

Университет ИТМО
Кафедра систем управления и информатики

Основы автоматического управления
Лабораторная работа №5
Вариант №9

Выполнили: Фролов Сергей
Голендухин Денис
Группа Р3415

1. Задание

Начальные условия и корни характеристического уравнения

N	Начальные условия		Корни характеристического уравнения	
	y_0	\dot{y}_0	λ_1	λ_2
1	1	0	-3	-2
2	1	0	-1.3+j11	-1.3-j11
3	1	0	j11	-j11
4	0.05	0	1.3+j11	1.3-j11
5	0.05	0	3	2
6	0	0.1	-0.9	0.9

Параметры системы и входное воздействие

Вариант	a_0	a_1	b	$g_1(t)$	$g_2(t)$	$g_3(t)$
9	4	3	3	2	0.8t	sin(3t)

2. Математическая модель

Поиск a_0 и a_1

Даны два корня уравнения $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$. Подставляем их в уравнение и получим систему:

$$\begin{cases} \lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0 = 0 \\ \lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Имеем по теореме Виета:

$$a_0 = \lambda_1\lambda_2$$

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Поиск выражения свободной составляющей

В зависимости от корней характеристического уравнения свободная составляющая может принимать разный вид:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$y_{CB}(t) = (C_1 + C_2t)e^{\lambda t} \rightarrow \begin{cases} y_{CB}(0) = C_1 \\ y'_{CB}(0) = \lambda C_1 + C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = y_{CB}(0) \\ C_2 = -\lambda y_{CB}(0) + y'_{CB}(0) \end{cases}$$

$$y_{CB}(t) = (y_{CB}(0) * (1 - \lambda t) + y'_{CB}(0)t)e^{\lambda t}$$

$$\lambda = \alpha \pm (\beta + 0i)$$

$$y_{CB}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_{CB}(0) = C_1 + C_2 \\ y'_{CB}(0) = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{y'_{CB}(0) - \lambda_2 y_{CB}(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} \\ C_2 = -\frac{y'_{CB}(0) - \lambda_1 y_{CB}(0)}{\lambda_1 + \lambda_2} \end{cases}$$

$$y_{CB}(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} ((y'_{CB}(0) - \lambda_2 y_{CB}(0)) e^{\lambda_1 t} - (y'_{CB}(0) - \lambda_1 y_{CB}(0)) e^{\lambda_2 t})$$

$$\lambda = \alpha \pm \omega i$$

$$y_{CB}(t) = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_{CB}(0) = A \sin(\varphi) \\ y'_{CB}(0) = A(\omega \cos(\varphi) + \alpha \sin(\varphi)) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi = \text{arcctg}(\omega^{-1} * (\frac{y'_{CB}(0)}{y_{CB}(0)} - \alpha)) \\ A = y_{CB}(0) * \text{sgn}(y'_{CB}(0) - \alpha y_{CB}(0)) * \sqrt{(\omega^{-1} * (\frac{y'_{CB}(0)}{y_{CB}(0)} - \alpha))^2 + 1} \end{cases}$$

$\lambda = \pm \omega i$ используя предыдущий пункт при $\alpha = 0$

$$y_{CB}(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \begin{cases} y_{CB}(0) = A \sin(\varphi) \\ y'_{CB} = A \omega \cos(\varphi) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \varphi = \text{arcctg}(\frac{y'_{CB}(0)}{\omega y_{CB}(0)}) \\ A = y_{CB}(0) * \text{sgn}(y'_{CB}(0)) \sqrt{(\frac{y'_{CB}(0)}{\omega y_{CB}(0)})^2 + 1} \end{cases}$$

3. Расчет

N	Корни		Параметры		Условия		Свободная составляющая $y_{св}(t)$
	λ_1	λ_2	a_0	a_1	y_0	\dot{y}_0	
1	-3	-2	6	5	1	0	$-2^{-3t} + 3^{-2t}$
2	$-1.3+j11$	$-1.3-j11$	122.69	2.6	1	0	$1.0069e^{-1.3}\sin(11t + 1.453)$
3	$j11$	$-j11$	121	0	1	0	$\sin(10t + \frac{\pi}{2})$
4	$1.3+j11$	$1.3-j11$	122.69	-2.6	0.05	0	$0.0503e^{1.3}\sin(-11t + 1.453)$
5	3	2	6	-5	0.05	0	$-0.1e^{3t} + 0.15e^{2t}$
6	-0.9	0.9	-0.81	0	0	0.1	$-0.056e^{-0.9t} + 0.056e^{0.9t}$

4. Эксперименты

Расчет свободных составляющих

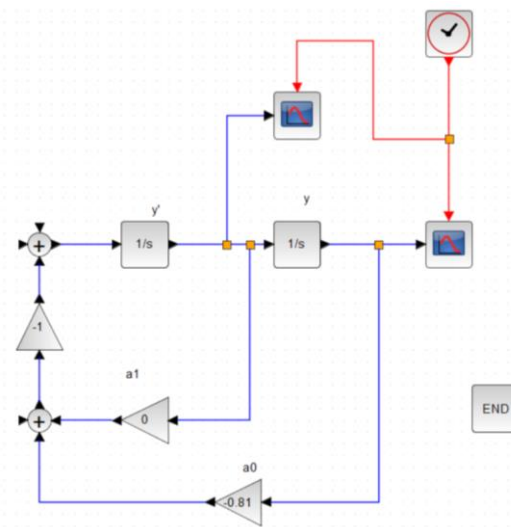
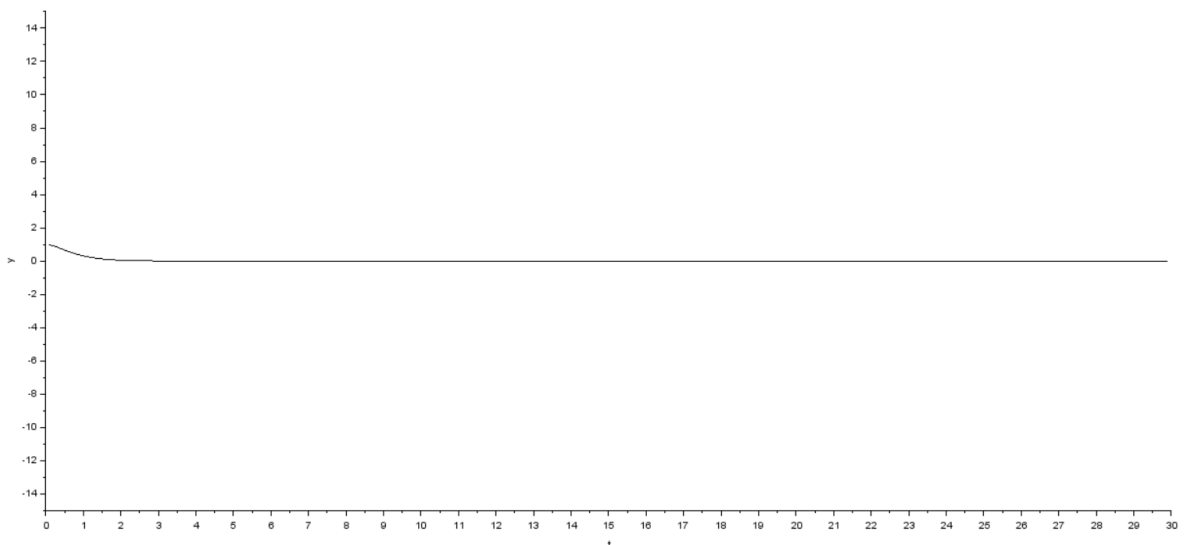


