесты, в которых при изменении одного из входов изменяется выход схемы. Для известной структурной схемы можно представить это изменение как последовательное переключение входов и выходов элементов (путей).

Обозначим значения входной переменной {0, 1, *d*), где *d* - изменение переменной 0/1 или 1/0.

Тогда в контрольном тесте обнаруживается неисправность, если значение (*d*) должно распространяться до контролируемого выхода схемы. Тест может быть выбран при моделировании схемы с использованием табличных троичных логических функций – последовательным подбором значений входов при условии, что выход принимает значение (*d*).

Пример вычислений



Полная таблица наборов теста, полученная от выхода к входам (сверху вниз)

$$
d \leftarrow 0d \leftarrow
\begin{array}{cccc}
\mathrm{B} & \mathrm{S} & \mathrm{U} & \mathrm{H} \\
1 & 0 & 1 & d \\
0 & 1 & d & 1 \\
1 & 1 & 1 & d \\
1 & 1 & d & 1
\end{array}
\qquad
d \leftarrow d0 \leftarrow
\begin{array}{cccc}
\mathrm{B} & \mathrm{S} & \mathrm{U} & \mathrm{H} \\
d & 0 & 0 & 0 \\
0 & d & 1 & 0 \\
d & 0 & 0 & 1 \\
0 & d & 0 & 1
\end{array}
$$

Полный тест, контролирующий все пути схемы, может быть выбран по полученной таблице истинности, например,

	B	S	U	H
1	1	0	1	*d*
2	1	0	*d*	1
3	*d*	0	1	0
4	0	*d*	1	0

Смежные наборы представляют порядок тестирования

	B	S	U	H
4	0	1	1	0
3, 4	0	0	1	0
1, 3	1	0	1	0
1, 2	1	0	1	1
2	1	0	0	1

4.3.2. Структурное четырехзначное тестирование

Для приведенной выше схемы моделирование может быть выполнено в четырехзначной логике (x- безразличное значение {0,1} на входах и выходах, d – {0/1 или 1/0} контролирует изменения сигналов в соединениях между элементами схемы.

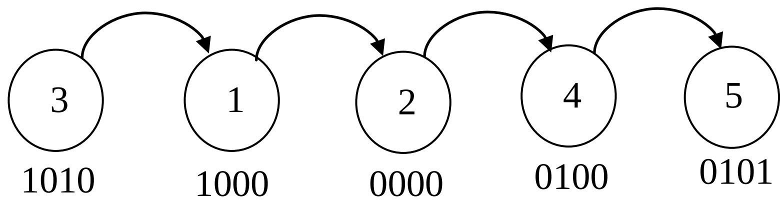
$$\boldsymbol{Q = (\neg B \,\&\, \neg S) \vee (U \& \neg H)}$$

B	***S***	***U***	***H***	**1**	**2**	**3**
d	**0**	**0**	***x***	***d***	***x***	***d***
0	***d***	**0**	***x***	***d***	***x***	***d***
1	***x***	***d***	**0**	***x***	***d***	***d***
x	**1**	**0**	***d***	***x***	***d***	***d***

Тесты определяются наборами значений входных переменных,

	B	S	U	H
1	d	0	0	x
2	0	d	0	x
3	1	x	d	0
4	x	1	0	d

Граф смежности тестовых наборов



Минимальная последовательность тестов $3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 5$.

4.3.3. Алгебро-топологические методы синтеза тестов логических схем

В работах [23, 24, 25] рассматриваются алгебраические методы синтеза структурных тестов логических схем с использованием трехзначной логики.

Задача синтеза комбинационных схем состоит в построении схем реализующих заданную булеву функцию или систему булевых функций на основе определенной системы логических элементов.

Задача анализа комбинационных схем состоит в определении функции реализуемой заданной схемой и показателей ее качества. В частном случае задача анализа состоит в определении реакции схемы на заданные наборы входных сигналов (переменных).

Верификацию схемы можно производить с помощью комплексного кубического покрытия [23]. Пусть значения реализуемой функции f заданы в виде таблицы истинности. Обозначим значение выхода построенной схемы Z. Построим метамодель схемы для значений выхода Z, равных 0 и 1, в виде комплексного покрытия КС = $C^0(Z) \cup C^1(Z)$. Для верификации схемы требуется установить соответствие между покрытиями $C^1(f) \cup C^0(f)$ и $C^0(Z) \cup C^1(Z)$, которое может быть выполнено либо с использованием операции вычитания кубов покрытий (#), либо с помощью операции пересечения кубов покрытий ($\cap$) [26]. При использовании операции вычитания для верификации схемы необходимо, чтобы $C^1(f) \# C^1(Z) = \varnothing$, и достаточно, чтобы $C^1(Z) \# C^1(f) = \varnothing$. Аналогично для покрытий $C^0(f)$ и $C^0(Z)$. Из этого следует, что при использовании операции вычитания достаточно иметь только один тип покрытий: либо единичное $C^1(f)$ и $C^1(Z)$, либо нулевое $C^0(f)$ и $C^0(Z)$.

После применения операций вычитания и пересечения покрытий можно получить четыре возможных отношения:

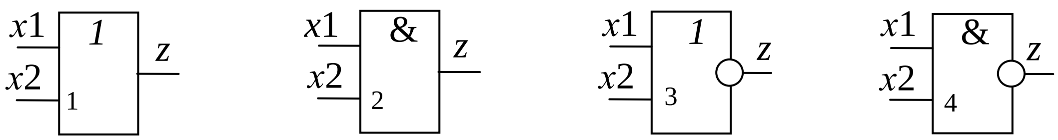
1. $C^1(f) \# C^1(Z) = \varnothing$ и $C^1(Z) \# C^1(f) = \varnothing$, или $C^1(f) \cap C^0(Z) = \varnothing$ и $C^0(f) \cap C^1(Z) = \varnothing$ - это условие полной верификации.

2. $C^1(f) \# C^1(Z) \neq \varnothing$ и $C^1(Z) \# C^1(f) = \varnothing$, или $C^1(f) \cap C^0(Z) \neq \varnothing$ и $C^0(f) \cap C^1(Z) = \varnothing$ - это необходимое, но недостаточное условие верификации.
3. $C^1(f) \# C^1(Z) = \varnothing$ и $C^1(Z) \# C^1(f) \neq \varnothing$, или $C^1(f) \cap C^0(Z) = \varnothing$ и $C^0(f) \cap C^1(Z) \neq \varnothing$ - это достаточное, но не необходимое условие верификации.
4. $C^1(f) \# C^1(Z) \neq \varnothing$ и $C^1(Z) \# C^1(f) \neq \varnothing$, или $C^1(f) \cap C^0(Z) \neq \varnothing$ и $C^0(f) \cap C^1(Z) \neq \varnothing$ - условия верификации отсутствуют.

Во 2-ом и 3-ем случаях можно говорить о верификации частично определенных функций с использованием «размытых» множеств, иначе говоря, один объект «делает» больше, чем другой. Таким образом, следует, что полная верификация существует только при выполнении соотношений 1-го случая.

Для построения комплексного кубического покрытия схемы воспользуемся вырожденными покрытиями логических элементов

Основные типы двухвходовых логических элементов и кубические покрытия, описывающие логику их работы, приведены на рис. 4.1.



$$C_1^1 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 1 & \times & 1 \\ \times & 1 & 1 \end{array}\right\} \quad C_2^1 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array}\right\} \quad C_3^1 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \quad C_4^1 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 0 & \times & 1 \\ \times & 0 & 1 \end{array}\right\}$$

$$C_1^0 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \quad C_2^0 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & 0 \end{array}\right\} \quad C_3^0 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 1 & \times & 0 \\ \times & 1 & 0 \end{array}\right\} \quad C_4^0 = \left\{\begin{array}{ccc} x1 & x2 & z \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array}\right\}$$

а *б* *в* *г*

Рис. 4.1. Двухвходовые вентили ИЛИ, И, ИЛИ-НЕ, НЕ-И и их вырожденные кубические покрытия (*а*), (*б*), (*в*) и (*г*), соответственно

Кубические покрытия двухвходовых вентилей легко обобщить для *n*-входовых вентилей.

