Национальный исследовательский университет информационных технологий,
механики и оптики.
Кафедра вычислительной техники.
Конструкторско-техническое обеспечение производства ЭВМ.

Домашняя работа №2
Графовое представление электрических схем
Вариант 46

Работу выполнил студент группы P3415
Халанский Дмитрий

2017

1. Исходные данные

Имеем 32 цепи, связывающие 17 модулей таким образом:

Цепь	Модуль/контакт			
1	4/8	13/14	8/11	
2	11/14	15/6	3/5	17/12
3	4/11	14/6	17/5	
4	14/12	1/1	17/1	14/14
5	11/7	9/10	3/12	3/14
6	14/2	8/3	17/8	
7	7/10	17/4	17/14	
8	12/1	13/4		
9	7/13	14/3	14/13	17/2
10	10/11	17/6		
11	17/11	17/13	17/3	5/2
12	11/11	16/3	12/7	
13	17/9	17/10	17/7	5/12
14	11/5	2/2	2/4	15/10
15	12/2	16/5	10/9	8/12
16	8/13	5/13	4/7	12/8
17	6/6	2/7	8/7	16/14
18	16/9	7/3	1/14	5/9
19	10/6	16/10		
20	15/1	16/13	13/10	2/13
21	8/2	2/12	14/5	16/11
22	16/7	14/7		
23	3/4	13/2	2/8	16/4
24	11/13	7/9	11/4	11/3
25	2/14	4/10	6/13	
26	15/7	14/1	3/8	14/8
27	10/8	9/8	2/5	
28	4/5	5/11	5/10	13/6
29	4/6	2/1		
30	9/12	3/13	4/9	
31	16/12	3/2		
32	15/13	8/19	15/2	13/13

2. Ход работы

2.1. Представление исходных данных

2.1.1. Матрица комплексов

Представляем в транспонированном виде для удобства чтения:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}
u_1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
u_2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1
u_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
u_4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
u_5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
u_6	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
u_7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
u_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
u_9	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
u_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
u_{11}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
u_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
u_{13}	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
u_{14}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0
u_{16}	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
u_{17}	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
u_{18}	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
u_{19}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
u_{20}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
u_{21}	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0
u_{22}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0
u_{23}	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
u_{24}	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
u_{25}	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{26}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
u_{27}	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
u_{28}	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
u_{29}	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{30}	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{31}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
u_{32}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0

2.1.2. Матрица соединений

Числом задаётся, какое количество связей существует между парой модулей. Так как граф неориентированный, приводим лишь половину матрицы — вторая зеркальна ей.

В случае с графом, в котором разрешена лишь одна связь между парой вершин, матрица соединений совпадает с матрицей смежности.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}
e_1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
e_2		0	1	2	0	2	0	2	1	1	1	0	2	1	2	4	0
e_3			0	1	0	0	0	0	2	0	2	0	1	1	2	2	1
e_4				0	2	1	0	2	1	0	0	1	2	1	0	0	1
e_5					0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	2
e_6						0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
e_7							0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	2
e_8								0	0	1	0	2	2	2	1	3	1
e_9									0	1	1	0	0	0	0	0	0
e_{10}										0	0	1	0	0	0	2	1
e_{11}											0	1	0	0	2	1	1
e_{12}												0	1	0	0	2	0
e_{13}													0	0	2	2	0
e_{14}														0	1	2	4
e_{15}															0	1	1
e_{16}																0	0
e_{17}																	0

2.2. Раскраска графа методом упорядочивания вершин

1. Подсчитываем число r_i ненулевых элементов в каждом ряду i в матрице соединений:

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	e_{16}	e_{17}
5	11	9	10	8	4	6	11	5	6	8	7	8	9	8	13	10

2. Упорядочим вершины графа в порядке невозрастания r_i:

e_{16}	e_2	e_8	e_4	e_{17}	e_3	e_{14}	e_{15}	e_5	e_{11}	e_{13}	e_{12}	e_7	e_{10}	e_1	e_9	e_6
13	11	11	10	10	9	9	8	8	8	8	7	6	6	5	5	4

3. Просматривая последовательность слева направо, закрашиваем в некоторый новый цвет все вершины, которые не смежны ещё окрашенным в этот цвет.

   В первом проходе получается: $16, 4$.
4. Удалить окрашенные рёбра из таблицы.
5. Повторять действия, пока не останется неокрашенных вершин. Приведём полную таблицу шагов:

Шаг	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}	r_{17}
1	5	11	9	$\boxed{10}$	8	4	6	11	5	6	8	7	8	9	8	$\boxed{13}$	10
2	4	$\boxed{9}$	7		6	2	5	9	4	5	7	$\boxed{5}$	6	7	7		$\boxed{9}$
3	3		$\boxed{5}$		4	1	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$	3	2	4		4	5	5		
4	$\boxed{2}$				2	$\boxed{0}$			$\boxed{2}$	1	2		2	2	$\boxed{3}$		
5					$\boxed{5}$					$\boxed{0}$	$\boxed{0}$		1	$\boxed{0}$			
6													$\boxed{0}$				