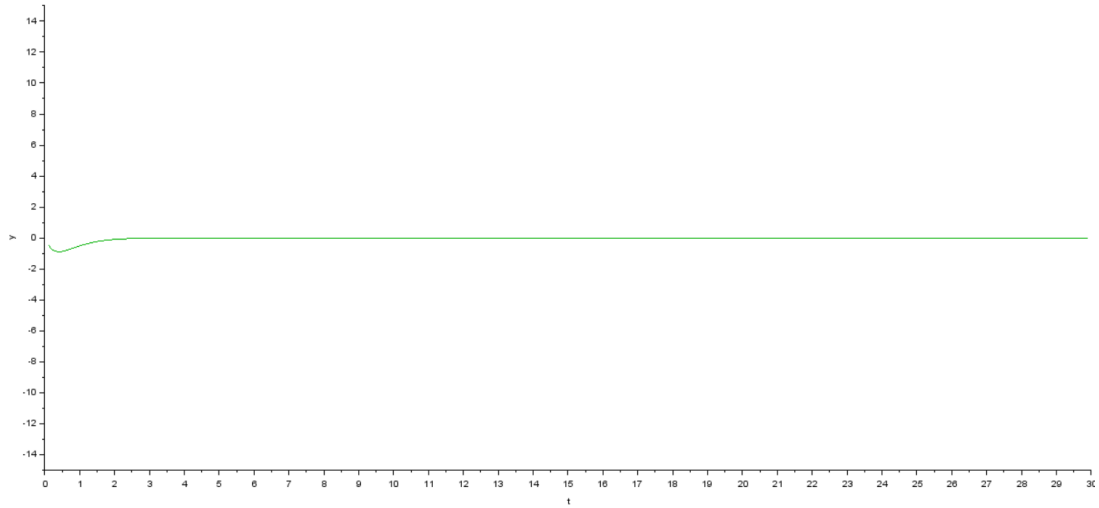
Схема моделирования

1. $-2^{-3t} + 3^{-2t}$

у:

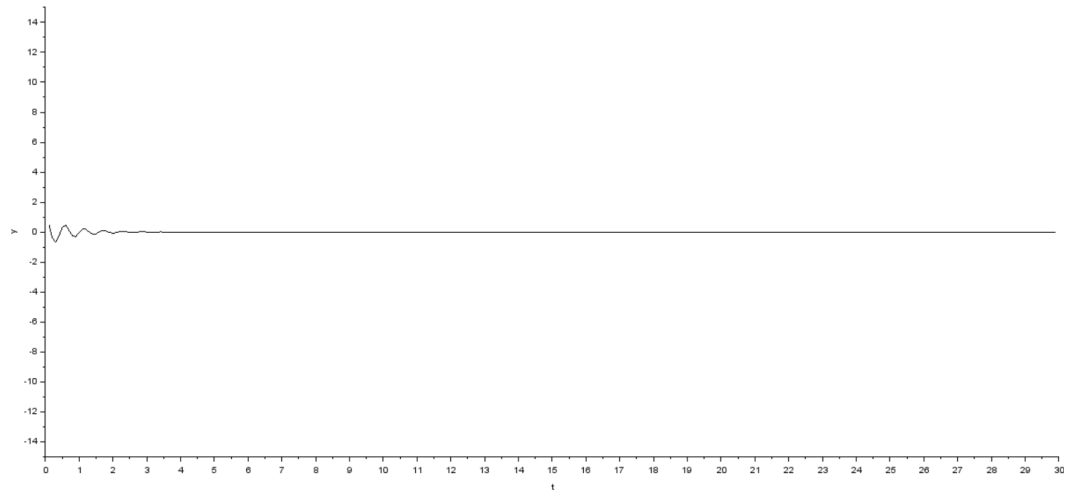


y' :

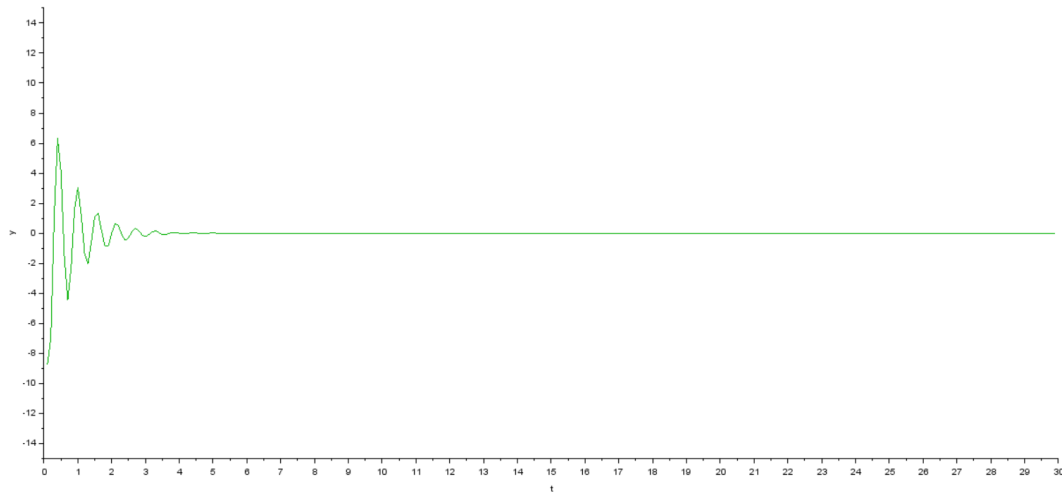


2. $1.0069e^{-1.3}\sin(11t + 1.453)$

y :