Например, куб единичного покрытия *n*-входового вентиля И будет содержать *n* значений 1. Нулевое покрытие *n*-входового вентиля И будет содержать *n* кубов, в каждом из которых очередной координате присвоено значение 0, а остальные координаты равны ×.

Для построения модели логической схемы воспользуемся π-алгоритмом [8]. Он относится к прямым методам анализа схем. π-алгоритм представляет из себя процедуру подстановки, в которой используются покрытия логических элементов. Метод позволяет определить множество входных наборов, порождающих на выходе схемы заданное логическое значение.

Исходными данными для π-алгоритма являются одновыходная логическая схема, заданная в виде соединения логических элементов, а также кубические покрытия этих элементов. Результат работы π-алгоритма - кубическое покрытие C^1 или C^0, координатам кубов которого сопоставлены входы логической схемы. Вычисление кубического покрытия одновыходной комбинационной схемы производится по шагам.

1. Фиксируем выход схемы в значении 1 для построения C^1 или в значении 0 для построения C^0.

2. Применяем подстановку, которая сопоставляет значению p, $p \in \{0, 1\}$ на выходе элемента схемы i его кубическое покрытие C_i^p. В кубе, содержащем p по координате, соответствующей элементу i, p заменяется на ×, после чего куб заменяется его пересечением с C_i^p.

3. Если подстановки выполнены не для всех элементов схемы, шаг 2 повторяется.

Рассмотрим процесс построения покрытия на примере. Пусть задана одновыходная комбинационная схема (рис. 4.2), реализующая булеву функцию $z_3 = x_1x_2 \vee x_2x_3$, где x_1, x_2 и x_3 – независимые входы, z_1 и z_2 – промежуточные переменные (выходы элементов схемы), z_3 – выход схемы и в1, в2 и в3 – элементы схемы.

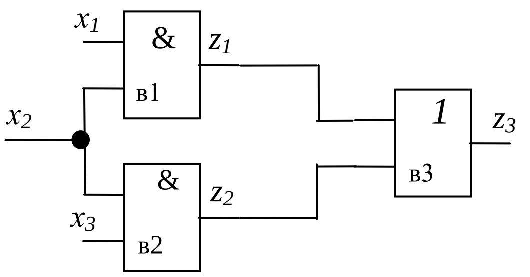


Рис. 4.2. Комбинационная схема

Для каждого элемента в соответствии с его типом (логической функцией) предварительно выпишем вырожденные покрытия по их входам и выходу. В данной схеме использованы две двухвходовые схемы И и одна ИЛИ. Их вырожденные покрытия (рис. 4.1): C_2^1, C_2^0 для элементов в1 и в2 (обозначим $C_2^1(z_1)$ и $C_2^0(z_1)$ для элемента в1; $C_2^1(z_2)$ и $C_2^0(z_2)$ для элемента в2), и C_1^1, C_1^0 для элемента в3 (обозначим $C_1^1(z_3)$ и $C_1^0(z_3)$).

Построение покрытия начинается от выхода схемы z_3, заданием значения $z_3 = 1$ (для построения единичного покрытия $C^1(z_3)$) и $z_3 = 0$ (для построения нулевого покрытия схемы $C^0(z_3)$). Значение $z_3 = 1$ обеспечивается объединением двух кубов $C_1^1(z_3)$, в первом из которых необходимо обеспечить $z_1 = 1$, а во втором кубе - $z_2 = 1$. Безразличное значение × не раскрывается. Значение $z_1 = 1$ обеспечивается кубом $C_2^1(z_1)$, а значение $z_2 = 1$ – кубом $C_2^1(z_2)$. Произведя соответствующие подстановки и пересечения с исходными кубами, где все нераскрытые координаты полагаются равными ×, получим покрытие схемы в едином формате:

$$C^1(z_3)=\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{cccccc}x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3\\ \hline 1 & 1 & \times & 1 & \times & 1\\ \times & 1 & 1 & \times & 1 & 1\end{array}\right\}\end{array}\begin{array}{l}\\ c_1\\ c_2\end{array}$$

Аналогично, задавая значение z_3 = 0, построим нулевое покрытие схемы $C_1^0(z_3)$. Значение z_3 = 0 обеспечивается подстановкой куба $c_3(z_3)$ и выполнением пересечения кубов $C_2^0(z_1)$ с кубами $C_2^0(z_2)$. Выполнив требуемые подстановки и пересечения, получим нулевое покрытие схемы в едином формате:

$$C^0(z_3)=\left\{\begin{array}{cccccc}x_1 & x_2 & x_3 & z_1 & z_2 & z_3\\ \hline 0 & 0 & \times & 0 & 0 & 0\\ 0 & \times & 0 & 0 & 0 & 0\\ \times & 0 & \times & 0 & 0 & 0\\ \times & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}\\ c_3\\ c_4\\ c_5\\ c_6\end{array}$$

В построенном покрытии $C^0(z_3)$ кубы c_3 и c_6 покрываются кубом c_5. Это объясняется структурой схемы: переменная x_2 подается на два вентиля по c_3 z_1=0, а по c_6 z_2=0. Эти кубы будут использоваться при построении тестовых наборов для активизации путей.

Рассмотрим метод построения тестовых наборов.

Пусть для схемы, выход которой обозначен через z, заданы покрытия $C^0(z)$ и $C^1(z)$. Требуется найти пару наборов, активизирующих некоторый заданный путь l_i при переходе от набора к набору.

Чтобы синтезировать тест, обеспечивающий контроль всех одиночных константных неисправностей, необходимо включить в него пары наборов, активизирующих все пути схемы [27].

Можно следующим образом сформулировать конструктивное определение теста.

Некоторое частично упорядоченное множество T является тестом схемы N, содержащей $L=\{l_i\}$ путей, если для любого l_i найдется пара наборов $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$ из T, активизирующая данный путь l_i.

Путь l_i является активным как на наборе t, так и наборе $\tilde{t}$, поэтому такой путь можно считать переключающим путем на паре наборов $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$.

Синтез пары переключающих наборов $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$ будем проводить с использованием операции пересечения кубов $a\in C^0(z)$ и $b\in C^1(z)$, обозначаемой как $c_y=a\cap b$, и операции обратного пересечения куба c_y с исходными кубами a и b, в результате которого $t=c_y\cap a$ и $\tilde{t}=c_y\cap b$. Действительно, так как кубы a и b принадлежат противоположным покрытиям, то при переходе от куба a к кубу b сигнал на выходе схемы должен изменяться. Это изменение будет происходить из-за переключения тех сигналов, по которым различаются кубы a и b, что и обозначается значением y в кубе $c_y=a\cap b$.

Далее, так как необходимо обеспечить один активный путь, то значение y должно быть только по одной эквивалентной входной координате, соответствующей активизируемому пути. Формирование пары наборов $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$ из куба c_y осуществляется на основе операции обратного пересечения $\begin{pmatrix} \cap \\ y \end{pmatrix}$.

Эта операция отличается от обычного пересечения только тем, что $y \overset{\cap}{\underset{y}{}} p = p'$ и состоит в синтезе активных значений p' и $\bar{p}'$, которые, естественно, и должны различаться в наборах t и $\tilde{t}$. Поэтому для того, чтобы операция обратного пересечения приводила к непустым пересечениям c_y с исходными кубами a и b, необходимо обеспечить безразличные значения × по всем координатам, эквивалентным координате, равной y в кубе c_y.

