Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики.
Кафедра систем управления и информатики.
Основы теории автоматического управления.

Лабораторная работа №5
Свободное и вынужденное движение линейных систем.
8 вариант

Работу выполнили студенты группы P3415
Фомин Евгений, *Халанский Дмитрий*

2017

1. Задание

Начальные условия и корни характеристических уравнений:

N	Начальные условия		Корни характеристического уравнения	
	y_0	$\dot{y}_0$	λ_1	λ_2
1	1	0	-3.0	-1.5
2	1	0	$-1.2 + j10$	$-1.2 - j10$
3	1	0	$j10$	$-j10$
4	0.05	0	$1.2 + j10$	$1.2 - j10$
5	0.05	0	3.0	1.5
6	0	0.1	-0.8	0.8

Параметры системы и входное воздействие:

a_0	a_1	b	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$g_3(t)$
1	2	2	1.5	$0.4t$	$\cos(2t)$

2. Математическая модель

2.1. Поиск a_0, a_1

Нам даны два корня уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Подставляя их в уравнение, имеем систему:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0 \\ \lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Имеем по теореме Виета:

$$\begin{aligned} a_0 &= \lambda_1\lambda_2 \\ a_1 &= -\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \end{aligned}$$

2.2. Поиск выражения свободной составляющей

В зависимости от корней характеристического уравнения свободная составляющая может принимать разный вид:

$\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda}$

$$y_{\text{св}}(t) = \left(C_1 + C_2 t\right) e^{\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = C_1 \\ y'_{\text{св}}(0) = \lambda C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = y_{\text{св}}(0) \\ C_2 = -\lambda y_{\text{св}}(0) + y'_{\text{св}}(0) \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \left(y_{\text{св}}(0) \cdot (1 - \lambda t) + y'_{\text{св}}(0) t\right) e^{\lambda t}$$

$\boldsymbol{\lambda = \alpha \pm (\beta + 0i)}$

$$y_{\text{св}}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = C_1 + C_2 \\ y'_{\text{св}}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{y'_{\text{св}}(0) - \lambda_2 y_{\text{св}}(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ C_2 = -\dfrac{y'_{\text{св}}(0) - \lambda_1 y_{\text{св}}(0)}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{cases}$$

$$y_{\text{св}}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\left(y'_{\text{св}}(0) - \lambda_2 y_{\text{св}}(0)\right) e^{\lambda_1 t} - \left(y'_{\text{св}}(0) - \lambda_1 y_{\text{св}}(0)\right) e^{\lambda_2 t} \right)$$

$\boldsymbol{\lambda = \alpha \pm \omega i}$

$$y_{\text{св}}(t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = A \sin(\phi) \\ y'_{\text{св}}(0) = A \left(\omega \cos(\phi) + \alpha \sin(\phi)\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \phi = \operatorname{arcctg} \left(\omega^{-1} \cdot \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{y_{\text{св}}(0)} - \alpha \right) \right) \\ A = y_{\text{св}}(0) \cdot \operatorname{sgn}\left(y'_{\text{св}}(0) - \alpha y_{\text{св}}(0)\right) \sqrt{\left(\omega^{-1} \cdot \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{y_{\text{св}}(0)} - \alpha \right) \right)^2 + 1} \end{cases}$$

$\boldsymbol{\lambda = \pm \omega i}$ Применяя наработки предыдущего параграфа при $\alpha = 0$:

$$y_{\text{св}}(t) = A \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \begin{cases} y_{\text{св}}(0) = A \sin(\phi) \\ y'_{\text{св}}(0) = A\omega \cos(\phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi = \operatorname{arcctg} \left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{\omega y_{\text{св}}(0)} \right) \\ A = y_{\text{св}}(0) \cdot \operatorname{sgn}\left(y'_{\text{св}}(0)\right) \sqrt{\left(\dfrac{y'_{\text{св}}(0)}{\omega y_{\text{св}}(0)} \right)^2 + 1} \end{cases}$$

3. Расчёт

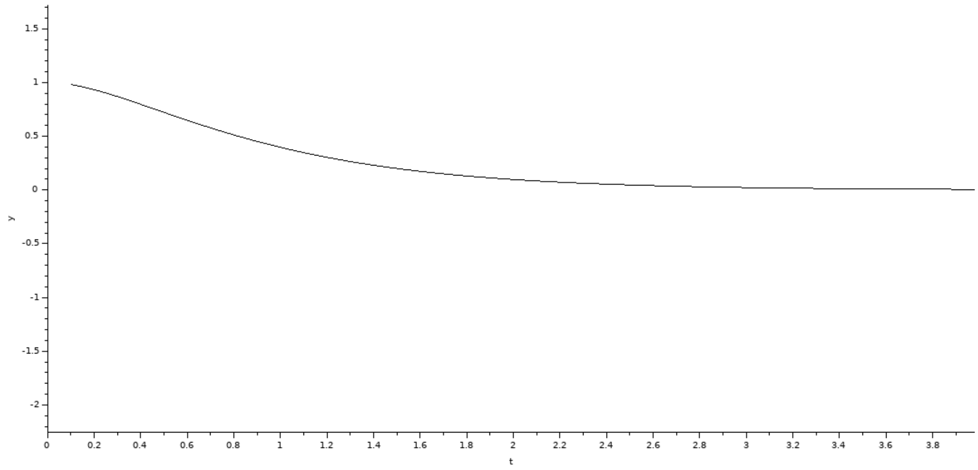
N	Корни		Параметры		Условия		Свободная составляющая $y_{\text{св}}(t)$
	λ_1	λ_2	a_0	a_1	y_0	$\dot{y}_0$	
1	-3.0	-1.5	4.5	4.5	1	0	$2e^{-1.5t} - e^{-3t}$
2	$-1.2 \pm j10$		101.44	2.4	1	0	$1.0072e^{-1.2} \sin(10t + 1.4515)$
3	$\pm j10$		100	0	1	0	$\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$
4	$1.2 \pm j10$		101.44	-2.4	0.05	0	$0.05036e^{1.2} \sin\left(-10t + 1.4514\right)$
5	3.0	1.5	4.5	-4.5	0.05	0	$0.1e^{1.5t} - 0.05e^{3t}$
6	± 0.8		-0.64	0	0	0.1	$\frac{1}{16}\left(e^{0.8t} - e^{-0.8t}\right)$