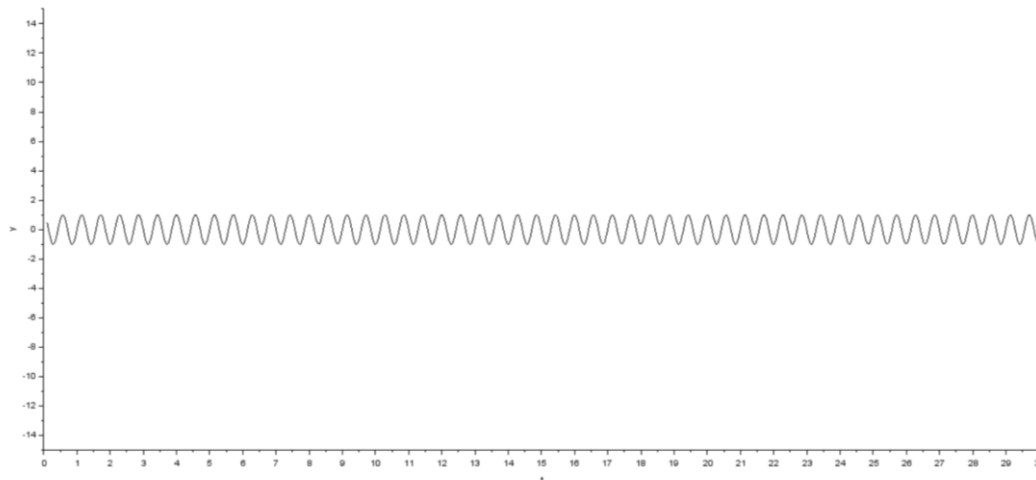


y' :

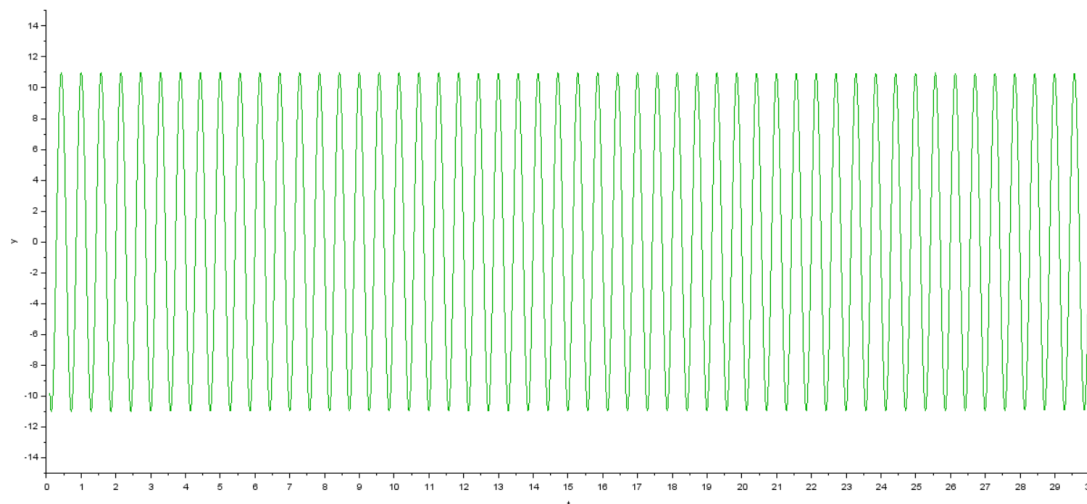


3. $\sin(10t + \frac{\pi}{2})$

y:

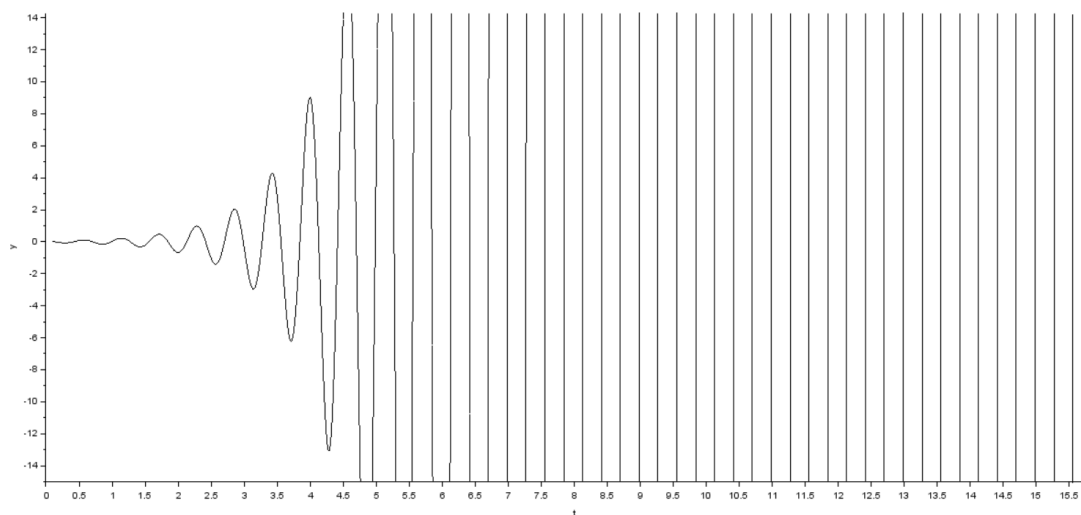


y':

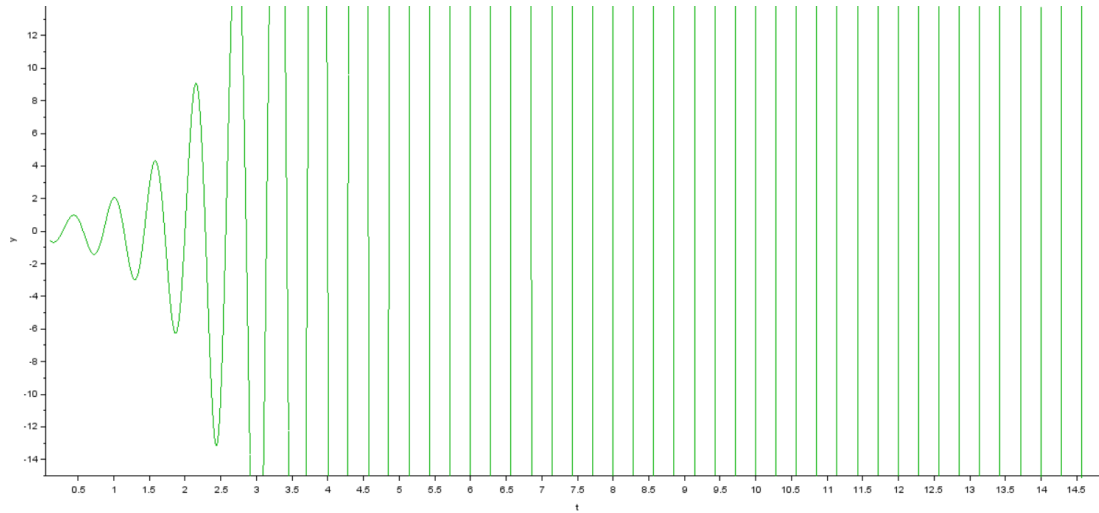


4. $0.0503e^{1.3}\sin(-11t + 1.453)$

y:

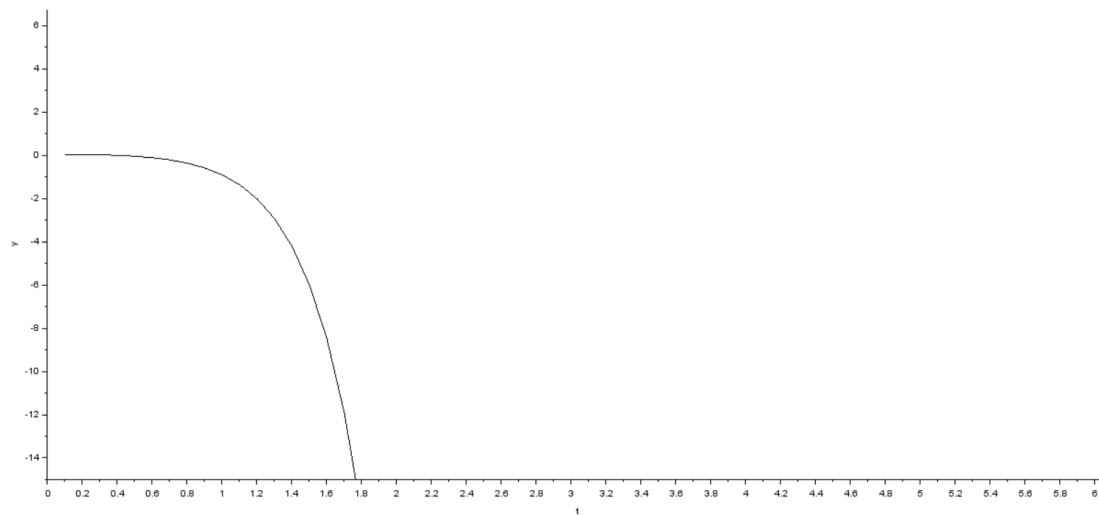


y' :

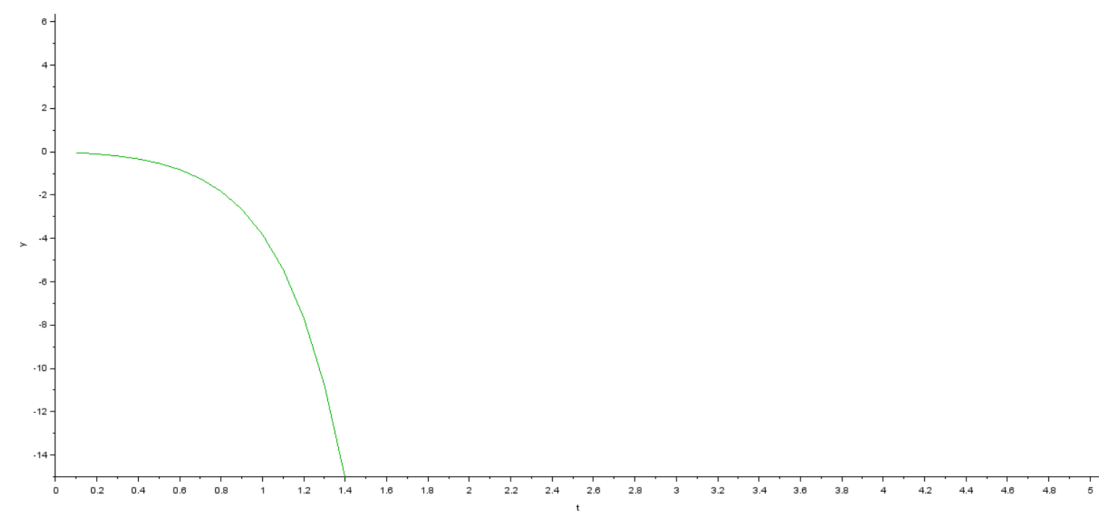


5. $-0.1e^{3t} + 0.15e^{3t}$

y :

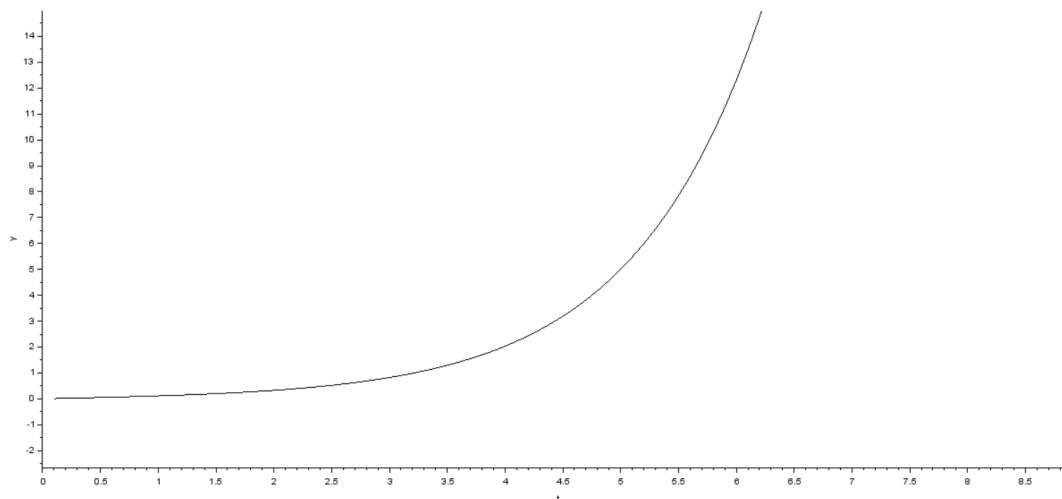


y' :

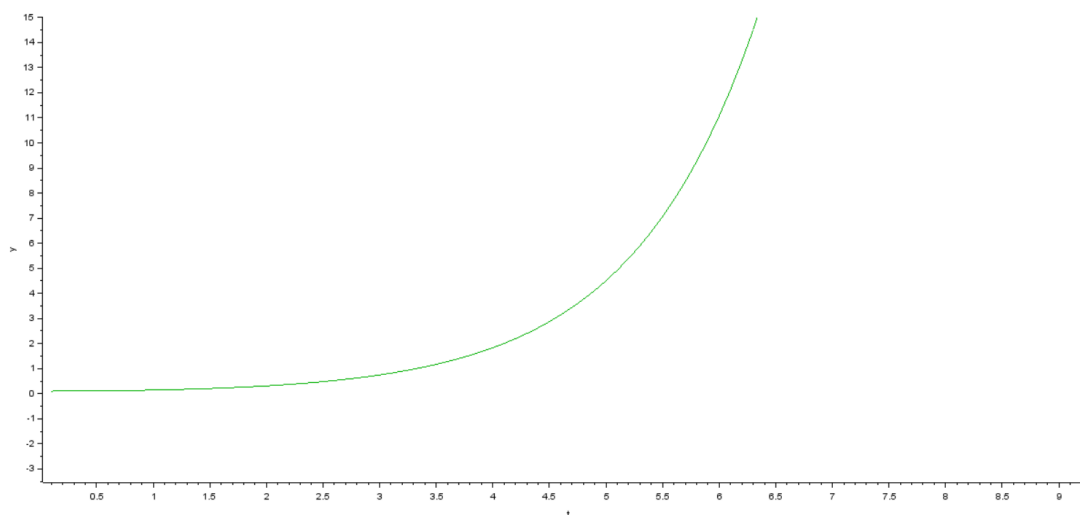


6. $-0.056e^{-0.9t} + 0.056e^{0.9t}$

y:



y':