Проведем активизацию путей для рассматриваемой комбинационной схемы (рис. 4.2). Предварительно перепишем вырожденные покрытия с разделением переменной x_2 на две: $x_2^{\text{в}1}$, поступающей на вход в1 и $x_2^{\text{в}2}$, поступающей на вход в2. Получим следующие покрытия в эквивалентных координатах:

$$C^1(z) = \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2^{\text{в}1} & x_2^{\text{в}2} & x_3 & z \\ \hline 1 & 1 & \times & \times & 1 \\ \times & \times & 1 & 1 & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ c_1 \\ c_2 \end{array} \quad \text{и} \quad C^0(z) = \left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2^{\text{в}1} & x_2^{\text{в}2} & x_3 & z \\ \hline 0 & \times & 0 & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ \times & 0 & 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & \times & 0 & 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{array}$$

По покрытию $C^0(z)$ видно, что кубы c_5, c_3 и c_6 определяют разные пути в схеме.

Для построения тесовых наборов необходимо найти пару наборов, активизирующих некоторый заданный путь l_i при переходе от набора к набору.

Проведем активизацию последовательно для всех путей подсхемы.

1. Путь $\boldsymbol{l_1=x_1}$**в1в3** соответствует первой координате и, следовательно, необходимо путем перебора пар кубов из покрытий $C^0(z)$ и $C^1(z)$ найти такие пары, которые дают в результате пересечения значение y по первой координате. Таких пар в покрытиях две: (c_1, c_3) и (c_1, c_4). Положив $a=c_1$ и $b=c_3$, получим в формате эквивалентных координат следующее:

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & 1 & 1 & \times & \times & 1 \\ \cap & & & & & & \\ b & = & 0 & \times & 0 & \times & 0 \\ \hline c_y & = & y & 1 & 0 & \times & y \end{array}$$

По эквивалентным координатам $x_2^{\text{в}1}=1$ и $x_2^{\text{в}2}=0$ содержатся противоположные значения, которые при совмещении образуют противоречивый куб c_y, следовательно, $c_y = \varnothing$.

Рассмотрим следующую пару, положив a=c_1 и b=c_4, получим:

$$\begin{array}{ccccccc} a & = & 1 & 1 & \times & \times & 1 \\ \cap & & & & & & \\ b & = & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ \hline c_y & = & y & 1 & \times & 0 & y \end{array}.$$

В данном случае в кубе c_y эквивалентные координаты $x_2^{\text{в}1}$=1 и $x_2^{\text{в}2}$=× совмещаются. Значения y по первой координате и на выходе схемы (координата z) указывают, что изменение значения по первой координате, т.е. изменение значений вдоль пути в подсхеме, вызывает изменение значения на выходе подсхемы.

Для синтеза пары переключающих наборов $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$ проведем обратное пересечение куба c_y с исходными кубами a и b:

$$\begin{array}{ccccccc} c_y & = & y & 1 & \times & 0 & y \\ \overset{\cap}{y} & & & & & & \\ b & = & 0 & \times & \times & 0 & 0 \\ \hline \tilde{t}_1 & = & 0' & 1 & \times & 0 & 0' \end{array} \quad \text{и} \quad \begin{array}{ccccccc} c_y & = & y & 1 & \times & 0 & y \\ \overset{\cap}{y} & & & & & & \\ a & = & 1 & 1 & \times & \times & 1 \\ \hline t_1 & = & 1' & 1 & \times & 0 & 1' \end{array}$$

Итак, пара $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1'1\times01' \\ 0'1\times00' \end{pmatrix}$ или, после совмещения эквивалентных координат $\begin{pmatrix} 1'101' \\ 0'100' \end{pmatrix}$, активизирует путь $\boldsymbol{l_1}$=$\boldsymbol{x_1}$**в1в3**.

На этой паре наборов проверяются все одиночные константные неисправности пути $\boldsymbol{l_1}$.

2. Путь $\boldsymbol{l_2}$= $\boldsymbol{x_2}$**в1в3** и ему соответствует координата x_2. Пары кубов для $\boldsymbol{l_2}$ будут: (c_1, c_4) и (c_1, c_6). Положив a=c_1 и b=c_5, получим c_y =∅.

Для другой пары кубов, положив a=c_1 и b=c_6, получим пару $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 11'101' \\ 10'\times00' \end{pmatrix}$, которая активизирует путь $\boldsymbol{l_2}$=$\boldsymbol{x_2}$**в1в3**.

3. Для $\boldsymbol{l_3}$= $\boldsymbol{x_2}$**в2в3** существуют две пары (c_2, c_3) и (c_2, c_5), из которых вторая пара приводит к противоречию. Положив a=c_2 и b=c_3, получим пару $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 01'11' \\ 00'100' \end{pmatrix}$, которая активизирует путь $\boldsymbol{l_3}$=$\boldsymbol{x_2}$**в2в3**.

4. Аналогично для $\boldsymbol{l_4}$=$\boldsymbol{x_3}$**в2в3** существуют пары (c_2, c_4) и (c_2, c_6), из которых подходит только первая. Положив a=c_2 и b=c_4, получим пару $\begin{pmatrix} t \\ \tilde{t} \end{pmatrix}$= $\begin{pmatrix} 011'1' \\ 010'0' \end{pmatrix}$, которая активизирует путь $\boldsymbol{l_4}$=$\boldsymbol{x_3}$**в2в3**

Итак, для всех путей схемы на рис. 4.2 вычислены пары наборов, объединение которых дает тест, обладающий полнотой контроля любой одиночной константной неисправности. Объединив эквивалентные координаты $x_2^{\text{в}1}$ и $x_2^{\text{в}2}$, получим тест:

$$T = \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & z \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ t_1 \\ \tilde{t}_1 \\ t_2 \\ \tilde{t}_2 \end{array} \cup \left\{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & z \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ t_3 \\ \tilde{t}_3 \\ t_4 \\ \tilde{t}_4 \end{array}$$

в котором $\tilde{t}_1 = \tilde{t}_4$ и $t_3 = t_4$. Эти наборы можно объединить с целью минимизации длины текста.

Выводы

В разделе приводятся примеры применения многозначной логики для моделирования и тестирования логических схем. Рассмотрена методика и основные принципы построения тестовых наборов для логических схем в рамках функциональной верификации вычислительных процессов, реализуемых на их основе. Использование кубических комплексов как средства описания внутренней структуры проектируемых схем позволяет формализовать синтез тестовых последовательностей для обнаружения одиночных константных неисправностей проектируемых логических схем и построить машинно-ориентированную модель схемы для целей моделирования и диагностики.

Заключение

Математическая логика в ее современном понимании возникла, как средство обеспечить математику логическим безупречными основаниями, окончательно оформить математическое доказательство, сделать его независимым от естественных языков и «интуитивной очевидности». Однако впоследствии методы математической логики нашли применение (подчас неожиданное) и в других областях науки. Методы матлогики используются в информатике, лингвистике, искусственном интеллекте, экспертных системах, физике, биологии, науках о Земле...

В итоге за последние полтысячи лет формальная логика из скромной служанки схоластических рассуждений превратилась в самостоятельную и процветающую область, которая постоянно находит себе новые применения и в которой постоянно происходят новые продвижения.

Вопросы к зачету (логика высказываний)

1. Высказывания – определения.
2. Связки НЕ, И, ИЛИ в составных высказываниях – свойства.
3. Эквивалентность, исключающее ИЛИ – свойства.
4. Импликация – свойства. Необходимость и достаточность.
5. WFF –формулы.
6. Интерпретация и классификация формул.
7. Вычисление формул – синтаксические диаграммы . .
8. Принцип подстановки в тавтологиях, тождества.
9. Законы логики с тождествами – доказательства.
10. Двоичные диаграммы BDD.
11. Булева алгебра – законы.
12. Нормальные формы булевых функций.
13. SAT-проблема. Алгебраическое решение проблемы.
14. Аксиоматическая теория.
15. Вывод в аксиоматической теории.
16. Доказательство правил вывода из гипотез – МР, ВД, УД.
17. Применение метода Девиса – Патнема для доказательства общезначимости.
18. Применение DP-метода при выводе из гипотез.
19. Правило резолюции, применение.

