

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### СВОБОДНОЕ И ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

**Цель работы.** Исследование динамических свойств линейных систем второго порядка.

**Методические рекомендации.** До начала работы студенты должны получить от преподавателя вариант задания. К занятию допускаются студенты, выполнившие требуемые расчеты и заполнившие табл.5.2. Лабораторная работа рассчитана на 2 часа.

**Теоретические сведения.** При исследовании движений линейных динамических систем принято различать свободную и вынужденную составляющие. Свободная составляющая описывает движение системы при отсутствии воздействия на систему со стороны окружающей среды (автономной системы) и обусловлено ее состоянием в начальный момент времени. Вынужденная составляющая представляет собой реакцию системы на входное воздействие и не зависит от ее начального состояния.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = bg, \quad y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0 \quad (5.1)$$

где  $g = g(t)$  - входное воздействие,  $y = y(t)$  — выход системы,  $a_1, a_0, b$  - параметры системы. Переменные состояния рассматриваемой системы могут быть определены как  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ . Тогда система уравнений вход-состояние-выход принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a_0x_1 - a_1x_2 + bg, \\ y = x_1, \end{cases} \quad (5.2)$$

с начальными условиями  $x_{10} = x_1(0) = y_0$ ,  $x_{20} = x_2(0) = \dot{y}_0$ . Структурная схема, соответствующая уравнениям (5.2) приведена на рис. 5.1.

Примером такой системы является тело массой  $m$  (рис. 5.2), которое подвешено на пружине и может совершать вертикальные движения. При условии, что сила трения пропорциональна скорости движения тела, а сила, с которой действует пружина на тело, пропорциональна его смещению  $y$  относительно положения равновесия, движение такой системы описывается дифференциальным уравнением:

$$m\ddot{y} + l\dot{y} + ky = F,$$

где  $l$  — коэффициент трения,  $k$  — коэффициент жесткости пружины,  $F$  — внешняя сила, приложенная к телу. Полагая  $a_1 = \frac{l}{m}$ ,  $a_0 = \frac{k}{m}$ ,  $b = \frac{1}{m}$ , получим уравнение (5.1).

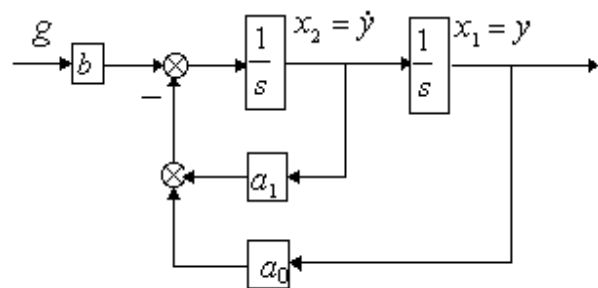


Рис. 5.1. Структурная схема

Движение рассматриваемой динамической системы описывается решением  $y(t)$  дифференциального уравнения (5.1) и содержит две составляющие

$$y(t) = y_{св}(t) + y_{в}(t),$$

где  $y_{св}(t)$  и  $y_{в}(t)$  — соответственно свободная и вынужденная составляющая движения. Свободная составляющая  $y_{св}(t)$  находится как частное решение однородного дифференциального уравнения

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = 0 \quad (5.3)$$

с начальными условиями  $y_{св}(0) = y_0, \dot{y}_{св}(0) = \dot{y}_0$ . Вынужденная составляющая  $y_{в}(t)$  находится как частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5.1) при нулевых начальных условиях  $y_{в}(0) = \dot{y}_{в}(0) = 0$ . Таким образом, исследование рассматриваемых процессов сводится к изучению свойств решений дифференциальных уравнений (5.1) и (5.3).

Для интегрирования дифференциального уравнения (5.3) надо найти корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (5.4)$$

Если корни  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения вещественны и различны, то решение дифференциального уравнения (5.3) есть

$$y_{св}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.5)$$

где постоянные  $C_1, C_2$  определяются по начальным условиям. Если  $\lambda_1 = \lambda_2$ , то

$$y_{св}(t) = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_1 t} \quad (5.6)$$

Когда корни характеристического уравнения (5.4) комплексные  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ , решение дифференциального уравнения (5.3)

$$y_{св}(t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.7)$$

где постоянные  $A, \varphi$  определяются по начальным условиям.

При  $a_1 = 0$  корни характеристического уравнения (5.3) чисто мнимые  $\lambda_{1,2} = \pm j\omega$  и выражение (5.7) будет иметь вид

$$y_{св}(t) = A \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.8)$$

Соотнося приведенные выше формулы для свободной составляющей движения с параметрами  $l, k$  механической системы (рис. 5.2), можно сделать следующий вывод. При увеличении коэффициента трения  $l$  и фиксированном значении коэффициента жесткости пружины  $k$  характер свободной составляющей изменяется от гармоническо-

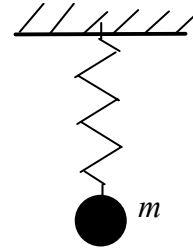


Рис.5.2. Механическая система

го незатухающего (5.8) (при  $l = 0$ ) до колебательного затухающего (5.7) (при  $0 < l^2 < 4km$ ). При дальнейшем увеличении коэффициента трения характер свободной составляющей принимает монотонный затухающий характер (5.4).