Фазовые кривые

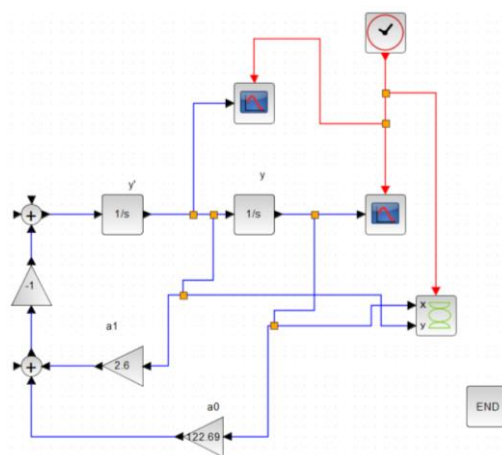
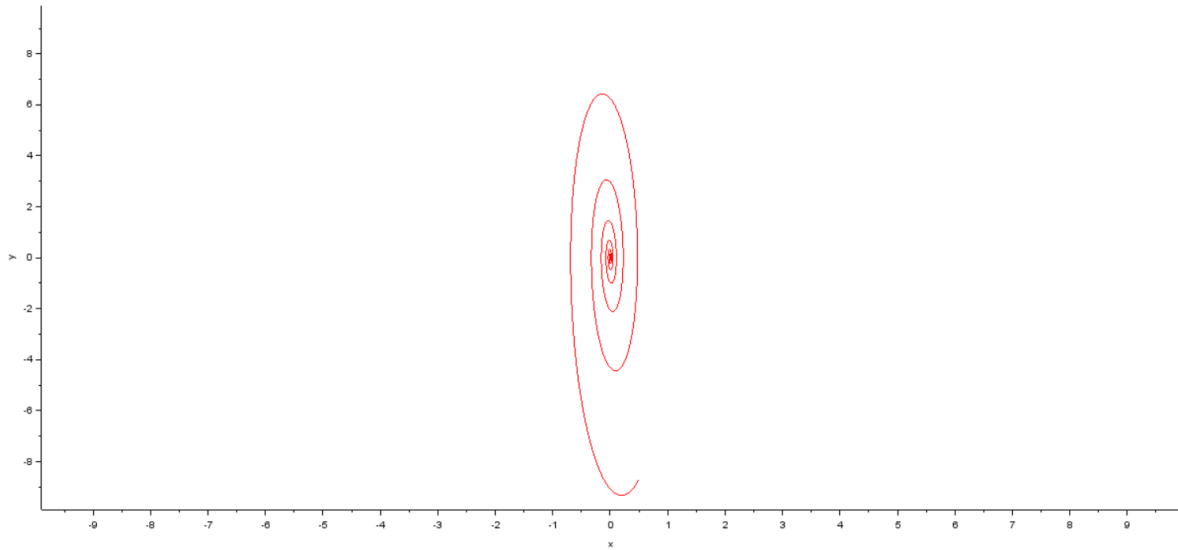
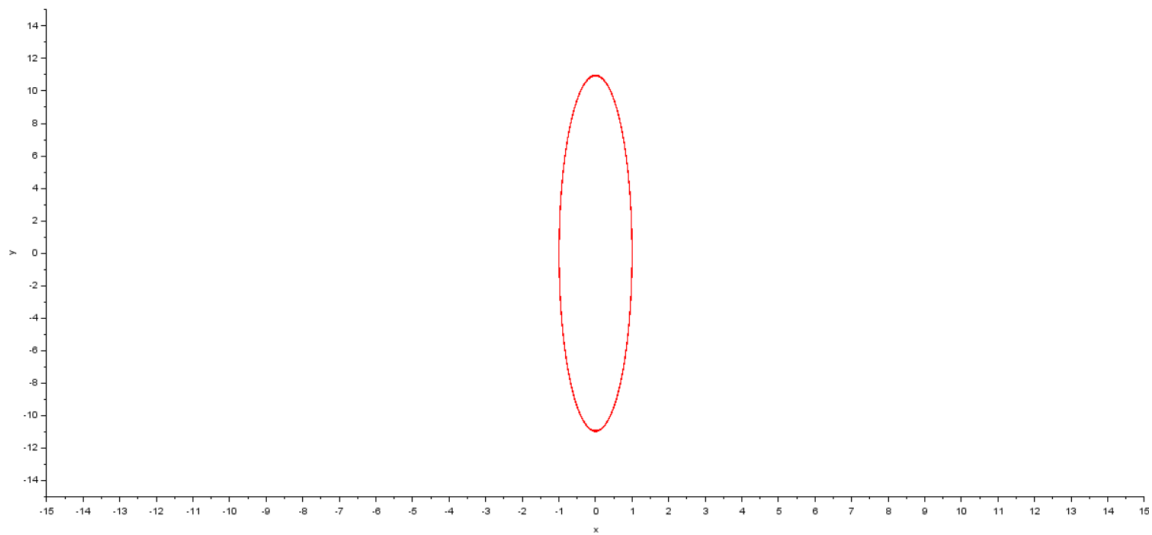