Вопросы к зачету (логика предикатов)

1. Интерпретация одноместных предикатов, диаграммы Венна.
2. Интерпретация двуместных предикатов.
3. Квантор всеобщности.
4. Квантор существования.
5. Замкнутые формулы с предикатами.
6. Интерпретация формул с одноместными предикатами конечными множествами.
7. Теория первого порядка.
8. Приведенная формула с предикатами.
9. Классификация формул с предикатами.
10. Применение логики в информационно-справочных системах и базах данных.
11. Логическое описание семантики программ.
12. Задачи анализа программ в логике предикатов.
13. Предваренная нормальная форма с предикатами
14. Совершенная Скулемовская форма.
15. Применение правил Девиса - Патнема и метода резолюций при выводе из гипотез.
16. Унификация термов.
17. Декларативная (логическая) семантика программ в Прологе.
18. Процедурная семантика программ в Прологе.

Список литературы

1.ModernLib.Ru/http://modernlib.ru/books/a_href_books_s_a_davidov_s_a_davidov_a/С. А. Давыдов . Логика. Шпаргалка. —150 стр., ISBN:5-9745-0452-6 978-5-9745-0452-5.

2. Википедия. Логика.

3. Черноскутов Ю.Ю. Логика . Краткий конспект. Изд: Проспект. СПб. 2013, 88 с.

4. Волкова Н.В., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа. СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2001. — 511 стр. 2-е издание.

5. Э. Беркли. Символическая логика и разумные машины. М.: Изд. Инолит. 1961. — 260 стр.

6. Д. Мак-Кракен, У. Дорн. Численные методы и программирование. М.: Изд. Мир, 1977. —584 с. 2-е издание.

7. Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры. М.: Наука, 1967.—376 с.

8. Миллер Р. Теория переключательных схем. Т.1. Комбинационные схемы: Пер. с англ. – М. Мир, 1970. – 416 с.

9. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. СПб.: Питер, 2003. ISBN 5-318-00537-3. - 208 с.

10. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд. Инолит, 1963. — 830 с.

11. Scada . ru - Публикации - SCADA - системы: взгляд изнутри // URL: http://www.scada.ru/publication/book/preface.html

12. Довгий П.С., Поляков В.И., Скорубский В.И.. Основы теории множеств и приложение булевой алгебры к синтезу комбинационных схем. Учебное пособие по дисциплине «Дискретная математика». – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 109 с.

13. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. М.:Наука, 1976. — 320 с.

14. Новиков Ф А Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. 3-е изд. — СПб.: Питер, 2009. — 384 с.+

15. Мощенский В.А. Лекции по математической логике : учебное пособие для студ. ун-тов по спец. «Прикладная математика». – Минск : Изд-во БГУ, 1973. – 132 с.

16. Чень И., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.:Наука, 1983. - 360 с.

17. Нильсон Н. Искусственный интеллект. Методы поиска решений. - М: Мир, 1973.- 274 с.

18. Грэй П. Логика, алгебра и базы данных. М.: Машиностроение, 1989. - 368 с.

19. Борщев В.Б. Пролог основные идеи и конструкции. - в кн.: Прикладная информатика. Сб. статей под ред. В. М. Савинкова. - М.: Финансы и статистика, 1986. - с. 49-76.

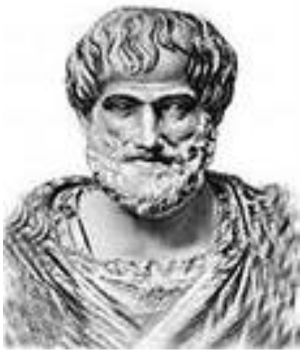
20. Братко И. Алгоритмы искусственного интеллекта на языке PROLOG, 3-

е издание.: Пер. с англ. — М.: Издательский дом "Вильямс", 2004. — 640 с.
21. Карпенко А.С. Логики Лукасевича и простые числа. Изд.: Либроком. Изд.3, стереот. 2009. 256 с.
22. Поляков А. К. - Языки VHDL и VERILOG в проектировании цифровой аппаратуры. Изд.: Солон-Пресс.- 2003. 320 с.
23. Зыков А.Г., Немолочнов О.Ф., Поляков В.И. Построение комплексного покрытия последовательностных схем методом пересечения покрытий систем булевых функций //Научно-технический вестник СПб ГИТМО (ТУ). Выпуск 6. Информационные, вычислительные и управляющие системы / Главный редактор В.Н.Васильев. СПб: СПб ГИТМО(ТУ), 2002.- С.109-112.
24. Зыков А.Г., Немолочнов О.Ф., Поляков В.И. Методы верификации цифровых устройств / Труды Международных научно-технических конференций «Интеллектуальные системы» (IEEE AIS'04) и «Интеллектуальные САПР» (CAD-2004). Научное издание и 3-х томах. М.: Изд-во Физматлит, 2004, Т.2. - С.39-41.
25. Ю.А. Гатчин, А.Г. Зыков, В.И. Поляков, И.В. Поляков. Методологическое обеспечение синтеза тестов логических схем. - Информационные технологии в профессиональной деятельности и научной работе: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции с международным участием: в 2 ч. – Йошкар-Ола: Марийский государственный технический университет, 2011. – Т. 1. - С. 113-119. - ISBN 978-5-8158-0858-4.
26. Проектирование цифровых вычислительных машин / С.А. Майоров, Г.И. Новиков, О.Ф. Немолочнов и др. Под ред. С.А. Майорова. М.: Высш. шк., 1972. - 344 с.
27. Немолочнов О.Ф. Методы технической диагностики. Л.: 1978. - 68 с.

Именной указатель

Аккерман Вильгельм Фридрих (Wilhelm Friedrich Ackermann, 29.03.1896 – 24.12.1962) – немецкий математик и логик. Помогал Давиду Гильберту подготовить к публикации лекции 1917–1922 гг. по введению в математическую логику – Основы теоретической логики. В книге содержится первое изложение логики первого порядка и вопросов, которые впоследствии разрешил Гёдель в теореме о полноте и теореме о неполноте. Работал над доказательством непротиворечивости теории множеств (1937), полной арифметики (1940), свободной логики (1952) и новой аксиоматизацией теории множеств (1956). В теории алгоритмов широко известна функция Аккермана.

Абу Наср Мухаммед ибн Мухаммед ибн Тархан ибн Узлаг аль-Фараби ат-Тюрки, употребительное сокращение имени – **аль-Фараби** (в латинизированной форме – Alpharabius; между 873 – 12.01.951) – философ, математик, теоретик музыки, ученый Востока. Один из крупнейших представителей средневековой восточной философии. Аль-Фараби – автор комментариев к сочинениям Аристотеля (отсюда его почётное прозвище «Второй учитель») и Платона. Его труды оказали влияние на ибн Сину, ибн Баджу, ибн Туфайля, ибн Рушда, а также на философию и науку средневековой Западной Европы. Ему приписывается создание Отрарской библиотеки.



Аристотель из Стагиры (Aristotels, 384 – 322/332 до н.э.) – великий греческий философ, естествоиспытатель, основатель естествознания, ученый-энциклоедист, основатель Ликея (др.-греч. Λύκειο Лицей, или перипатетическую школу), ученик Платона, с 343 до н. э. учитель Александра Македонского. Научная продуктивность Аристотеля была необычайно высокой, его труды охватывали все отрасли античной науки. Он стал основоположником формальной логики, создателем силлогистики, учения о логической дедукции. Логика у Аристотеля — не самостоятельная наука, а методика суждений, применимая к любой науке. Философия Аристотеля содержит учение об основных принципах бытия: действительности и возможности (акт и потенция), о форме и материи, действующей причине и цели. В основе метафизики Аристотеля лежит учение о принципах и причинах организации бытия. В качестве начала и первопричины всего сущего Аристотель выдвинул понятие субстанционального разума. Для классификации свойств бытия Аристотель выделил десять предикатов (сущность, количество, качество, отношения, место, время, состояние, обладание, действие, страдание), которые всесторонне определяли субъект. Аристотель установил четыре начала (условия) тия: форма, материя, причина и цель. Главное значение имеет соотношение формы и материи.