4. Эксперименты

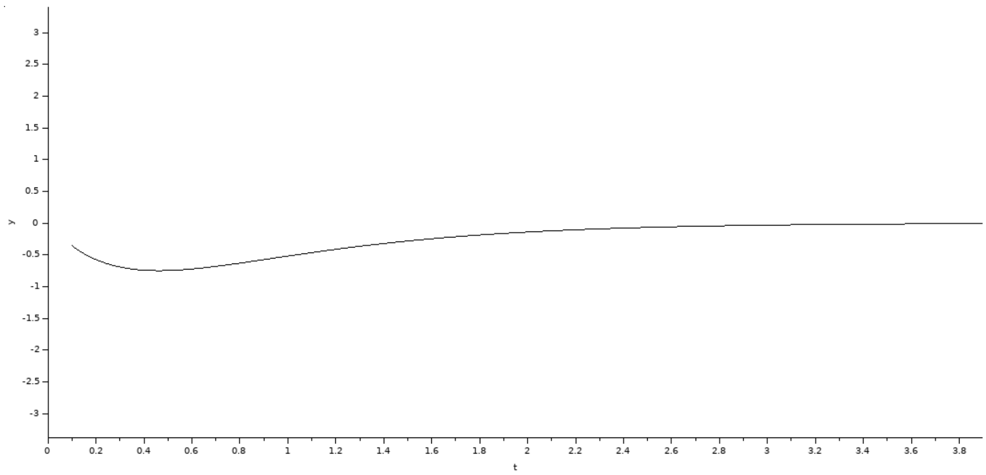
4.1. Расчёт свободных составляющих

4.1.1. $2e^{-1.5t} - e^{-3t}$

y:

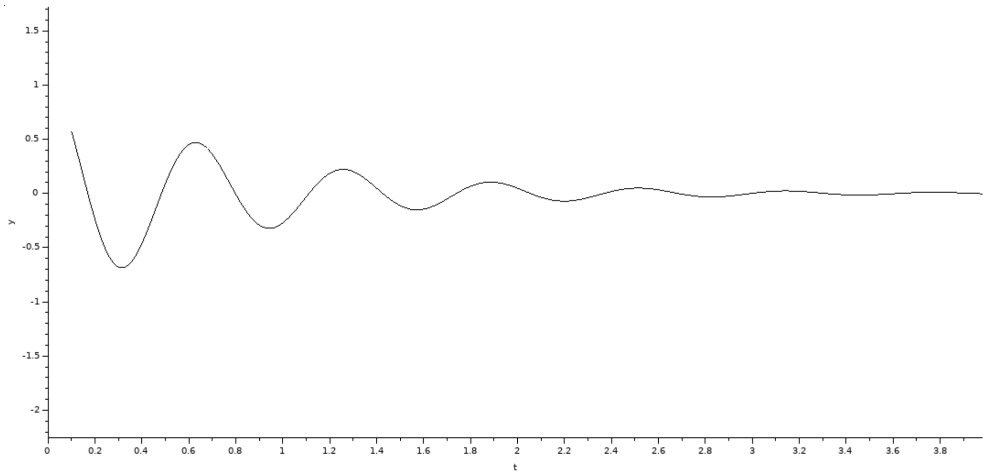


y':

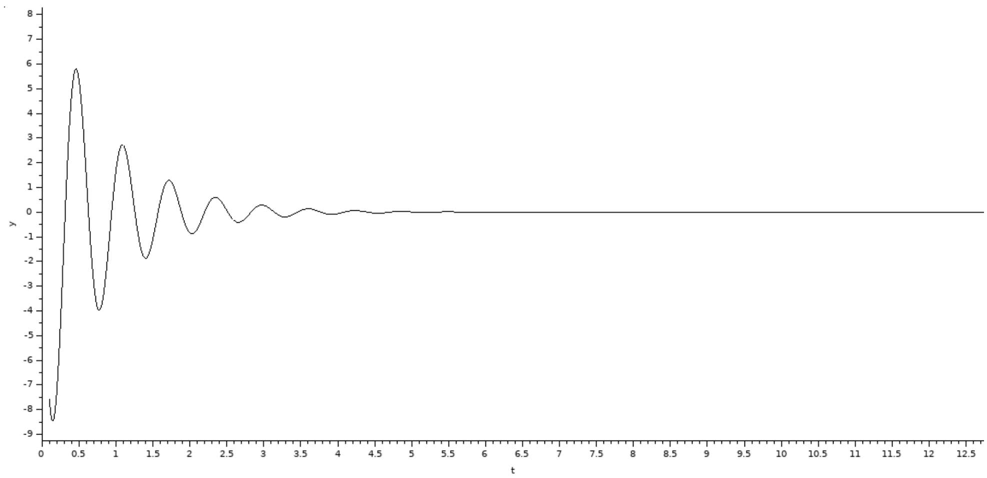


4.1.2. $1.0072e^{-1.2}\sin(10t + 1.4515)$

y:

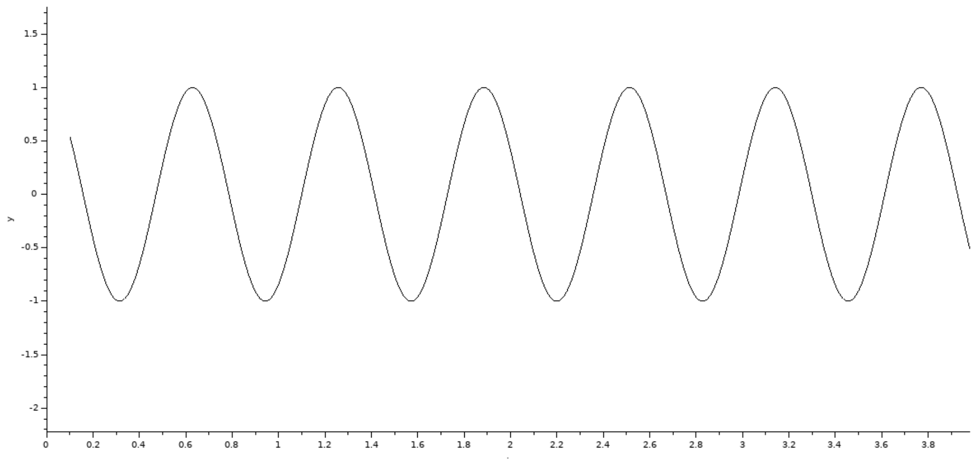


y':