Схема моделирования

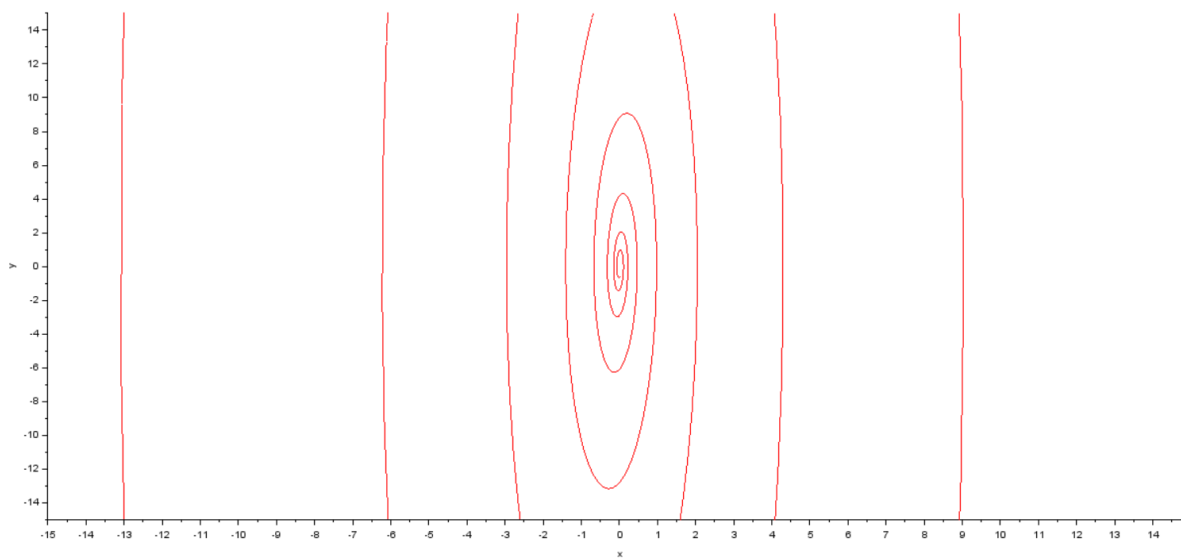
1. $1.0069e^{-1.3}\sin(11t + 1.453)$



2. $\sin(10t + \frac{\pi}{2})$



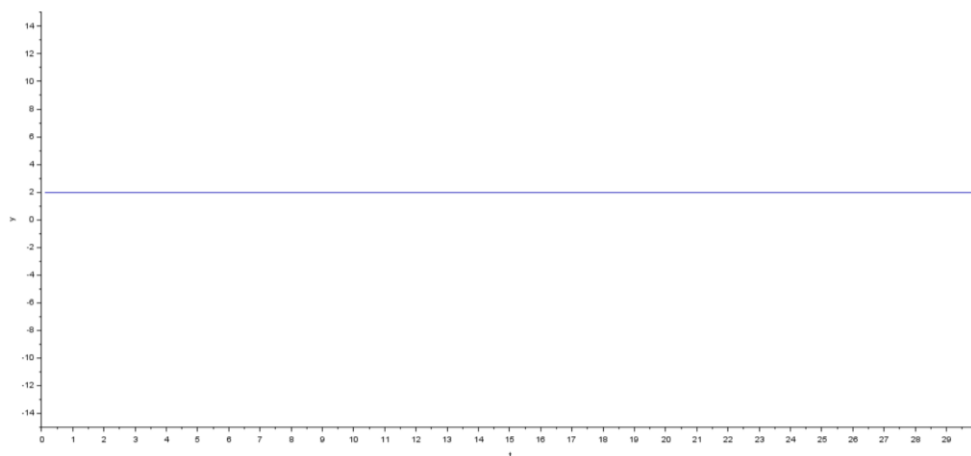
3. $0.0503e^{1.3} \sin(-11t + 1.453)$



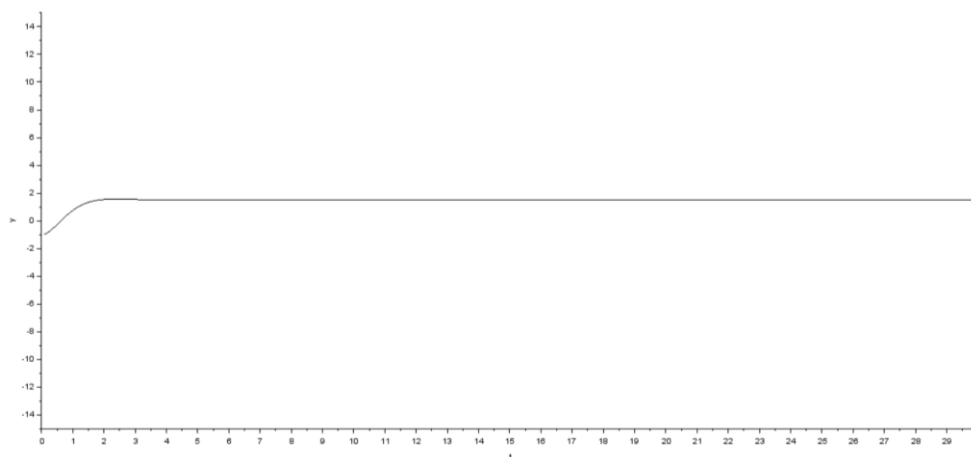
Вынужденное движение

1. $g = 2$

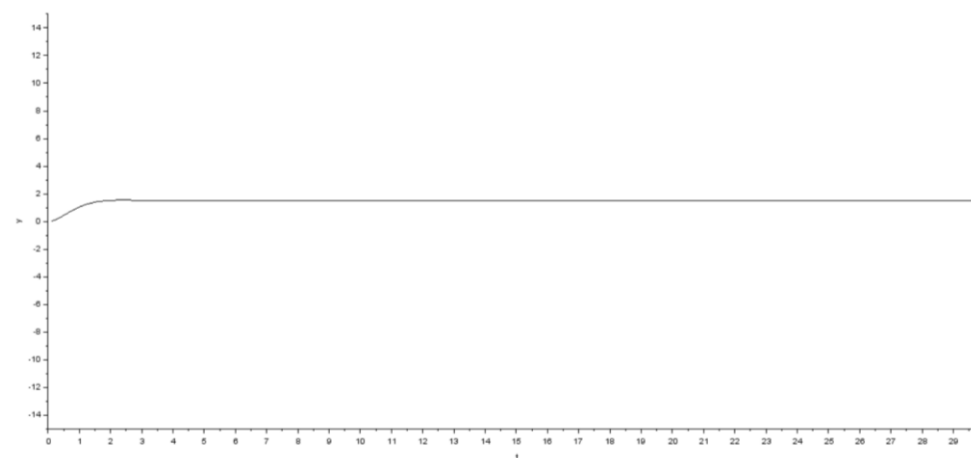
$g(t)$



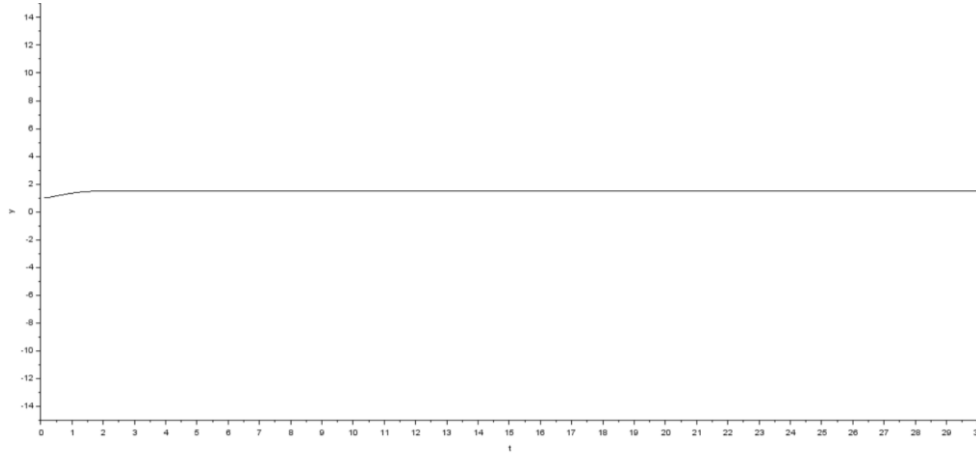
$y(t); y(0) = -1$