Бочвар Дмитрий Анатольевич (07.08.1903 – 09.10.1990) – советский логик, квантовый химик, создатель (наряду с Э. Постам и Я. Лукасевичем) нового направления исследований в логике — многозначных логик. Построенная Бочваром в 1938 г. трехзначная логика была применена им для анализа парадоксов Б. Рассела и Г. Вейля. Третьим истинностным значением (отличным от истины и лжи) в логике является «бессмыслица». Идеи, развитые Бочваром, активно применялись в работах по проблемам философской логики, рассматривающих природу парадоксов, в исследованиях по логическому анализу естественного языка, а также в теории автоматизированных правдоподобных рассуждений, основанных на многозначных логиках.

Брауэр Люйтцен Эгбертус Ян (Luitzen Egbertus Jan Brouwer; 27.02.1881 – 2.12.1966) – голландский математик, логик, философ, основоположник интуиционизма и один из идейных предшественников и вдохновителей математического конструктивизма. Он подверг сомнению неограниченную приложимость в математических рассуждениях классических законов исключенного третьего, (снятия) двойного отрицания, косвенного доказательства (доказательства от противного). Одним из результатов анализа таких рассуждений явилось возникновение интуиционистской логики, сформулированной в 1930 г. учеником Брауэра А. Гейтингом и не содержащей указанных законов. Л. Брауэр - был гением XX века: его заслуги в логике и математике можно сравнить лишь с тем, что Эйнштейн сделал в физике.

Белнап Н. (Nuel D. Delnap) – автор четырехзначной логики, автор книги (в соавторстве с Т. Стилом) «Логика вопросов и ответов».

Беркли Эдмунд Каллис (Edmund Callis Berkeley) – американский популяризатор кибернетики, создатель первого в истории персонального компьютера (1950 г.) – устройства под названием Simon с 12 битами памяти, издатель журнала «Computers and Automation». Автор афоризма: «Большая часть проблем либо не имеет решения, либо имеет несколько решений. Лишь очень немногие проблемы имеют только одно решение».

Буль Джордж (George Boole, 02.11.1815 – 08.12.1864) – английский математик и логик. В работах "Математический анализ логики" ("The mathematical analysis of logic", Camb., 1847), "Исследование законов мышления" ("An investigation of the laws of laws of thought", L., 1854) Буль заложил основы математической логики. Именем Буля названы булевы алгебры – особые алгебраические системы, для элементов которых определены две операции.

Бэкон Фрэнсис (Bacon Francis, 22.01.1561 – 09.04.1626) – английский философ, родоначальник английского материализма, историк, политический деятель, основоположник эмпиризма.

Вейль Герман Клаус Гуго (нем. Hermann Klaus Hugo Weyl; 9.11.1885 — 8.12.1955) — немецкий математик. Ученик Д. Гильберта. Труды посвящены тригонометрическим рядам и рядам по ортогональным функциям, теории функций комплексного переменного, дифференциальным и интегральным уравнениям. Ввёл в теорию чисел т. н. «Суммы Вейля». Наиболее значительны работы Вейля по алгебре (в области теории непрерывных групп и их представлений) и теории функций комплексного переменного. Труды Вейля по прикладной линейной алгебре имели значение для последующего создания математического программирования, а работы в области математической логики и оснований математики до сих пор вызывают интерес (Вейль принадлежал к сторонникам т. н. интуиционизма). В теории чисел известны суммы Вейля, получившие большое значение в аддитивной теории чисел. Большое значение имеют труды в области математической физики, где он вскоре после создания А. Эйнштейном общей теории относительности стал заниматься единой теорией поля. Также Вейль известен применением теории групп к квантовой механике. В 1918 г. предложил удобную систему аксиом для аффинного и евклидова точечного пространств (**аксиоматика Вейля**).
Награждён премией Лобачевского в 1927. В честь Германа Вейля в 1970 г. назван кратер на обратной стороне Луны.

Гегель Георг Вильгельм Фридрих (Georg Wilhelm Friedrich Hegel; 27.08.1770 – 14.11.1831) – немецкий философ, один из творцов немецкой классической философии и философии романтизма.

Гейтинг Аренд (Arend Heyting, 09.05.1898 – 09.07.1980) – голландский логик и математик. В 1922 г. Гейтинг дал интуиционистскую трактовку аксиоматики проективной геометрии.

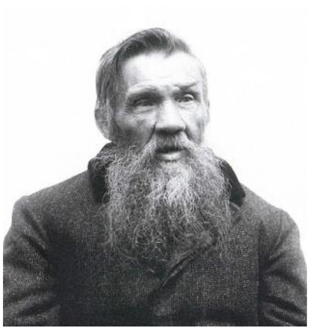
Гершель Джон Фредерик Вильям (John Frederick William Herschel; 07.03.1792 – 11.05.1871) – английский логик-индуктивист (сын великого астронома Уильяма Гершеля, открывшего планету Уран, сам тоже астроном и математик).

Гёдель Курт Фридрих (Kurt Friedrich Gödel; 28.04.1906 – 14.01.1978) – австрийский логик, математик и философ математики, наиболее известный сформулированной и доказанной им теоремой о неполноте.

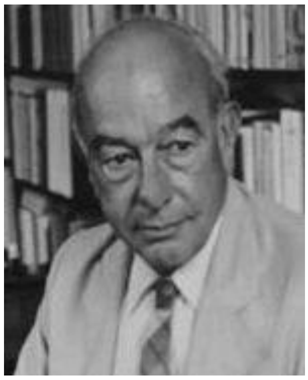
Гильберт Давид (David Hilbert, 23.01.1862 – 14.02.1943) – немецкий математик-универсал, внёс значительный вклад в развитие многих областей математики. В 1910—1920-е г.г. (после смерти А. Пуанкаре) был признанным мировым лидером математиков. Гильберт разработал широкий спектр фундаментальных идей во многих областях математики, в том числе теорию инвариантов и аксиоматику евклидовой геометрии. Он сформулировал теорию гильбертовых пространств, одной из основ современного функционального анализа

Глушков Виктор Михайлович (24.08.1923–30.01.1982) – советский математик, кибернетик, академик АН СССР (1964). Решил обобщённую пятую проблему Гильберта. Важные результаты получил в теории цифровых автоматов, в области приложений вычислительной техники к управлению производственными процессами и экономикой. Под его руководством в 1966 году была разработана первая персональная ЭВМ «МИР-1» (машина для ных расчётов). Лауреат Ленинской премия (1964) и Государственных премий СССР (1967, 1968, 1977).

Девис Мартин (Martin Davis, 1928 г.) – американский математик и логик.

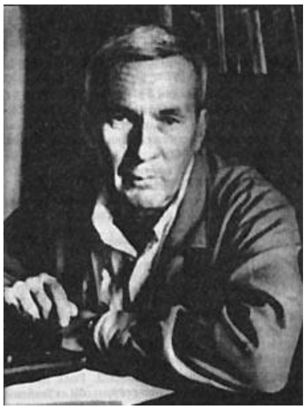


Каринский Михаил Иванович (4.11.1840 – 20.07.1917) – русский логик и философ. Значительные усилия Каринский посвятил проблеме соотношения мысли и реальности. Его философская позиция в существенной мере проявилась в различении им тождества реального и идеального. В первом случае, по Каринскому, в любом суждении всегда сохраняется идентичность субъекта как сущности, принципиально не сводимой ни к каким предикативным характеристикам. Отвечая на вопрос о соотношении мысли и бытия, Каринский подчеркивал независимость «существующего» от субъективного представления о нем, критикуя субъективизм, признавал «объективность» интеллектуального восприятия действительности как адекватного «отражения» ее реальных связей и отношений. В истории логики существенную роль сыграло предложенное Каринским различение понятий логической группы и агрегата. Первое определение он относил к совокупности, которая в экстенсиональном отношении характеризуется инвариантностью («утверждаемое о всех утверждается о каждом»). Под агрегатом логик понимал совокупность, обладающую иными свойствами, чем составляющие ее элементы.



