ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель работы. Ознакомление с пакетом прикладных программ SIMULINK и основными приемами моделирования линейных динамических систем.

Методические рекомендации. До начала работы студенты должны ознакомиться с описанием пакета прикладных программ SIMULINK (см. учебное пособие [1]), а также получить от преподавателя вариант задания. К занятию допускаются студенты, составившие схемы моделирования заданных динамических систем (см. пункты 1.1 и 2.1 порядка выполнения работы). Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

Теоретические сведения. Математическая модель линейной стационарной системы может быть представлена в виде скалярного дифференциального уравнения *n*-го порядка (модель *вход-выход*) или в виде системы из *n* дифференциальных уравнений 1-го порядка (модель *вход-состояние-выход*). Модель вход-выход имеет вид

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = b_m u^{(m)} + b_{m-1}u^{(m-1)} + \ldots + b_1 u^{(1)} + b_0 u, \qquad (1.1)$$

где y — выходная переменная, u — входной сигнал, n — порядок системы, m — порядок производной выходной переменной, в явном виде зависящей от u ($m \le n$), a_j, b_j — постоянные коэффициенты. При условии, что $m \le n$, модель вход-состояние-выход может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n + \beta_1 u, \\ \dot{x}_2 = \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n + \beta_2 u, \\ \qquad \vdots \\ \dot{x}_n = \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nn}x_n + \beta_n u, \\ \quad y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где x_j — координаты вектора состояния, α_{ij} и β_j — постоянные коэффициенты. С использованием обозначений

$$A = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{vmatrix}, \qquad C^T = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}, \qquad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}$$

система (1.2) может быть представлена в компактной векторно-матричной форме

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \qquad (1.2а)$$

где A — $n \times n$ матрица постоянных коэффициентов, B — $n \times 1$ вектор-столбец постоянных коэффициентов, C — $1 \times n$ вектор-строка постоянных коэффициентов, а x — n-мерный вектор состояния.

Напомним, что решением дифференциального уравнения (1.1) (или, соответственно, системы (1.2)) является функция времени $y(t)$ (или вектор-функция $x(t)$), обращающая данное уравнение (систему) в тождество и удовлетворяющая заданным *начальным условиям.* Для дифференциального уравнения (1.1) начальные условия накладываются на переменную y и ее производные до $(n-1)$-го порядка включительно:

$$y^{(j)}(0) = y_{j0}, \qquad j = 0,1,\ldots,n-1,$$

а для системы (1.2) — на координаты вектора состояния: $x_j(0) = x_{jo}$, $j = 1,2,\ldots,n$. Особо отметим, что в теории управления под начальными условиями понимают условия, которые существовали до момента приложения входного сигнала. Поэтому для любой функции $f(t)$ ее начальное значение понимается в смысле предела

$$f(0) = \lim_{\tau \to 0} f(\tau), \tag{1.3}$$

где переменная τ стремится к нулю, оставаясь отрицательной ($\tau < 0$). При этом говорят, что предел (1.3) задает *начальные условия слева,* т.е. в начальный момент $t = -0$. В соответствии с принятой трактовкой начальных условий, имеем $u^{(i)}(0) = u^{(i)}(-0) = 0$ для всех $i = 0,1,2,\ldots$.

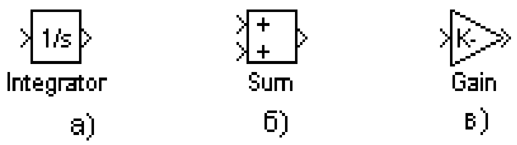

Рис. 1.1. Блоки элементарных операций: а) интегратор; б) сумматор; в) усилитель

С помощью блоков элементарных операций — *интегратора, сумматора и блока усиления* (см. рис.1.1) — могут быть составлены схемы моделирования уравнений (1.1) и (1.2). Указанные блоки легко реализуются физически (например, в виде электронных схем на основе операционных усилителей) и составляют элементную базу аналоговых вычислительных машин (АВМ).