$y(t); y(0) = 0$

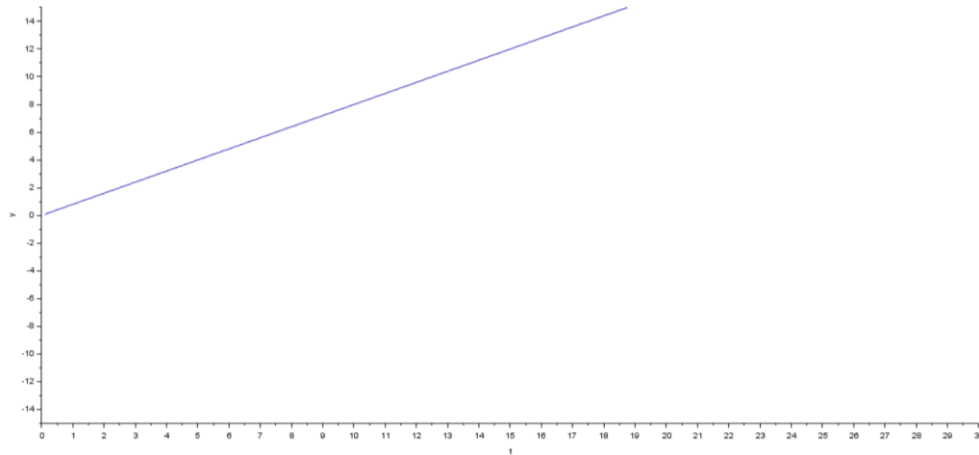


$$y(t); y(0) = 1$$

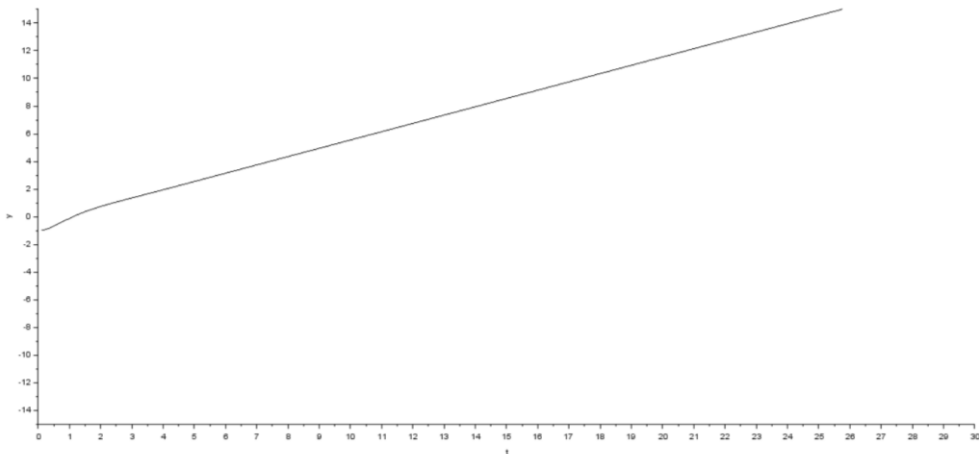


$$2. g = 0.8t$$

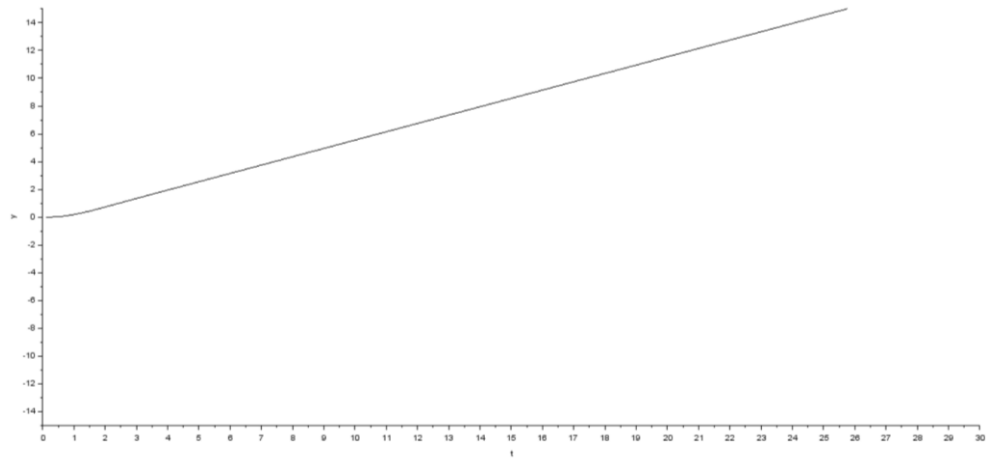
$$g(t)$$



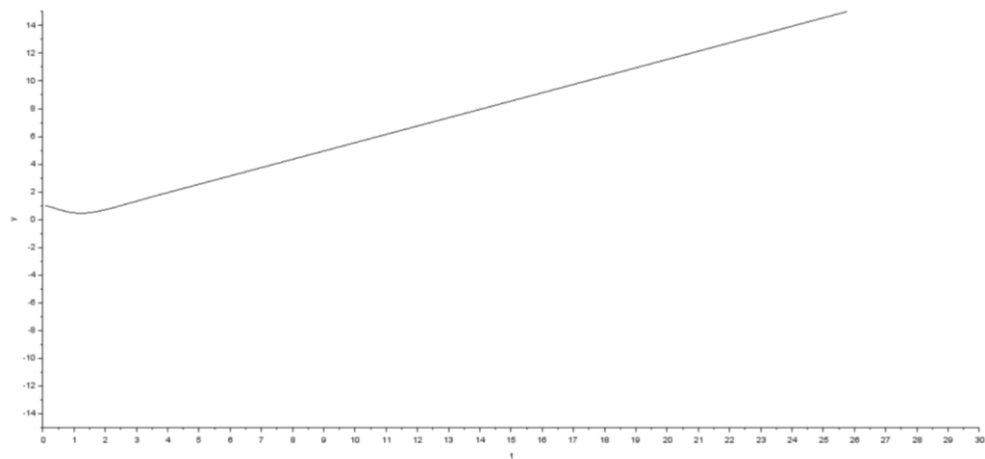
$$y(t); y(0) = -1$$



$$y(t); y(0) = 0$$

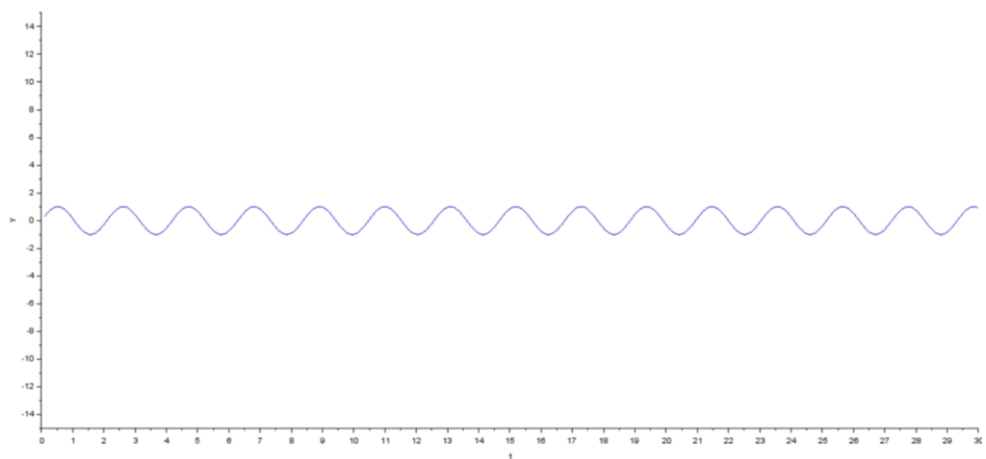


$$y(t); y(0) = 1$$

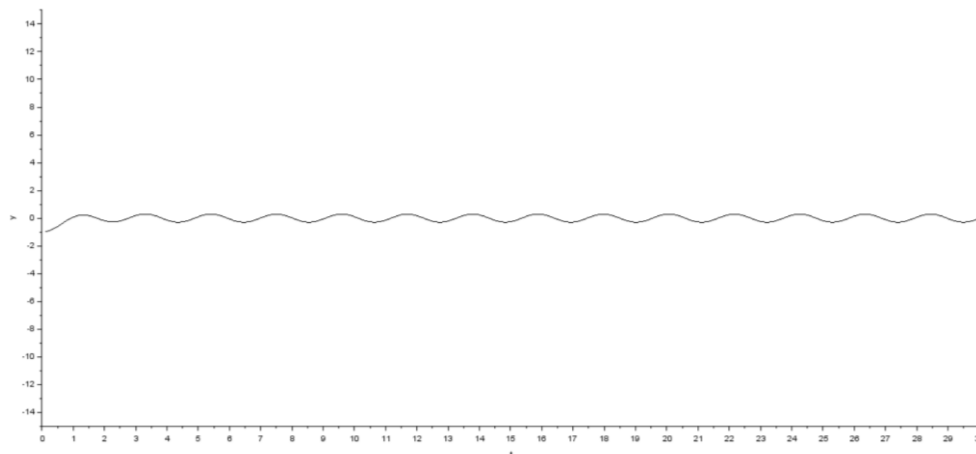


$$3. g = \sin(3t)$$