Квайн Уиллард Ван Орман (Willard Van Orman Quine, 25.06.1908 –25.12.2000) – американский логик, математик и философ, представитель неопрагматизма, или логического прагматизма. Труды по построению аксиоматической системы, включающей логику классов, по логической семантике и модальной логике, философии математики. Куайн использовал достижения современной логики для прояснения и разрешения традиционных философских проблем, особенно онтологического ряда (вопросы формы «Какого рода вещи существуют?»).

Клини Стивен Коул (Stephen Cole Kleene, 5.01.1909 – 25.01.1994) – американский математик и логик. Его работы совместно с работами Алонзо Чёрча, Курта Гёделя и Алана Тьюринга дали начало разделу математической логики – теории вычислимости. Кроме того, известен изобретением регулярных выражений. Основные работы посвящены теории алгоритмов и рекурсивных функций, а также проблемам интуиционистской логики и математики. Его именем названы Алгебра Клини, Звёздочка Клини, теорема Клини о рекурсии, теорема Клини о неподвижной точке. Работал также в области интуиционистсткой математики Брауэра. Внёс важный вклад в теорию конечных автоматов.



Колмогоров Андрей Николаевич (12.04.1903 – 20.10.1987) – советский математик, один из крупнейших математиков XX века. Колмогоров – один из основоположников современной теории вероятностей, им получены фундаментальные результаты в топологии, геометрии, математической логике, классической механике, теории турбулентности, теории сложности алгоритмов, теории информации, теории функций, теории тригонометрических, теории меры, теории приближения функций, теории множеств, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, функциональном анализе и в ряде других областей математики и её приложений. Колмогоров также автор новаторских работ по философии, истории, методологии и преподаванию математики, известны его работы в статистической физике. Академик Академии наук СССР.

Кольмеро Ален (Alain Colmerauer, 24.01.1941) – французский программист, информатик. В 1971 предложил язык для решения задач с логическими базами знаний - Пролог.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (Gottfried Wilhelm Leibniz, 1.7.1646 – 14.11.1716) – немецкий философ-идеалист, математик, физик и изобретатель, юрист, историк, языковед. В философии Лейбниц явился завершителем философии 17 в., предшественником немецкой классической философии. В физике Лейбниц развивал учение об относительности пространства, времени и движения. В логике Лейбниц развил учение об анализе и синтезе, впервые сформулировал закон достаточного основания, ему принадлежит также принятая в современной логике формулировка закона тождества. Лейбниц создал наиболее полную для того времени классификацию определений, разработал теорию генетических определений и др. В математике важнейшей заслугой Лейбниц является разработка (наряду с И. Ньютоном и независимо от него) дифференциального и интегрального исчисления. Он ввел знаки для дифференциала и интеграла.

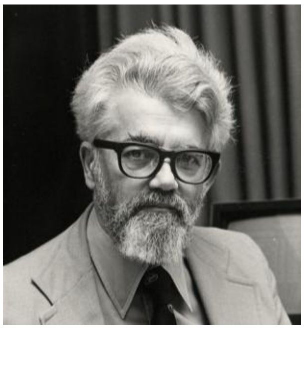
Лобачевский Николай Иванович (20.11.1792 – 12.02. 1856) – российский математик, создатель неевклидовой геометрии (геометрии Лобачевского). Ректор Казанского университета (1827–1846). Труды по алгебре, математическому анализу, теории вероятностей, механике, физике и астрономии.

Лукасевич Ян (Lukasiewicz Jan, 21.12.1878 – 13.02.1956) – польский логик и философ. Основные результаты Лукасевича лежат в области математической логики. Ему принадлежат важные результаты в области классической (теория дедукции и аксиоматизация), интуиционистской, модальной, импликативной и вероятностной логики. Мировую славу и известность принесло Лукасевичу создание в 1920 первой системы многозначной логики, а именно трехзначной.

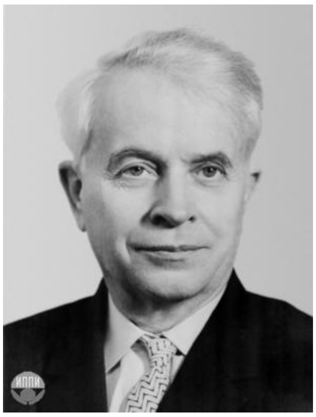
Льюис Кларенс Ирвинг (Lyuis Klarens Irving, 12.04.1883 – 3.02.1964) – американский философ, близкий к прагматизму, логик. Основоположник современной модальной логики. В 1912 высказал идею, что классическая логика, использующая понятие материальной импликации, должна быть заменена более совершенным описанием логического следования. Тем самым в современной математической логике была поставлена проблема адекватной теории логического следования, не решенная до настоящего времени. В качестве выражения, более соответствующего обычному значению слова «имплицирует», Льюис предложил строгую импликацию, означающую выводимость одного высказывания из другого и избегающую парадоксов материальной импликации. Строгая импликация определяется как логически необходимая материальная импликация.

Ляпунов Александр Михайлович (25.05.1857 – 03.11.1918) – русский математик и механик, академик Петербургской Академии наук, основные труды посвящены небесной механике, математической физике, теории вероятностей.

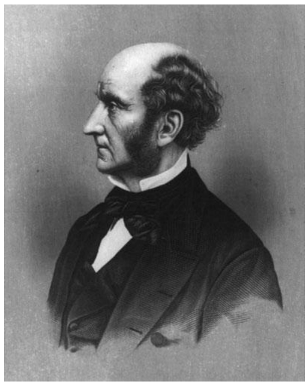
Мак-Класки Эдвард (McCluskey E.J.) – американский математик и инженер, предложил модернизацию метода Квайна, дающую уменьшение числа сравнений.



Маккарти Джон (John McCarthy, 04.09.1927 – 24.10.2011) – выдающийся американский информатик, автор термина «искусственный интеллект» (1955), изобретатель языка Лисп (1958), основоположник функционального программирования.



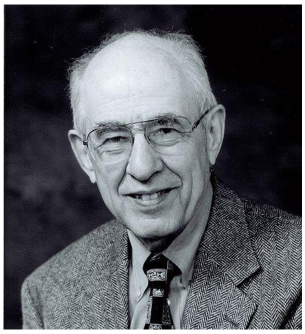
Марков Андрей Андреевич (09.09.1903 – 11.10.1979) – советский математ ик и логик, чл.-корр. АН СССР (1953). Основные труды по топологии, топологической алгебре, теории динамических систем, теории алгорифмов и конструктивной математике. Основатель отечественного конструктивного направления. Ввёл понятие нормального алгорифма.



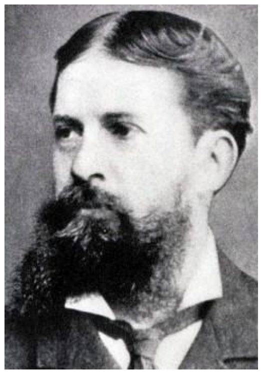
Милль Джон Стюарт (John Stuart Mill, 20.05.1806 – 08.05.1873) – британский философ, экономист и политический деятель. Внес значительный вклад в обществознание, политологию и политическую экономию. Внес основополагающий вклад в философию либерализма. Главную заслугу Милля составляет разработка теории индукции.