Рассмотрим на примере поиск свободной составляющей системы с параметрами  $a_1 = 2$ ,  $a_0 = 1$  и начальными условиями  $y_{ce}(0) = 1$ ,  $\dot{y}_{ce}(0) = 0$ . В этом случае корни характеристического уравнения:  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . Свободную составляющую ищем в виде (5.5) и, следовательно, при  $t = 0$  имеем:  $y_{ce}(0) = C_1 = 1$ ,  $\dot{y}_{ce}(0) = -C_1 + C_2 = 0$ . Таким образом,  $C_1 = C_2 = 1$  и  $y_{ce}(t) = (1+t)e^{-t}$ .

Для исследования свободного движения динамических систем часто оказывается удобным изобразить его на плоскости в Декартовой прямоугольной системе координат  $Ox_1x_2$ . Координаты  $x_1 = y$  и  $x_2 = \dot{y}$  в этом случае называют *фазовыми координатами*, а плоскость  $Ox_1x_2$  - *фазовой плоскостью*. В каждом частном случае движения системы (5.3) при  $t = t_0$  состояние системы изображается на фазовой плоскости точкой с фиксированными координатами  $x_1 = y(t_0)$ ,  $x_2 = \dot{y}(t_0)$ . При изменении времени  $t$  *изображающая точка* перемещается по фазовой плоскости, прочерчивая на ней линию, называемую *фазовой траекторией*. Совокупность фазовых траекторий системы (5.3) образует *фазовый портрет*.

Вынужденная составляющая  $y_e(t)$  движения системы есть решение неоднородного уравнения (5.1) при нулевых начальных условиях. Установившейся реакцией на заданное воздействие  $g(t)$  называют, такую функцию  $y_y(t)$ , что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t) - y_y(t)| = 0$$

Для некоторых видов воздействий, т.е. некоторых функций  $g(t)$ , удается указать очень простые способы вычисления установившейся реакции системы при условии, что действительная часть каждого корня характеристического уравнения (5.3) отрицательна, т.е.  $\text{Re} \lambda_i < 0$  ( $i = 1, 2$ ). Так реакция системы на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^n A_k t^k,$$

где  $n$  - любое неотрицательное целое число, есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^n C_k t^k,$$

а на воздействие

$$g(t) = \sum_{k=0}^n [A_k \cos(k\omega t) + B_k \sin(k\omega t)]$$

есть

$$y_y(t) = \sum_{k=0}^n [C_k \cos(k\omega t) + D_k \sin(k\omega t)].$$

Неизвестные постоянные  $C_k, D_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ), участвующие в определении установившейся реакции, определяются из условия обращения уравнения (5.1) в тождество при подстановке в него соответствующего воздействия и реакции. Проиллюстрируем сказанное на примере. Пусть требуется определить установившуюся реакцию системы с параметрами  $a_1 = 3$ ,  $a_0 = 2$ ,  $b = 2$  на воздействие  $g(t) = 2 \cos(t)$ . В этом случае, корни характеристического уравнения:  $\lambda_1 = -1 < 0$ ,  $\lambda_2 = -2 < 0$ . Установившуюся реакцию ищем в виде  $y_y(t) = C_0 + C_1 \cos(t) + D_1 \sin(t)$ . После подстановки функций  $y_y(t)$ ,  $g(t)$  в уравнение (5.1) и группировки подобных членов, получим

$$2C_0 + (C_1 + 3D_1 - 4)\cos(t) + (D_1 - 3C_1)\sin(t) = 0.$$

Для выполнения последнего равенства необходимо, чтобы постоянные  $C_0, C_1, D_1$  удовлетворяли системе линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 + 3D_1 = 4, \\ D_1 - 3C_1 = 0, \\ 2C_0 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдем  $C_0 = 0, C_1 = 0.4, D_1 = 1.2$ . Таким образом, установившаяся реакция системы будет иметь вид

$$y_y(t) = 0.4 \cos(t) + 1.2 \sin(t).$$

### Порядок выполнения работы

1. Для каждого из вариантов (Табл. 5.1) задано по шесть наборов значений корней  $\lambda_1, \lambda_2$  характеристического уравнения (5.4) и начальных условий  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$ . Вычислить коэффициенты  $a_1, a_0$  и найти аналитическое выражение для свободной составляющей  $y_{ce}(t)$ . Результаты вычислений занести в табл. 5.2. Осуществить моделирование свободного движения системы при  $t \geq 0$  с соответствующими заданной функции  $y_{ce}(t)$  параметрами  $a_1, a_0$  и начальными условиями  $y(0), \dot{y}(0)$ . На экран монитора выводить графики  $y(t), \dot{y}(t)$ .