Для составления схемы моделирования дифференциальных уравнений (1.2) необходимо использовать n интеграторов (число интеграторов определяется числом дифференциальных уравнений). При этом полагается, что на выходе j-го интегратора действует величина x_j, а на его входе, соответственно, $\dot{x}_j$. Далее, в соответствии со структурой правых частей уравнений (1.2) вводятся прямые и обратные связи, формирующие сигналы $\dot{x}_j$. Проиллюстрируем данный подход следующим примером. Пусть динамическая система описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2u, \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 2x_2 + 3u, \\ y = x_1 + 7x_2 \end{cases} \tag{1.4}$$

с начальными условиями $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = -1$ и входным воздействием $u = 2\sin t$. Тогда схема моделирования системы (1.4) будет иметь вид, представленный на рис.1.2, где начальные условия на интеграторах соответствуют начальным значениям координат вектора состояния $x_1(0)$ и $x_2(0)$.

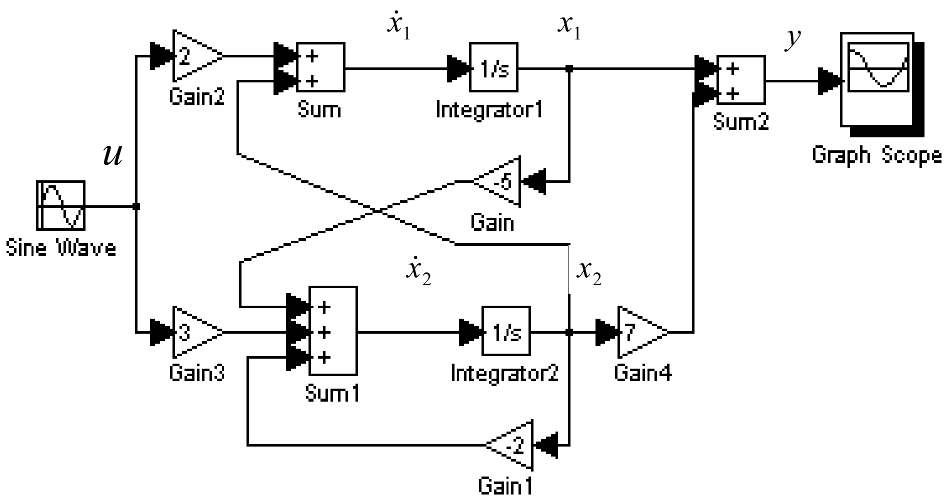

Рис.1.2. Схема моделирования системы (1.4)

Существует несколько различных способов построения схем моделирования уравнения (1.1). Рассмотрим на примере один из них. Пусть динамическая система описывается уравнением

$$y^{(3)} + 5y^{(2)} + 2y^{(1)} + y = 4u^{(2)} + 6u^{(1)} + 3u \qquad (1.5)$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $y^{(1)}(0) = 2$, $y^{(2)}(0) = 0$ и входным воздействием $u = \sin t$.

Заменим в (1.5) операцию дифференцирования оператором дифференцирования $s = d / dt$

$$s^3 y + 5s^2 y + 2sy + y = 4s^2 u + 6su + 3u$$

и выразим слагаемое со старшей степенью s:

$$s^3 y = -5s^2 y - 2sy - y + 4s^2 u + 6su + 3u .$$

Разделив обе части на s^3, после элементарных преобразований окончательно получаем

$$y = \frac{1}{s}(4u - 5y) + \frac{1}{s^2}(6u - 2y) + \frac{1}{s^3}(3u - y) . \qquad (1.6)$$

Таким образом, выходная переменная y представлена в виде суммы сигналов прямых и обратных связей, проинтегрированных соответствующее число раз. Схема моделирования, составленная на основе уравнения (1.6), приведена на рис.1.3.