Морган Огастес де (Morgan Augustus de, 27.6.1806–18.3.1871) – шотландский математик и логик, основатель логического анализа отношений; первый президент (1866) Лондонского математического общества. Известен работами по теории математических рядов, а также историко-математическими и историко-физическими исследованиями. Де Морган определял логику как теорию имен предметов и исчисление необходимых и вероятностных умозаключений. Основные результаты де Моргана сформулированы в сочинении "Формальная логика ..." ("Formal logic, or the calculus of inference, necessary and probable", 1847), где он изложил элементы логики высказываний и логики классов, дал первую развитую систему алгебры отношений. С его именем связаны так называемые законы де Моргана.

Матиясевич Юрий Владимирович (2.03.1947)– советский и российский математик, академик РАН, сделал последний шаг в доказательстве алгоритмической неразрешимости задачи о существовании решений у произвольного диофантова уравнения, известной также как десятая проблема Гильберта, завершив тем самым программу исследований, основную часть которой к тому времени выполнили Мартин Дэвис, Хилари Патнем и Джулия Робинсон. Он начал изучать десятую проблему Гильберта в 1965 г., когда был еще второкурсником кафедры математики и механики Ленинградского государственного университета. Именно в этот период он познакомился со статьей Мартина Девиса, Джулии Робинзон и Хилари Патмена по десятой проблеме Гильберта. Эта и другие статьи Джулии Робинсон, а также персональный контакт с ней оказали на него огромное влияние. В теории чисел получил ответ на поставленный в 1927 году вопрос Дьёрдя Пойа, касающийся бесконечной системы неравенств, связывающих тейлоровские коэффициенты ζ-функции Римана. В теории графов предложил несколько критериев раскрашиваемости графов, установил неожиданную связь проблемы четырёх красок и делимости биноминальных коэффициентов, дал вероятностную интерпретацию теоремы о четырёх красках.

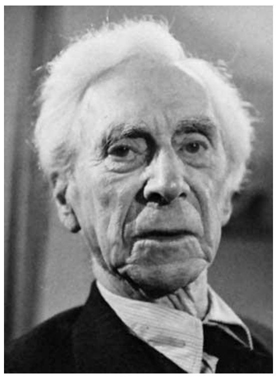


Патнем Хилари (Hilary Whitehall Putnam, 31.07.1926) – американский логик и философ. Профессор Массачусетского технологического института (1961–1965), Гарвардского университета (с 1965). Научные исследования посвящены проблемам философии и методологии науки (математика и физика), логики, философии сознания и этики.



Пирс Чарльз Сандерс (Charles Sanders Peirce, 10.09.1839 – 19.04.1914) – американский философ, логик, математик. Основные труды по математической логике (стрелка Пирса), теории вероятностей, алгебре. Обосновал логику отношений. Ввел (независимо от Г. Фреге) понятие квантора.

Пост Эмиль Леон (англ. Post Emil Leon, 11.02.1897 – 21.04.1954) – американский математик и логик; один из основателей многозначной логики (1921); основные труды по математической логике: алгебра Поста, классы Поста функций алгебры логики; предложил абстрактную вычислительную машину — машину Поста.



Рассел Бертран Артур Уильям (Bertrand Arthur William Russell, 18.05.1872 – 02.02.1970) – английский логик и философ, основоположник логического анализа, общественный деятель. Наиболее серьезное достижение Рассела – его новаторские идеи и труды по математической логике и основаниям математики, ставшие вехой в развитии научной мысли и философии 20 в. Лауреат Нобелевской премии по литературе (1950).

Робинсон Джон Алан (англ. John Alan Robinson, 1930) – английский фило соф и логик, внёс важный вклад в становление логического программирования. В 1965 году опубликовал работу «Машинно-ориентированная логика, основанная на принципе резолюции», которая является основополагающей в автоматизации правила резолюций в логике. Его работы были решающими в развитии языка логического программирования Пролог. В 1996 г. Робинсон получил премию имени Жака Эрбрана за выдающийся вклад в развитие автоматизации рассуждений.

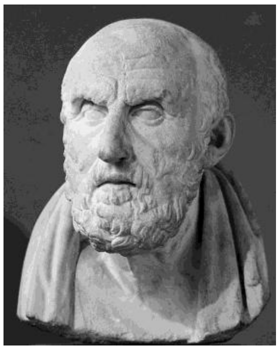
Робинсон Джулия (Julia Robinson, 8.12.1919–30.07.1985) – одна из самых знаменитых американских математиков XX века. Опираясь на ее работы, советский ученый Юрий Матиясевич доказал, что 10-я проблема Гильберта решается отрицательно. Работала в области матлогики и диофантовых уравнений. В 1983–1984 годах Робинсон возглавляла Американское математическое общество, став первой женщиной на этом посту.

Скулем (Сколем) Туральф Альберт (Thoralf Albert Skolem, 23.5.1887 – 23.3.1963) – норвежский математик, основные работы в области оснований математики и математической логики, также внёс заметный вклад в общую алгебру (теорию решёток и колец), теорию чисел (теорию диофантовых уравнений) и философию математики. С его именем связано одно из ключевых утверждений в теории моделей–теорема Лёвенгейма–Скулема, и связанный с ней философско-математическийпарадокс Скулема, а также скулемовская нормальная форма в логике первого порядка, теорема Скулема в комбинаторике, теорема Скулема – Нётер – фундаментальный результат в теории центральных простых алгебр. Президент Норвежского математического общества в 1950-е годы.

Тьюринг Алан Мэтисон (Alan Mathison Turing, 23.06.1912 – 7.06.1954) – английский математик, логик, криптограф, оказавший существенное влияние на развитие информатики. Предложенная им в 1936 году абстрактная вычислительная «Машина Тьюринга», которую можно считать моделью компьютера общего назначения, позволила формализовать понятие алгоритма и до сих пор используется во множестве теоретических и практических исследований. Общепринято считать Алана Тьюринга отцом информатики и теории искусственного интеллекта. Во время Второй мировой войны Алан Тьюринг работал в Правительственной школе кодов и шифров, где была сосредоточена работа по взлому шифров и кодов стран оси. Он возглавлял группу Hut 8, ответственную за криптоанализ сообщений военно-морского флота Германии. Тьюринг разработал ряд методов взлома, в том числе теоретическую базу для Bombe – машины, использованной для взлома немецкого шифратора Enigma. После войны Тьюринг работал в Национальной физической лаборатории , где по его проекту был реализован первый в мире компьютер с хранимой в памяти программой — ACE. В 1948 учёный присоединился к вычислительной лаборатории Макса Ньюмана в Университете Манчестера, где вал при создании Манчестерских Компьютеров. В 1950 году предложил эмпирический тест Тьюринга для оценки искусственного интеллекта компьютера. В честь учёного названа Премия Тьюринга – самая престижная в мире награда в области информатики.

Уайтхед Альфред Норт (Whitehead Alfred North, 5.02.1861 – 30.12.1947) – британский философ, математик, логик, методолог. Вместе с Расселом (его учеником) разрабатывал проблемы символической логики, дал логический анализ оснований математики.

Фреге Фридрих Людвиг Готлоб (Friedrich Ludwig Gottlob Frege, 8.11.1848 – 26.07. 1925) – немецкий логик, математик и философ. Сформулировал идею логицизма, то есть направление в основаниях математики и философии математики, основным тезисом которого является утверждение о «сводимости математики к логике». Основатель современной формальной (символической, математической) логики. Разработал оригинальный двумерный символический язык и его средствами впервые в логике построил дедуктивно-аксиоматическую систему расширенной логики предикатов с равенством (при импликации и отрицании в качестве исходных пропозициональных операций и кванторе общности на функциональном уровне) и применил ее для формулировки некоторых математических понятий и доказательства относящихся к ним теорем.