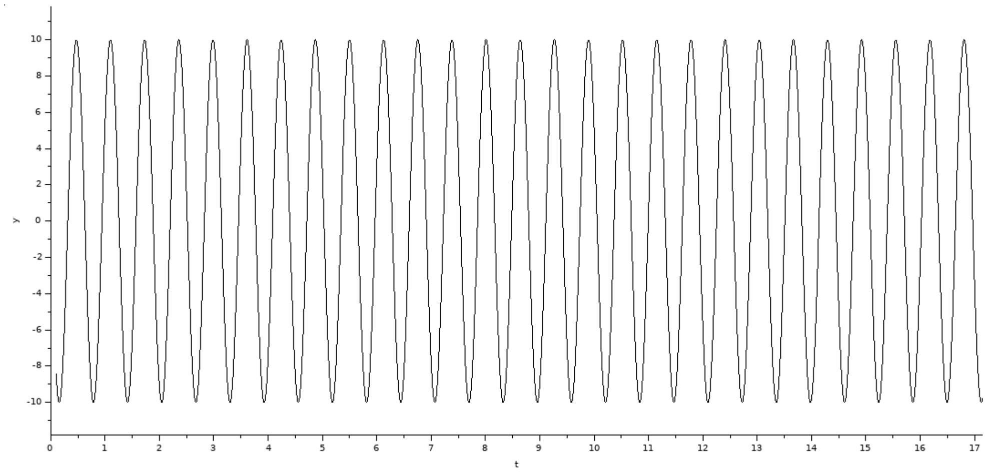


4.1.3. $\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$

y:

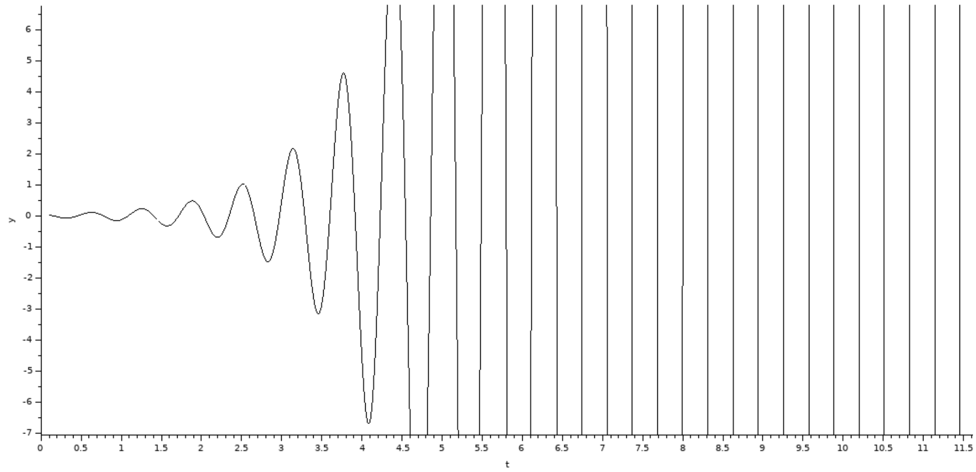


y':

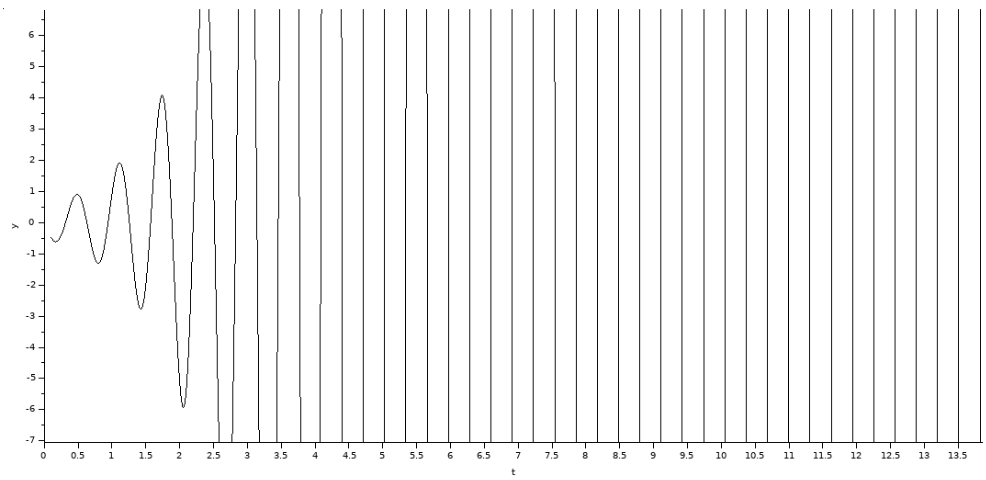


4.1.4. $0.05036e^{1.2}\sin\left(-10t+1.4514\right)$

y:

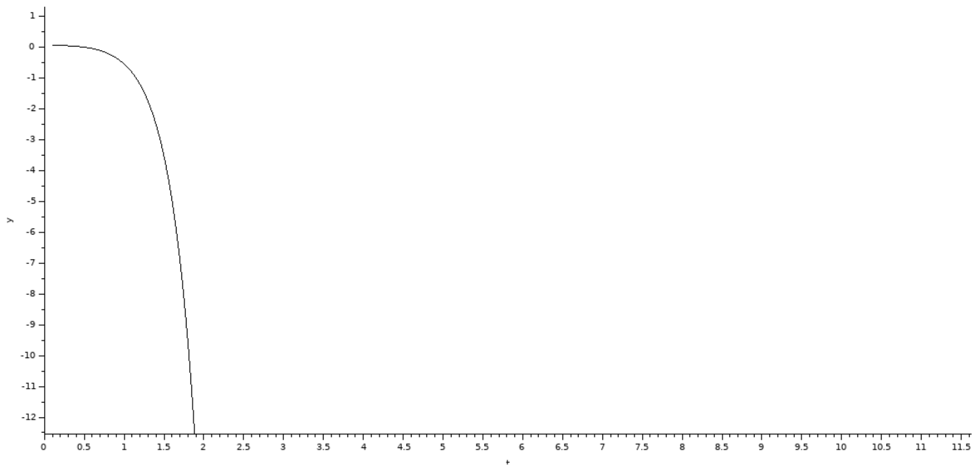


y':