2.3. Размещение элементов методом обратного размещения

Зададим поверхность:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6
p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}
p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}	

Матрица D расстояний между позициями для размещения, определяемых по формуле $D(i, j) = |x_i - x_j| + |y_i - y_j|$:

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}
p_1	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	2	3	4	5	6
p_2	1	0	1	2	3	4	2	1	2	3	4	5	3	2	3	4	5
p_3	2	1	0	1	2	3	3	2	1	2	3	4	4	3	2	3	4
p_4	3	2	1	0	1	2	4	3	2	1	2	3	5	4	3	2	3
p_5	4	3	2	1	0	1	5	4	3	2	1	2	6	5	4	3	2
p_6	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	7	6	5	4	3
p_7	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
p_8	2	1	2	3	4	5	1	0	1	2	3	4	2	1	2	3	4
p_9	3	2	1	2	3	4	2	1	0	1	2	3	3	2	1	2	3
p_{10}	4	3	2	1	2	3	3	2	1	0	1	2	4	3	2	1	2
p_{11}	5	4	3	2	1	2	4	3	2	1	0	1	5	4	3	2	1
p_{12}	6	5	4	3	2	1	5	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2
p_{13}	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4
p_{14}	3	2	3	4	5	6	2	1	2	3	4	5	1	0	1	2	3
p_{15}	4	3	2	3	4	5	3	2	1	2	3	4	2	1	0	1	2
p_{16}	5	4	3	2	3	4	4	3	2	1	2	3	3	2	1	0	1
p_{17}	6	5	4	3	2	3	5	4	3	2	1	2	4	3	2	1	0

В результате вычислений в предыдущем разделе мы уже определили порядок вершин по невозрастанию. Теперь требуется определить порядок позиций по неубыванию суммы величин D. Рассчитаем эти суммы:

p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}	p_{12}	p_{13}	p_{14}	p_{15}	p_{16}	p_{17}
63	51	45	45	51	63	57	45	39	39	45	57	63	51	45	45	51

Упорядочиваем:

p_{10}	p_9	p_{11}	p_{15}	p_{16}	p_3	p_4	p_8	p_{14}	p_{17}	p_2	p_5	p_{12}	p_7	p_1	p_{13}	p_6
39	39	45	45	45	45	45	45	51	51	51	51	57	57	63	63	63

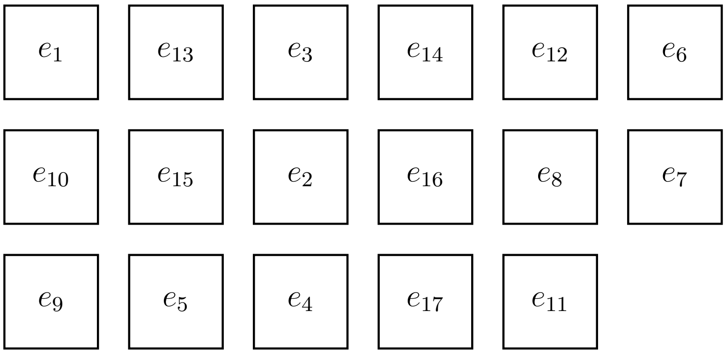
Таким образом, искомое размещение:

39	39	45	45	45	45	45	45	51	51	51	51	57	57	63	63	63
p_{10}	p_9	p_{11}	p_{15}	p_{16}	p_3	p_4	p_8	p_{14}	p_{17}	p_2	p_5	p_{12}	p_7	p_1	p_{13}	p_6
e_{16}	e_2	e_8	e_4	e_{17}	e_3	e_{14}	e_{15}	e_5	e_{11}	e_{13}	e_{12}	e_7	e_{10}	e_1	e_9	e_6
13	11	11	10	10	9	9	8	8	8	8	7	6	6	5	5	4

Его функционал:

$$F = \frac{1}{2}\sum_i \sum_j d_{ij} r_{ij} = 3324$$

Графически оно представимо так:



Результирующая матрица весов, определяемая по формуле $c_{ij} = r_{ij} d_{ij}$:

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}
c_1	0	0	0	0	4	0	1	0	0	0	0	0	0	3	0	5	6
c_2	0	0	1	4	0	8	0	2	2	3	4	0	6	2	6	16	0
c_3	0	1	0	1	0	0	0	0	2	0	6	0	4	3	4	6	4
c_4	0	4	1	0	2	2	0	6	2	0	0	3	10	4	0	0	3
c_5	4	0	0	2	0	0	5	4	0	0	0	2	6	0	0	3	4
c_6	0	8	0	2	0	0	0	5	0	0	0	0	0	0	0	4	0
c_7	1	0	0	0	5	0	0	0	0	0	4	0	0	2	0	4	10
c_8	0	2	0	6	4	5	0	0	0	2	0	8	4	2	2	9	4
c_9	0	2	2	2	0	0	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0
c_{10}	0	3	0	0	0	0	0	2	1	0	0	2	0	0	0	2	2
c_{11}	0	4	6	0	0	0	4	0	2	0	0	1	0	0	6	2	1
c_{12}	0	0	0	3	2	0	0	8	0	2	1	0	6	0	0	6	0
c_{13}	0	6	4	10	6	0	0	4	0	0	0	6	0	0	4	6	0
c_{14}	3	2	3	4	0	0	2	2	0	0	0	0	0	0	1	4	12
c_{15}	0	6	4	0	0	0	0	2	0	0	6	0	4	1	0	1	2
c_{16}	5	16	6	0	3	4	4	9	0	2	2	6	6	4	1	0	0
c_{17}	6	0	4	3	4	0	10	4	0	2	1	0	0	12	2	0	0