2. Для 2-го, 3-го и 4-го набора значений корней  $\lambda_1, \lambda_2$  и начальных условий  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = \dot{y}_0$  (Табл. 5.1) экспериментально построить фазовые траектории автономной системы. На экран монитора выводить зависимости  $\dot{y}(y)$

3. Для каждого входного воздействия  $g(t)$  осуществить моделирование вынужденного движения системы при  $t \geq 0$  с начальными условиями  $y_0 = -1; 0; 1$  и  $\dot{y}_0 = 0$ . Параметры системы и входные воздействия приведены в Табл. 5.3. На экран монитора выводить графики  $y(t), g(t)$ .

### Содержание отчета

1. Математическая модель исследуемой динамической системы и соответствующая ей схема моделирования.

2. Результаты расчетов (Табл. 5.2).

3. Результаты вычислительных экспериментов (шесть графиков свободного движения, три графика фазовых траекторий и три графика вынужденного движения системы).

#### 4. Выводы.

##### Вопросы к защите лабораторной работы

1. Как связаны знаки вещественных частей корней характеристического уравнения и коэффициентов ?

2. Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы с течением времени стремилась к нулю ?

3. Какими должны быть корни характеристического уравнения, чтобы свободная составляющая движения системы подчинялась гармоническому закону ?

4. Определите корни характеристического уравнения, если свободная составляющая движения системы равна  $e^{2t} \sin(2t)$ .

5. Определите установившуюся реакцию системы  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 1y = 3f$ , если  $f(t) = 2t$ .

Таблица 5.1

Варианты начальных условий и корней характеристического уравнения

Вариант	Номер эксперимента											
	1		2		3		4		5		6	
	Начальные условия											
	$y_0$	$\dot{y}_0$	$y_0$	$\dot{y}_0$	$y_0$	$\dot{y}_0$	$y_0$	$\dot{y}_0$	$y_0$	$\dot{y}_0$	$y_0$	$\dot{y}_0$
	1	0	1	0	1	0	0.05	0	0.05	0	0	0.1
	Корни характеристического уравнения											
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_1$	$\lambda_2$
1	-1	-1	-0.5+j3	-0.5-j3	j3	-j3	0.5+j3	0.5-j3	1	1	-0.1	0.1
2	-1	-1.5	-0.6+j4	-0.6-j4	j4	-j4	0.6+j4	0.6-j4	1	1.5	-0.2	0.2
3	-1	-2	-0.7+j5	-0.7-j5	j5	-j5	0.7+j5	0.7-j5	1	2	-0.3	0.3
4	-2	-1.5	-0.8+j6	-0.8-j6	j6	-j6	0.8+j6	0.8-j6	2	1.5	-0.4	0.4
5	-2	-2	-0.9+j7	-0.9-j7	j7	-j7	0.9+j7	0.9-j7	2	2	-0.5	0.5
6	-2.5	-2.5	-1+j8	-1-j8	j8	-j8	1+j8	1-j8	2.5	2.5	-0.6	0.6
7	-3	-1	-1.1+j9	-1.1-j9	j9	-j9	1.1+j9	1.1-j9	3	1	-0.7	0.7
8	-3	-1.5	-1.2+j10	-1.2-j10	j10	-j10	1.2+j10	1.2-j10	3	1.5	-0.8	0.8
9	-3	-2	-1.3+j11	-1.3-j11	j11	-j11	1.3+j11	1.3-j11	3	2	-0.9	0.9
10	-3	-3	-1.4+j12	-1.4-j12	j12	-j12	1.4+j12	1.4-j12	3	3	-1	1
11	-4	-3	-1.6+j13	-1.6-j13	j13	-j13	1.6+j13	1.6-j13	4	3	-1.2	1.2
12	-4	-4	-1.7+j14	-1.7-j14	j14	-j14	1.7+j14	1.7-j14	4	4	-1.3	1.3

Таблица 5.2

## Результаты вычислений

№	Корни		Параметры системы		Начальные условия		Свободная составляющая $y_{св}(t)$
	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$a_0$	$a_1$	$y(0)$	$\dot{y}(0)$	
1							
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
6							

Таблица 5.3

## Варианты параметров системы и входного воздействия

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_0$	4	1	4	4	3	1	4	1	4	4	3	1
$a_1$	2	2	3	4	3	3	2	2	3	4	3	3
$b$	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3
$g_1(t)$	1	1.5	2	2.5	2	2.5	1	1.5	2	2.5	1	1.5
$g_2(t)$	$0.5t$	$0.4t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.5t$	$0.4t$	$0.8t$	$0.6t$	$0.5t$	$0.4t$
$g_3(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$	$\sin(3t)$	$\cos(t)$	$\sin(2t)$	$\cos(2t)$