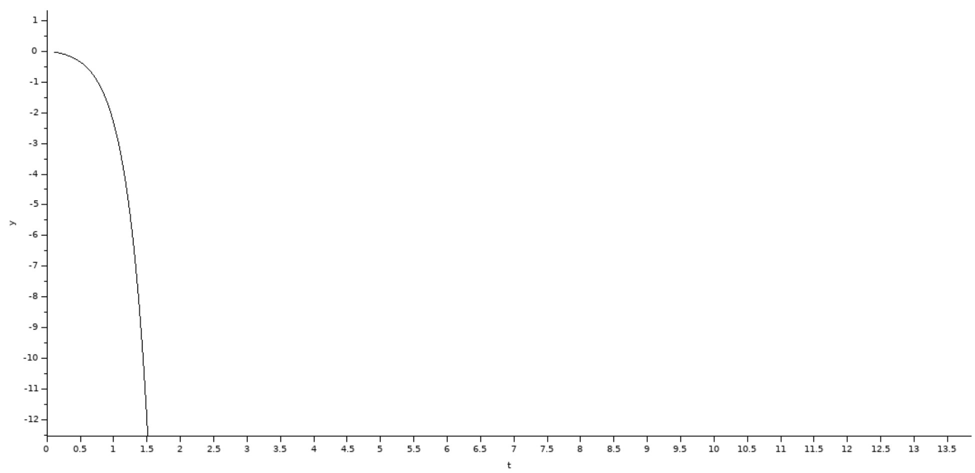


4.1.5. $0.1e^{1.5t} - 0.05e^{3t}$

y:

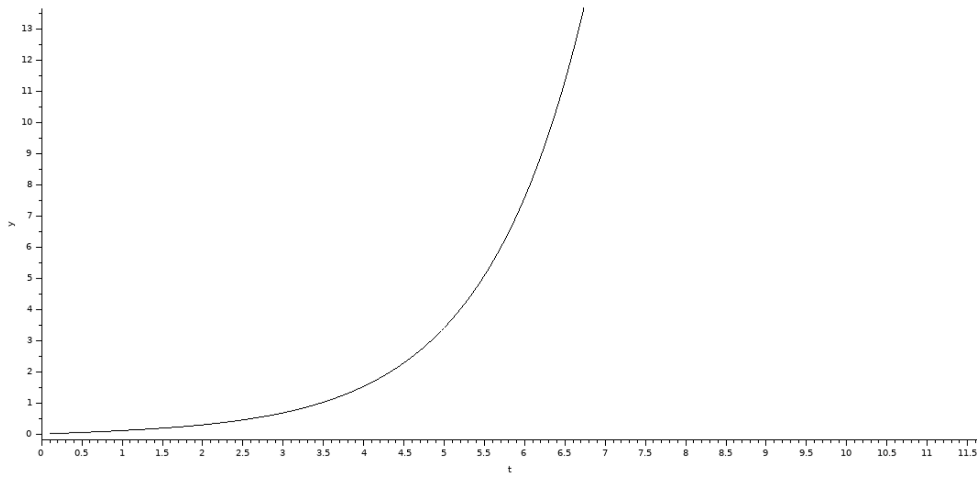


y':

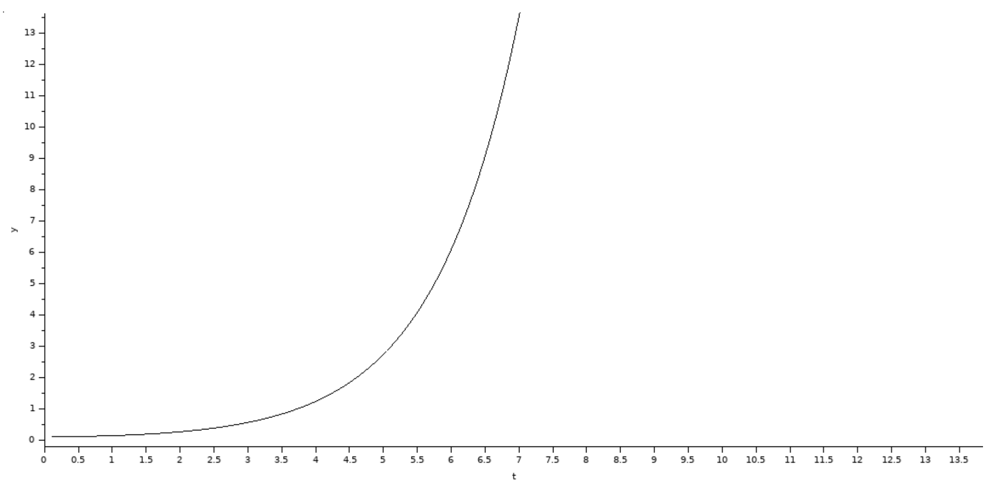


4.1.6. $\frac{1}{16}\left(e^{0.8t} - e^{-0.8t}\right)$

y:

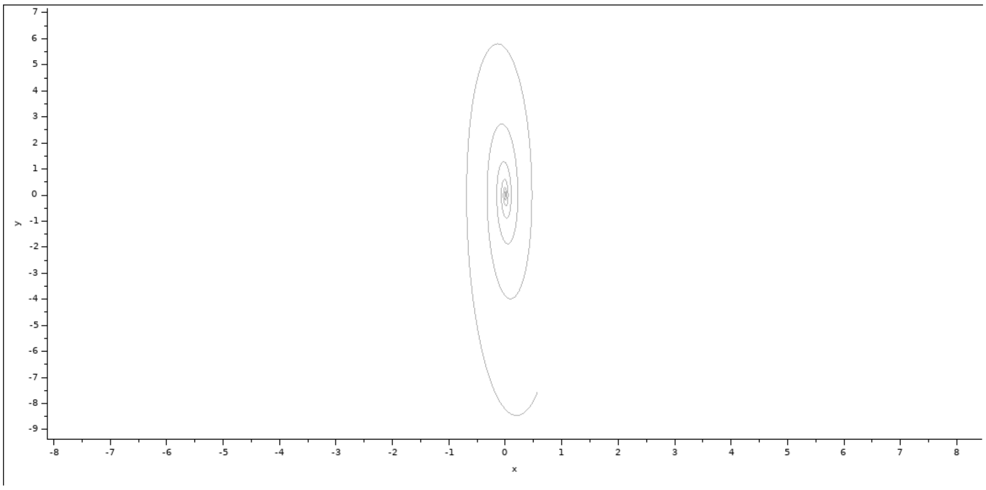

y
t
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
0.5
1.5
2.5
3.5
4.5
5.5
6.5
7.5
8.5
9.5
10.5
11.5

y':

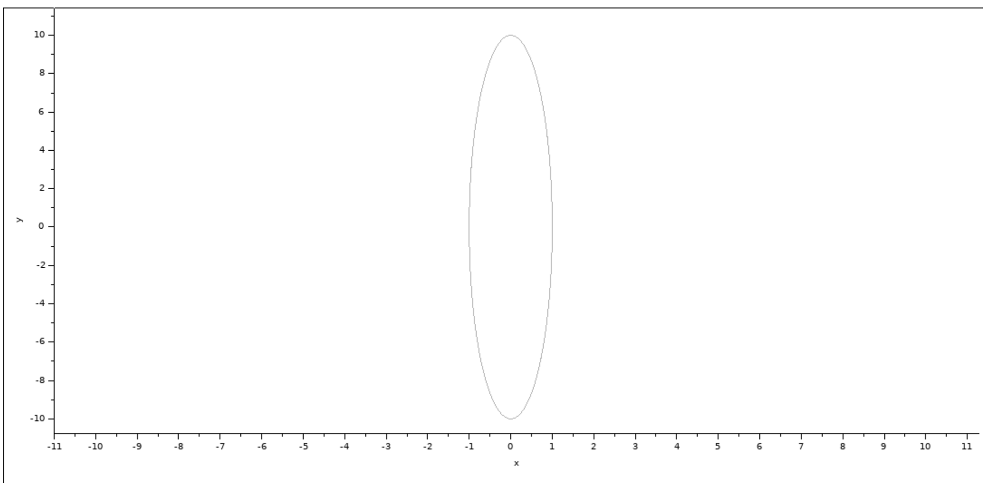

y
t
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
0.5
1.5
2.5
3.5
4.5
5.5
6.5
7.5
8.5
9.5
10.5
11.5
12.5
13.5

4.2. Фазовые кривые

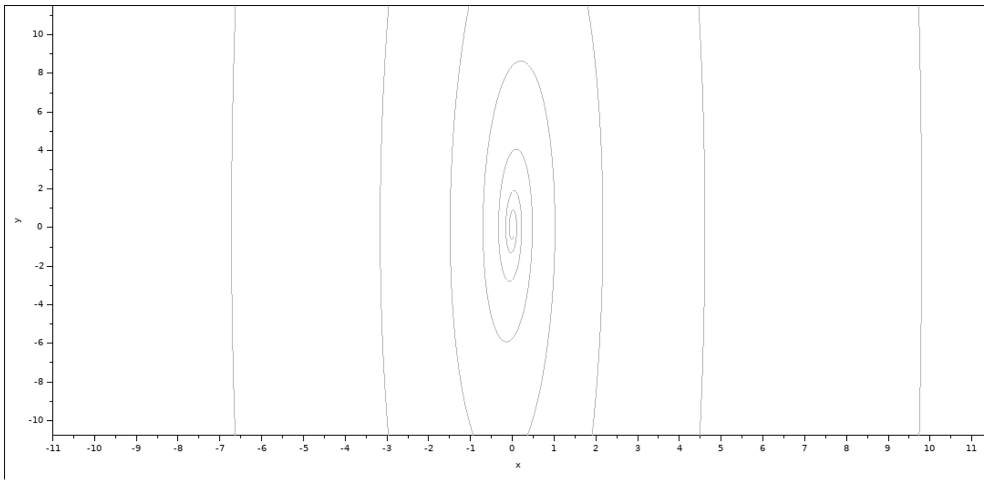
4.2.1. $1.0072e^{-1.2}\sin(10t + 1.4515)$



4.2.2. $\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$



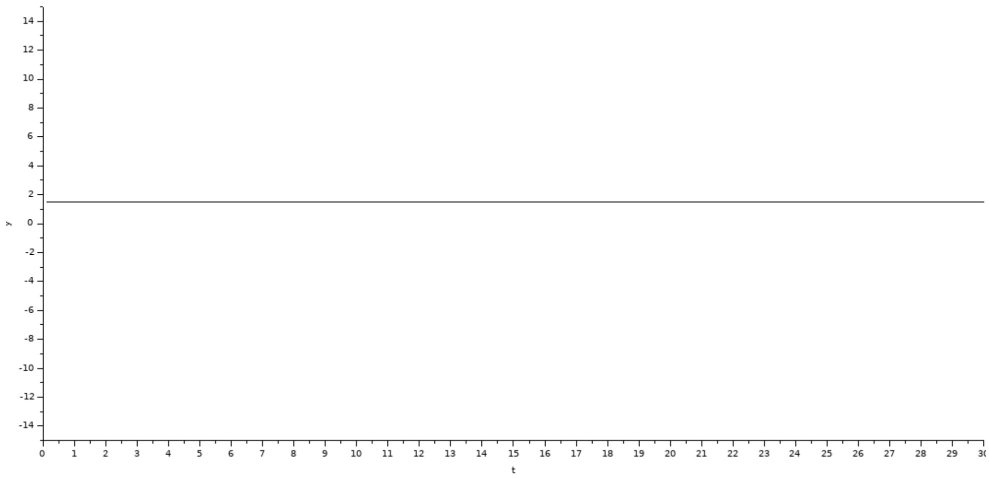
4.2.3. $0.05036e^{1.2}\sin(-10t + 1.4514)$