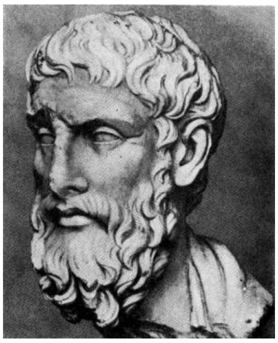
Хрисипп из Сол (Χρύσιππος Σολεύς, 281/278 до н. э. – 208/205 до н. э.) – древнегреческий философ, "второй основатель" стоицизма (после Зенона из Китиона) и его главный систематизатор. Был учеником Клеанфа. Возглавлял стоическую школу, а также считался её вторым основателем. Логику Хрисиппа принято считать первой логикой в ысказываний в европейской традиции. Его учениками были Диоген Вавилонский и Аристокреон. Автор более 700 работ, около половины из которых посвящена проблемам логики. Разрабатывал логику высказываний, установил принцип двузначности, легший затем в основу классической логики. По преданию, угостил своего осла вином, а затем умер от смеха, наблюдая, как тот пытался есть инжир.

Чёрч Алонзо (Alonzo Church; 14.06.1903 – 11.08.1995) – выдающийся американский математик и логик, внесший значительный вклад в основы информатики. Чёрч прославился разработкой теории лямбда-исчислений, последовавшей за его знаменитой статьёй 1936 года, в которой он показал существование т. н. «неразрешимых задач». Эта статья предшествовала знаменитому исследованию Алана Тьюринга на тему проблемы остановки, в котором также было продемонстрировано существование задач, неразрешимых механическими способами. Впоследствии Чёрч и Тьюринг показали, что лямбда-исчисления и машина Тьюринга имели одинаковые свойства, таким образом доказывая, что различные «механические процессы вычислений» могли иметь одинаковые возможности. Эта работа была оформлена как тезис Чёрча – Тьюринга. Его система лямбда-исчислений легла в основу функциональных языков программирования, в частности семейства Лисп.

Шанин Николай Александрович (25.05.1919) – советский математик, логик, руководитель Ленинградской школы конструктивистов. В шестидесятые годы организовал группу логиков в Ленинградском отделении математического института РАН, которая создала первую компьютерную программу для порождения естественных выводов.

Шеннон Клод (Claude Shannon, 30.04.1916 – 24.02.2001) – американский инженер и математик. Один из создателей математической теории информации. Основные труды по теории релейно-контактных схем, математической теории связи, кибернетике. Основоположник теории информации. Определил количество информации через энтропию. Теорема о пропускной способности каналов связи. Превращение криптографии в науку.

Шрёдер Эрнст (Ernst Schröder, 25.11.1841 – 16.06.1902) – немецкий математик и логик. Центральное место в сфере его научных интересов занимали основания математики, теория функций и комбинаторный анализ. Усовершенствовал логику Джорджа Буля и разработал полную систему аксиом булевой алгебры. Он в отличие от Буля, строит теорию логического исчисления (его авторское название современной математической логики) на основе исчисления классов. Он вносит вклад в развитие реляционной алгебры, вводит понятие нормальная форма и развивает принцип двойственности в классической логике; использует метод элиминации кванторов для вопросов разрешимости.



Эпикур (Επίκουρος; 342/341 до н. э. – 271/270 до н. э.) – древнегреческий философ, основатель одного из наиболее влиятельных направлений античной философии – эпикуреизма. От 300 произведений, которые, как предполагают, написал Эпикур, сохранились только фрагменты. Свою теорию познания Эпикур именовал «каноникой», так как в её основе лежало учение о критериях или канонах истины. Не соглашаясь с Платоном и Аристотелем, первичным и главным критерием истины он считал ощущения, в которых даётся нам жизнь. Разум же Эпикур считал полностью зависимым от ощущений. Поскольку чувственное познание, согласно Эпикуру, непогрешимо, постольку ошибки в познании или заблуждения происходят из ошибочных суждений о том, что дано в ощущениях. В канонике Эпикура выделяют также вторичные критерии истины, такие как «предвосхищение» (*пролепсис*), «претерпевание» (*патхэ*) и «образный бросок мысли». «Предвосхищение» — это «памятование того, что часто являлось нам извне», «оттиск, предварением которого были ощущения» и чувственные восприятия. Предвосхищения — это понятия или общие представления, возникающие на основе чувственных восприятий из единичных представлений. «Претерпевание» — *патхэ* — это скорее критерий отношения к вещам, чем критерий истины. Претерпевание — основа для моральных оценок в соответствии с этическими принципами. Содержание же понятия «образный бросок мысли» определяется как интуиция или интеллектуальная интуиция. Согласно Эпикуру, «истинно только то, что доступно наблюдению или уловляется броском мысли», а «главным признаком совершенного и полного знания является умение быстро пользоваться бросками мысли» (*епиболами*).

Эрбран Жак (фр. Jacques Herbrand, 12.02.1908 – 27.07.1931) – французский математик и логик. Основные труды в области математической логики (исчисление предикатов, рекурсивные функции, теоремы о дедукции, конструктивная логика) и алгебры (поля, алгебраические числа). Теорема Эрбрана является результатом его диссертационной работы по теории доказательств. Отношение Эрбрана как эйлерова характеристика применяется в гомологической алгебре. Его вклад в программу Гильберта состоял в предоставлении доказательства для слабой системы арифметики. В доказательстве использовалась вышеназванная теорема Эрбрана.

Яблонский Сергей Всеволодович (06.12.1924 – 26.05.1998) – советский и российский математик, Член-корреспондент АН СССР (1968), один из основателей отечественной школы математической кибернетики. Специалист в области дискретной математики и математических вопросов кибернетики. Основные труды относятся к исследованию общих вопросов теории управляющих систем, исследованию функциональных систем с операциями, вопросам контроля и надёжности управляющих систем, изучению алгоритмических трудностей синтеза управляющих систем. Внес фундаментальный вклад в теорию управляющих систем; окончательно решил проблему для *K*-значной логики (результаты этих исследований стали основой дальнейшего развития теории многозначных логик); выделил понятие инвариантного класса функций; указал асимптотически наилучший метод синтеза схем для функций всех ненулевых инвариантных классов; сделал вывод о роли перебора при нахождении экстремальных управляющих систем; установил, что в некотором естественном классе построение последовательности "самых сложных" функций алгебры логики связано с перебором всех функций; построил общую теорию тестов для контроля работы управляющих систем; получил глубокие результаты по синтезу самокорректирующихся систем. Лауреат Ленинской премии (1966).

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Кафедра вычислительной техники СПбГУ ИТМО создана в 1937 году и является одной из старейших и авторитетнейших научно-педагогических школ России. Заведующими кафедрой в разное время были выдающиеся деятели науки и техники М.Ф. Маликов, С.А. Изенбек, С.А. Майоров, Г.И. Новиков. Многие поколения студентов и инженеров в Советском Союзе и за его пределами изучали вычислительную технику по учебникам С.А. Майорова и Г.И. Новикова, О.Ф. Немолочного, С.И. Баранова, В.В. Кириллова и А.А. Приблуды, Б.Д.Тимченко и др.

Основные направления учебной и научной деятельности кафедры в настоящее время включают в себя встроенные управляющие и вычислительные системы на базе микропроцессорной техники, информационные системы и базы данных, сети и телекоммуникации, моделирование вычислительных систем и процессов, обработка сигналов.

Выпускники кафедры успешно работают не только в разных регионах России, но и во многих странах мира: Австралии, Германии, США, Канаде, Германии, Индии, Китае, Монголии, Польше, Болгарии, Кубе, Израиле, Камеруне, Нигерии, Иордании и др. Выпускник, аспирант и докторант кафедры ВТ Аскар Акаев был первым президентом Киргизии.

Анатолий Геннадьевич Зыков
Владимир Иванович Поляков
Владимир Иванович Скорубский

Математическая логика

Учебное пособие по дисциплине
«Математическая логика и теория алгоритмов»

В авторской редакции
Дизайн В.И. Поляков
Верстка В.И. Поляков
Редакционно-издательский отдел Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ №
Тираж 250 экз.
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49