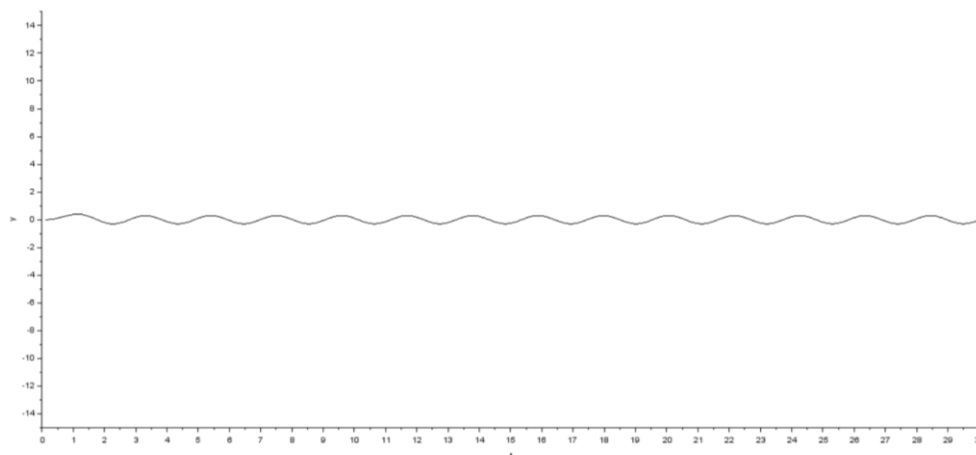
$$g(t)$$



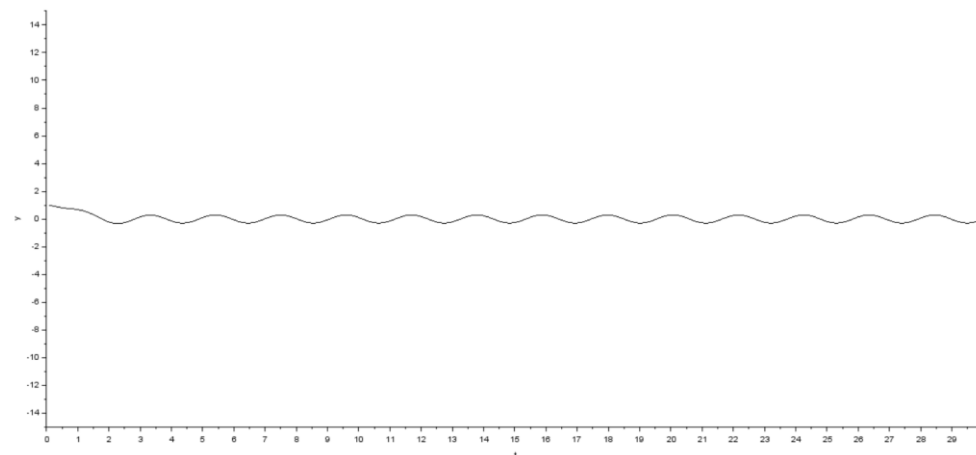
$$y(t); y(0) = -1$$



$$y(t); y(0) = 0$$



$$y(t); y(0) = 1$$



5. Вывод

В ходе выполнения работы было смоделировано путем построения аналоговых электрических систем, дифференциальное уравнение вида $y'' + a_1y' + a_0y = bg(t)$, где b может быть равен 0, что будет соответствовать свободному движению системы.