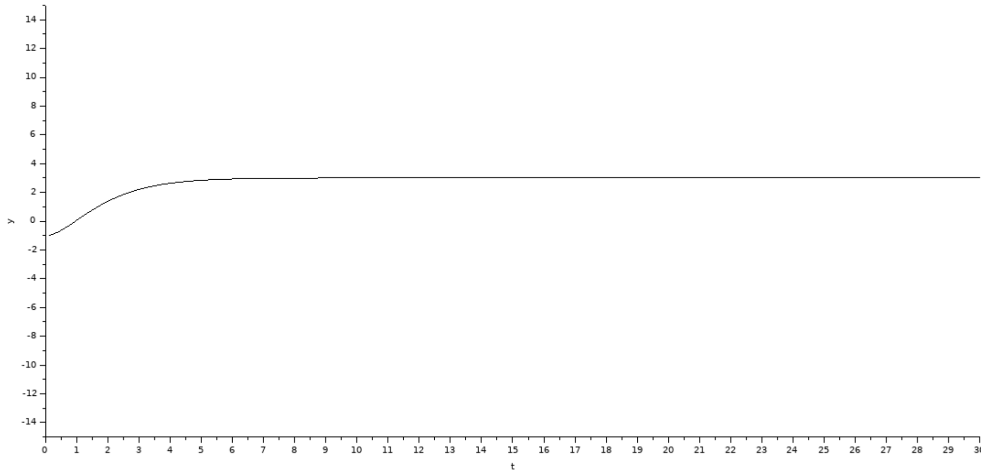
4.3. Вынужденное движение

4.3.1. $g = 1.5$

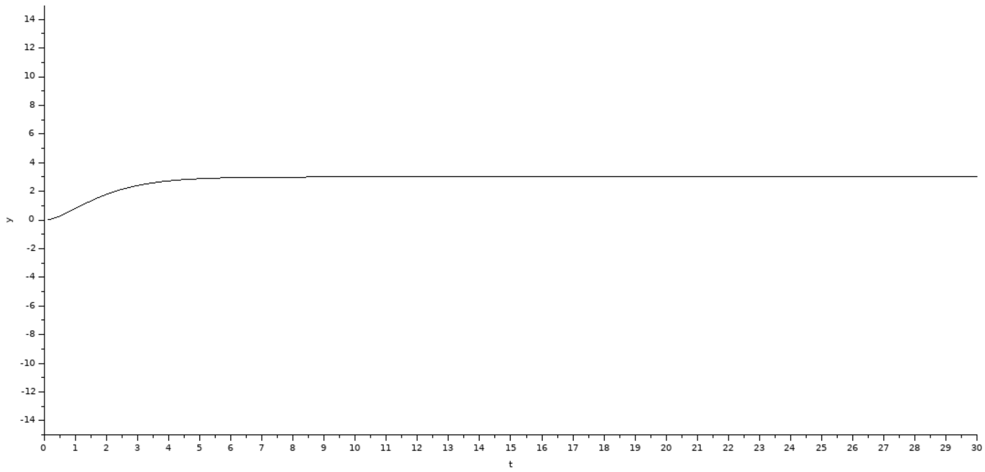
$g(t)$



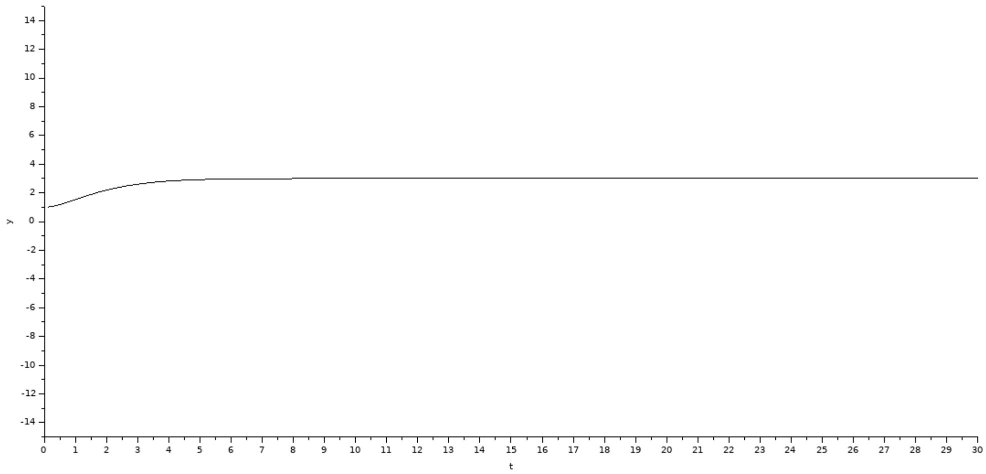
$y(t), y(0) = -1$



$y(t), y(0) = 0$

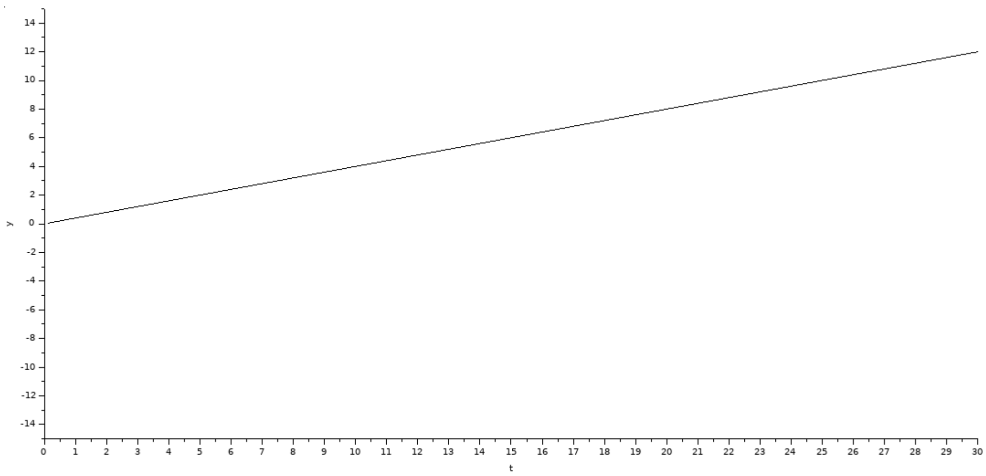


$y(t), y(0) = 1$

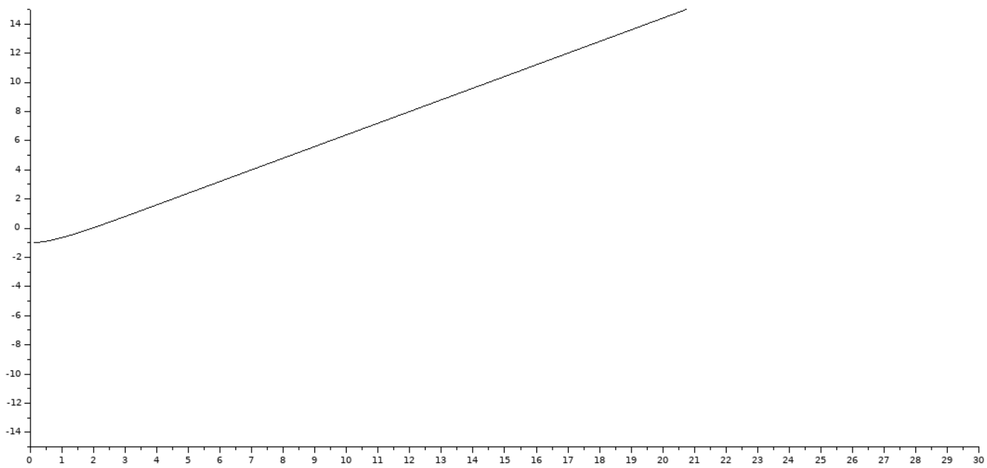


4.3.2. $g = 0.4t$

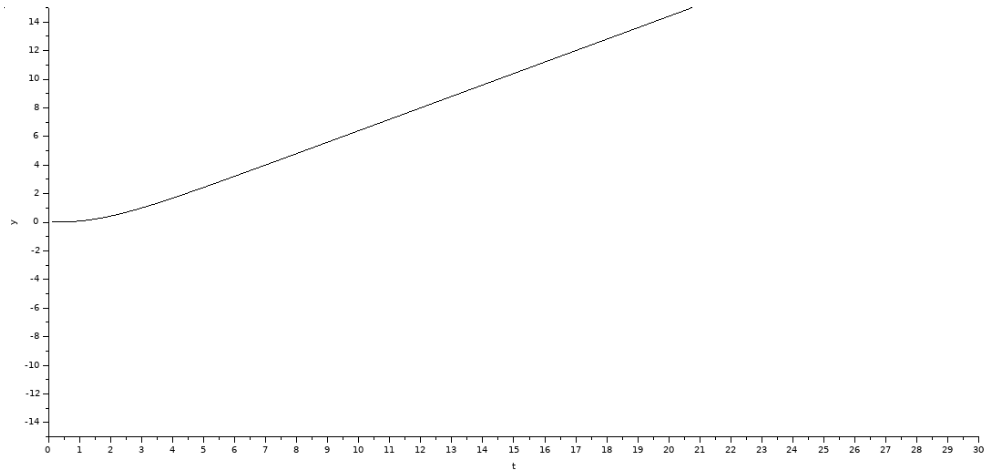
$g(t)$



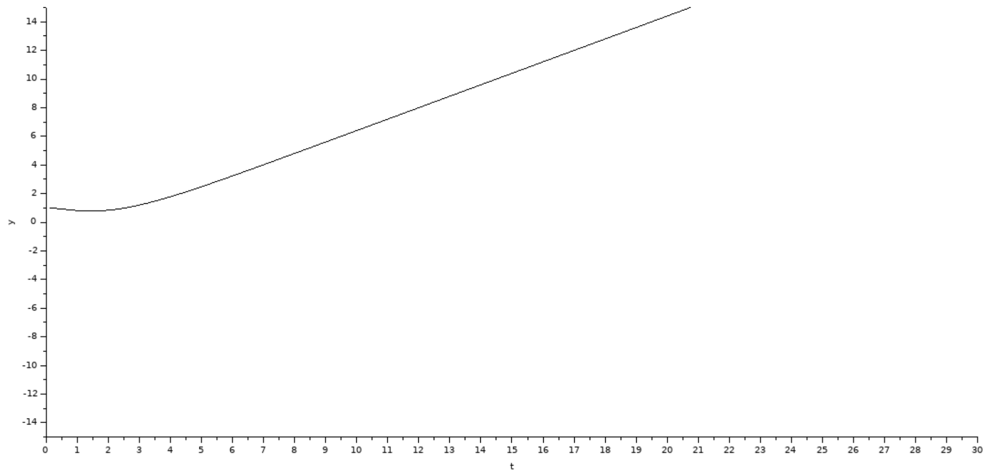