Определим начальные условия интеграторов. Для удобства обозначим выходные сигналы интеграторов через z_1, z_2 и z_3 (см. рис.1.3) и, следовательно, искомые начальные условия — через $z_1(0)$, $z_2(0)$ и $z_3(0)$. Так как $z_1 = y$, то $z_1(0) = y(0) = 1$. Далее, из схемы моделирования видно, что $\dot{y} = \dot{z}_1 = z_2 + 4u - 5y$ и, следовательно,

$$z_2 = \dot{y} - 4u + 5y . \qquad (1.7)$$

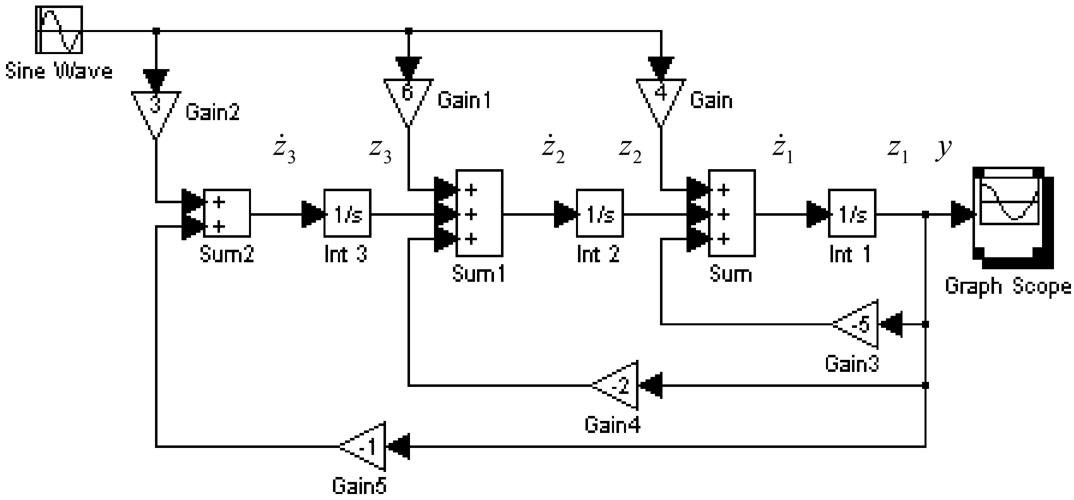

Рис.1.3. Схема моделирования уравнения (1.6)

Подставляя в (1.7) начальные значения сигналов $y(0)$, $u(0)$ и $\dot y(0)$, вычисляем начальное условие для второго интегратора (блок Int 2)

$$z_2(0) = \dot y(0) - 4u(0) + 5y(0) = 2 - 0 + 5 = 7\,.$$

Так же из структурной схемы получаем, что $\dot z_2 = z_3 + 6u - 2y$ и, следовательно, $z_3 = \dot z_2 - 6u + 2y$. Дифференцируя z_2 в силу уравнения (1.7), окончательно получаем

$$z_3 = \ddot y - 4\dot u + 5\dot y - 6u + 2y\,. \tag{1.8}$$

Подставляя в (1.8) начальные значения соответствующих сигналов, вычисляем начальное условие для третьего интегратора (блок Int 3)

$$z_3(0) = \ddot y(0) - 4\dot u(0) + 5\dot y(0) - 6u(0) + 2y(0) = 0 - 0 + 10 - 0 + 2 = 12\,.$$

Еще раз отметим, что мы рассматриваем начальные условия слева и, следовательно, $u(0) = \dot u(0) = 0$.

Порядок выполнения работы.

1. ***Исследование модели вход-выход.***

1.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.1), построить схему моделирования линейной динамической системы (1.1).

1.2. Осуществить моделирование системы при двух видах входного воздействия — $u = 1(t)$ и $u = 2\sin t$ — и нулевых начальных условиях. На экран выводить графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$. Продолжительность интервала наблюдения выбрать самостоятельно.