2.4. Поиск кратчайших путей

Найдём кратчайшие пути от вершины 1 до всех остальных. Для этого зададим матрицу, в которой строка задаёт вершину, путь до которой нас интересует, а столбец — количество рёбер, пройденных от вершины 1.

Изначально мы считаем, что расстояние от e_1 до любой вершины равно ∞, и устанавливаем конкретное значение, когда можем пройти по ребру, связывающему одну из уже найденных вершин и данную.

Метка считается устоявшейся, если из всех ещё не устоявшихся она минимальна. После перехода метки в состояние устоявшихся мы опускаем описание метки.

	0	1	2	3	4
e_1	$\boxed{0}$				
e_2	∞	∞	5	5	5
e_3	∞	∞	6	6	6
e_4	∞	∞	6	6	6
e_5	∞	4	4	$\boxed{4}$	
e_6	∞	∞	9	8	8
e_7	∞	$\boxed{1}$			
e_8	∞	∞	5	5	5
e_9	∞	∞	∞	7	7
e_{10}	∞	∞	7	7	7
e_{11}	∞	∞	5	5	5
e_{12}	∞	∞	6	6	6
e_{13}	∞	∞	10	8	8
e_{14}	∞	3	$\boxed{3}$		
e_{15}	∞	∞	4	$\boxed{4}$	
e_{16}	∞	5	5	5	5
e_{17}	∞	6	6	6	6

Дальнейшие шаги не приводят к изменению кратчайших путей, следовательно, мы обнаружили наилучший вариант.

2.5. Поиск пропускной способности алгоритмом Франка-Фриша

Найдём пропускную способность, принимая за исток s вершину e_8, а за сток t — вершину e_1.

Обнаружим разрез $(e_8, X \setminus e_8)$. Его максимальная пропускная способность равна 9.

Объединим все вершины, между которыми есть ребро весом ≥ 9. Объединяются множества (e_2, e_{16}, e_8), (e_4, e_{13}), (e_{14}, e_{17}, e_7).

Получаем граф:

	e_1	$e_{2,8,16}$	e_3	$e_{4,13}$	e_5	e_6	$e_{7,14,17}$	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{15}
e_1	0	5	0	0	4	0	6	0	0	0	0	0
$e_{2,8,16}$	5	0	6	6	4	8	4	2	3	4	8	6
e_3	0	6	0	4	0	0	4	2	0	6	0	4
$e_{4,13}$	0	6	4	0	6	2	4	2	0	0	6	4
e_5	4	4	0	6	0	0	5	0	0	0	2	0
e_6	0	8	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_{7,14,17}$	6	4	4	4	5	0	0	0	2	4	0	2
e_9	0	2	2	2	0	0	0	0	1	2	0	0
e_{10}	0	3	0	0	0	0	2	1	0	0	2	0
e_{11}	0	4	6	0	0	0	4	2	0	0	1	6
e_{12}	0	8	0	6	2	0	0	0	2	1	0	0
e_{15}	0	6	4	4	0	0	2	0	0	6	0	0

Теперь максимальное ребро — 8. Объединим вершины по ребру 8: $e_{2,8,16,6,12}$.

	e_1	$e_{2,6,8,12,16}$	e_3	$e_{4,13}$	e_5	$e_{7,14,17}$	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{15}
e_1	0	5	0	0	4	6	0	0	0	0
$e_{2,6,8,12,16}$	5	0	6	6	4	4	2	3	4	6
e_3	0	6	0	4	0	4	2	0	6	4
$e_{4,13}$	0	6	4	0	6	4	2	0	0	4
e_5	4	4	0	6	0	5	0	0	0	0
$e_{7,14,17}$	6	4	4	4	5	0	0	2	4	2
e_9	0	2	2	2	0	0	0	1	2	0
e_{10}	0	3	0	0	0	2	1	0	0	0
e_{11}	0	4	6	0	0	4	2	0	0	6
e_{15}	0	6	4	4	0	2	0	0	6	0

Объединяем по ребру длиной 6. Получаем:

$$s = e_{2,8,16,3,4,13,5,11,15}$$

$$t = e_{1,7,14,17}$$

	t	s	e_9	e_{10}
t	0	5	0	2
s	5	0	2	3
e_9	0	2	0	1
e_{10}	2	3	1	0

Наконец, объединяя по ребру длиной 5, получаем s и t в одном множестве. Соответственно, максимальная пропускная способность равна 5.