$y(t), y(0) = -1$



$y(t), y(0) = 0$

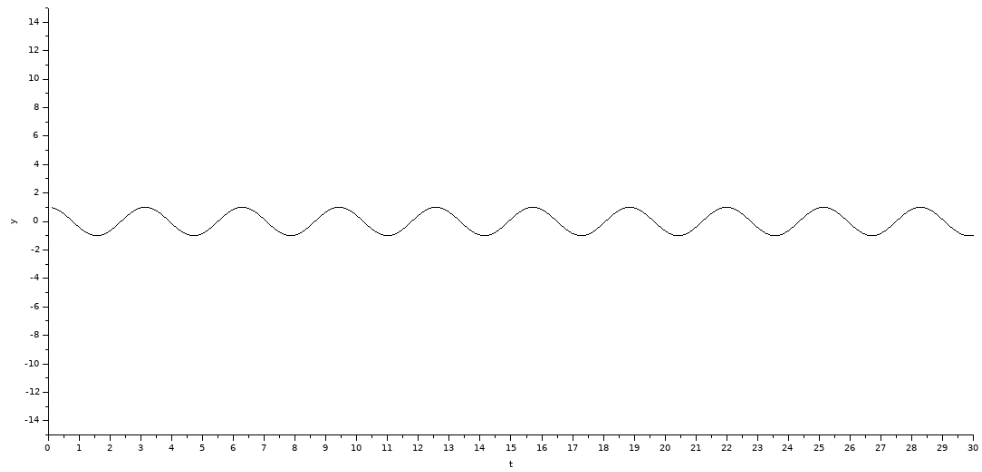


$y(t), y(0) = 1$

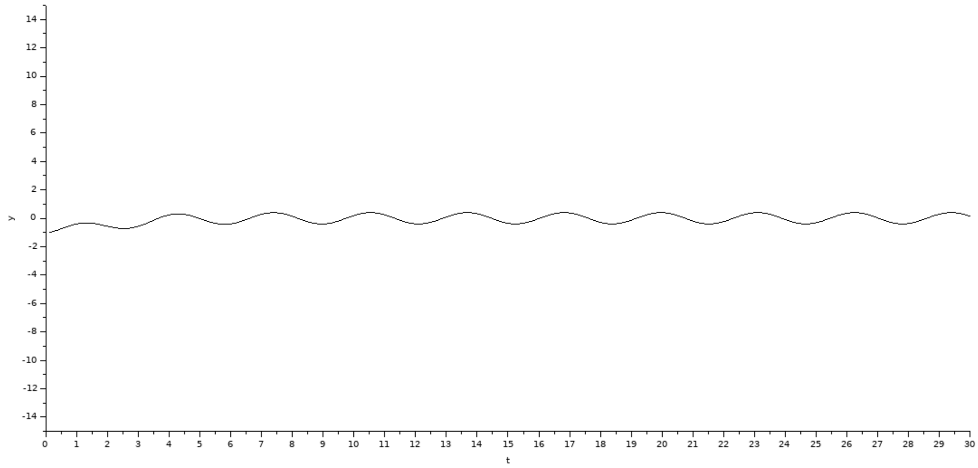


4.3.3. $g = \cos(2t)$

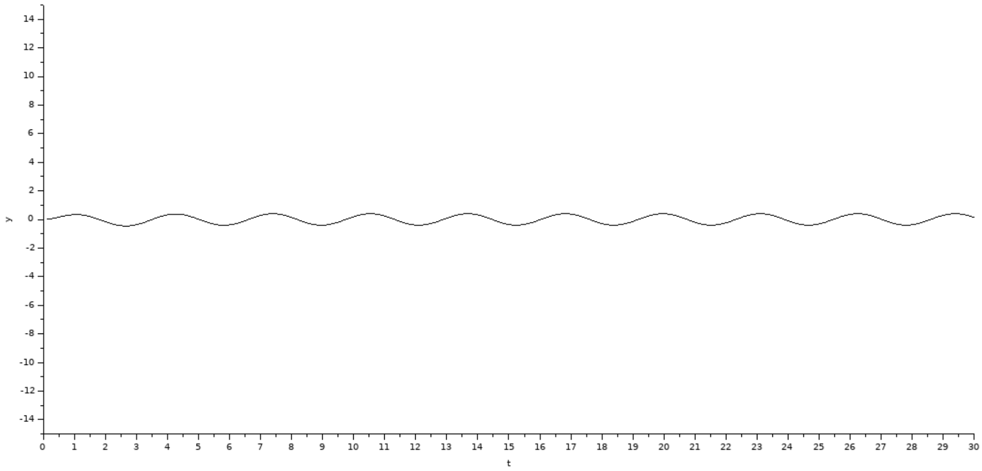
$g(t)$



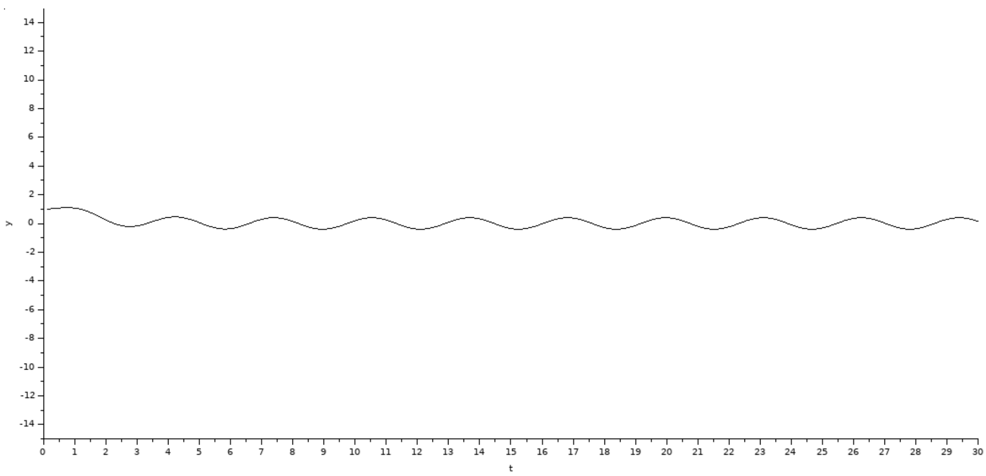
$\boldsymbol{y(t), y(0) = -1}$



$\boldsymbol{y(t), y(0) = 0}$



$\boldsymbol{y(t), y(0) = 1}$



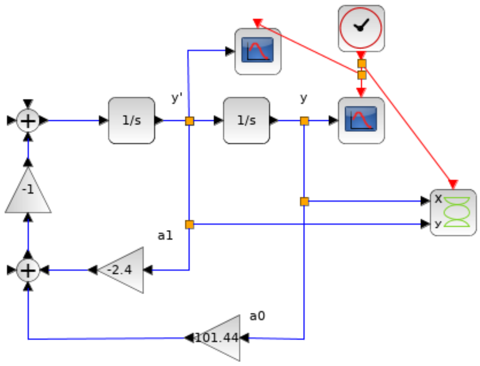


Рис. 1. Схема моделирования свободной составляющей

5. Выводы

В результате проделанной работы мы смоделировали дифференциальные уравнения вида $y''+a_1y'+a_0y = bg(t)$, где b может быть равен 0, что соответствует свободному движению системы, путём построения аналоговых электрических систем, описываемых такими дифференциальными уравнениями. Это позволяет осуществлять, к примеру, анализ затухающих колебательных движений.