1.3. Осуществить моделирование свободного движения системы, т.е. с нулевым входным воздействием и ненулевыми начальными условиями, заданными в табл.1.2. На экран выводить $y(t)$.

2. *Исследование модели вход-состояние-выход***.**

2.1. В соответствии с вариантом задания (см. табл.1.3), построить схему моделирования линейной динамической системы (1.2а).

2.2. Осуществить моделирование линейной динамической системы при двух видах входного воздействия: $u = 1(t)$ и $u = 2\sin t$. На экран выводить графики сигналов $u(t)$ и $y(t)$. Для всех вариантов начальное значение вектора состояния нулевое.

2.3. Осуществить моделирование свободного движения системы с начальными условиями, приведенными в табл.1.4. На экран выводить $y(t)$

Содержание отчета.

1. Математические модели динамических систем и соответствующие им схемы моделирования.

2. Расчет начальных условий интеграторов для п.1.3 программы исследований.

3. Результаты моделирования (графики переходных процессов).

4. Выводы.

Вопросы к защите лабораторной работы.

1. Почему для моделирования динамических систем не используются блоки дифференцирования?

2. Укажите условие физической реализуемости системы, описанной дифференциальным уравнением (1.1).

3. С помощью каких команд пакета MATLAB можно рассчитать корни характеристического уравнения моделируемой системы?

4. Составьте схему моделирования уравнения $\dot{y} + 3y = 2\dot{u} + 5u$.

5. Составьте по схеме моделирования дифференциального уравнения (1.5) (см. рис.1.3) модель вход-состояние-выход.

Таблица 1.1

Варианты параметров моделей вход-выход

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Порядок модели n	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
a_0	9	5	5	8	7	15	7	2	1	25	30	0,12
a_1	6	4	4	6	5	5	3	0,5	0,5	1	0,8	1
a_2	3	3	2	2	2	10	—	—	—	—	—	—
b_0	12	2,5	7,5	12	10	15	10	4	2	25	30	0,1
b_1	2	2	0	1	3	0,5	6	2	2	2	3	2
b_2	0,1	3	5	10	1,5	1	0	0	0	0	0	0

Таблица 1.2

Варианты начальных условий моделей вход-выход

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Порядок модели n	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2
$y(0)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\dot{y}(0)$	0,5	-0,2	-0,4	0,1	-0,5	0,5	0,4	1	-0,5	0	0,5	0
$\ddot{y}(0)$	0	0,1	0,2	-0,1	0	0,1	—	—	—	—	—	—

Таблица 1.3

Варианты значений матриц *A, B* и *C*

Вариант	n	A	B	C^T	Вариант	n	A	B	C^T
1	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -1{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 6 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix}$	7	3	$\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -6 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0 \end{vmatrix}$
2	2	$\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 4 \\ 0 \end{vmatrix}$	8	3	$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}25 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$
3	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0{,}2 \end{vmatrix}$	9	3	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -4 & -2{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{vmatrix}$
4	2	$\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 8 \end{vmatrix}$	10	3	$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0 \\ 0{,}2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 0{,}1 \\ 2 \end{vmatrix}$
5	2	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}5 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 5 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	11	3	$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$
6	2	$\begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 1 & -0{,}8 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 3 \\ 0{,}1 \end{vmatrix}$	12	3	$\begin{vmatrix} 0 & -15 & 2 \\ 1 & -0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}25 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0{,}25 \end{vmatrix}$

Таблица 1.4

Варианты начальных условий автономных систем

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1(0)$	1	0,5	0,5	-0,5	0,2	0,33	-0,2	0	0,5	3	0,5	-5
$x_2(0)$	0,5	0,25	-0,4	0,13	-0,1	-0,5	0,4	1	2	0	-2	0,5
$x_3(0)$	—	—	—	—	—	—	0,1	-0,1	0	0,5	0	0