Национальный исследовательский университет информационных технологий,
механики и оптики.
Кафедра вычислительной техники.
Конструкторско-техническое обеспечение производства ЭВМ.

Домашняя работа №3
Графо-теоретический подход к синтезу топологии
Вариант 31

Работу выполнил студент группы P3415
Халанский Дмитрий

2017

1. Исходные данные

Имеем 32 цепи, связывающие 17 модулей таким образом:

Цепь	Модуль/контакт		
1	13/5	7/2	8/2
2	1/9	3/14	10/9
3	12/12	13/10	11/9
4	9/9	5/12	
5	12/5	8/5	
6	13/8	6/14	12/10
7	5/10	13/6	12/7
8	13/7	1/2	7/13
9	12/1	9/2	4/8
10	13/12	8/7	5/4
11	7/5	4/3	
12	13/13	10/6	12/3
13	13/11	11/12	8/3
14	13/1	12/11	11/7
15	12/6	6/5	
16	11/13	11/4	
17	8/8	7/8	11/8
18	13/3	12/9	
19	11/5	9/3	4/11
20	10/11	2/5	
21	13/4	5/2	2/12

2. Ход работы

2.1. Представление исходных данных

2.1.1. Матрица комплексов

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
u_1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1
u_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
u_5	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
u_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1
u_7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1
u_8	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
u_9	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0
u_{10}	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1

u_{11}	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
u_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1
u_{13}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1
u_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
u_{15}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
u_{17}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
u_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
u_{19}	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0
u_{20}	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
u_{21}	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1

2.1.2. Матрица соединений

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
e_1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
e_2	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
e_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	1	1	0
e_5	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	3
e_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
e_7	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	0	2
e_8	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	2	1	3
e_9	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0
e_{10}	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
e_{11}	0	0	0	1	0	0	1	2	1	0	0	2	3
e_{12}	0	0	0	1	1	2	0	1	1	1	2	0	6
e_{13}	1	1	0	0	3	1	2	3	0	1	3	6	0

2.2. Нахождение гамильтонова цикла

2.2.1. Поиск цикла

Для начала строим путь по матрице соединений таким образом:

1. Задаём $n = 1$;
2. Вычёркиваем из матрицы строку e_n;
3. Находим верхнюю ячейку в столбце e_n из имеющих положительное значение;
4. Если такой нет, выполнение завершается. Если такая есть, то определяем, какой вершине e_m соответствует эта ячейка; устанавливаем $n = m$; повторяем с п. 2.

Пример начальных этапов выполнения:

- $n = 1$;
- Вычёркиваем строку e_1;
- Обнаруживаем, что есть вершина с e_3;
- $n = 3$;
- Вычёркиваем строку e_3;
- Обнаруживаем, что есть вершина у e_3 и e_{10};
- $n = 10$...

В результате имеем путь $\{e_1, e_3, e_{10}, e_2, e_5, e_8, e_7, e_4, e_9, e_{11}, e_{12}, e_6, e_{13}\}$. Обнаруживаем, что есть вершина между e_1 и e_{13} — очень удачно вышло, что с первой попытки вышло обнаружить гамильтонов цикл. Если бы это было не так, то мы бы пошли назад до первого случая, когда в столбце есть более одного положительного числа, и выбрали не то, которое взяли в первый раз. Мы бы повторяли перебор путей до тех пор, пока бы не обнаружился гамильтонов цикл.

2.2.2. Перенумерация вершин

Перенумеруем вершины таким образом, чтобы его вершины были упорядочены по их позиции в гамильтоновом цикле.

Новая	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
Старая	e_1	e_3	e_{10}	e_2	e_5	e_8	e_7	e_4	e_9	e_{11}	e_{12}	e_6	e_{13}

Тогда входные данные становятся такими:

Цепь	Модуль/контакт		
1	13/5	7/2	6/2
2	1/9	2/14	3/9
3	11/12	13/10	10/9
4	9/9	5/12	
5	11/5	6/5	
6	13/8	12/14	11/10
7	5/10	13/6	11/7
8	13/7	1/2	7/13
9	11/1	9/2	8/8
10	13/12	6/7	5/4
11	7/5	8/3	
12	13/13	3/6	11/3
13	13/11	10/12	6/3
14	13/1	11/11	10/7
15	11/6	12/5	
16	10/13	10/4	
17	6/8	7/8	10/8
18	13/3	11/9	

19	10/5	9/3	8/11
20	3/11	4/5	
21	13/4	5/2	4/12

Новая матрица комплексов:

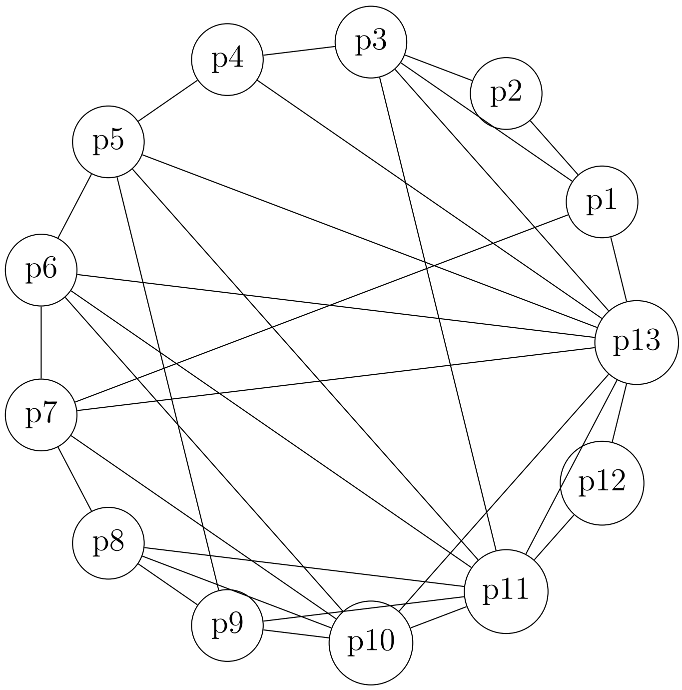
	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
u_1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
u_2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
u_4	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
u_5	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0
u_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1
u_7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1
u_8	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
u_9	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
u_{10}	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
u_{11}	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0
u_{12}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
u_{13}	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
u_{14}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1
u_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
u_{16}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
u_{17}	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0
u_{18}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
u_{19}	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
u_{20}	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u_{21}	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Новая матрица соединений:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
e_1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
e_2	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
e_3	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1
e_4	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1
e_5	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	3
e_6	0	0	0	0	1	0	2	0	0	2	1	0	3
e_7	1	0	0	0	0	2	0	1	0	1	0	0	2
e_8	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	1	0	0
e_9	0	0	0	0	1	0	0	2	0	1	1	0	0
e_{10}	0	0	0	0	0	2	1	1	1	0	2	0	3
e_{11}	0	0	1	0	1	1	0	1	1	2	0	2	6

e_{12}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	1
e_{13}	1	0	1	1	3	3	2	0	0	3	6	1	0

То, что вершины пронумерованы по гамильтонову циклу, видно по тому, что рёбра, смежные главной диагонали, не нулевые, как и вершины в левом нижнем и правом верхнем углах.

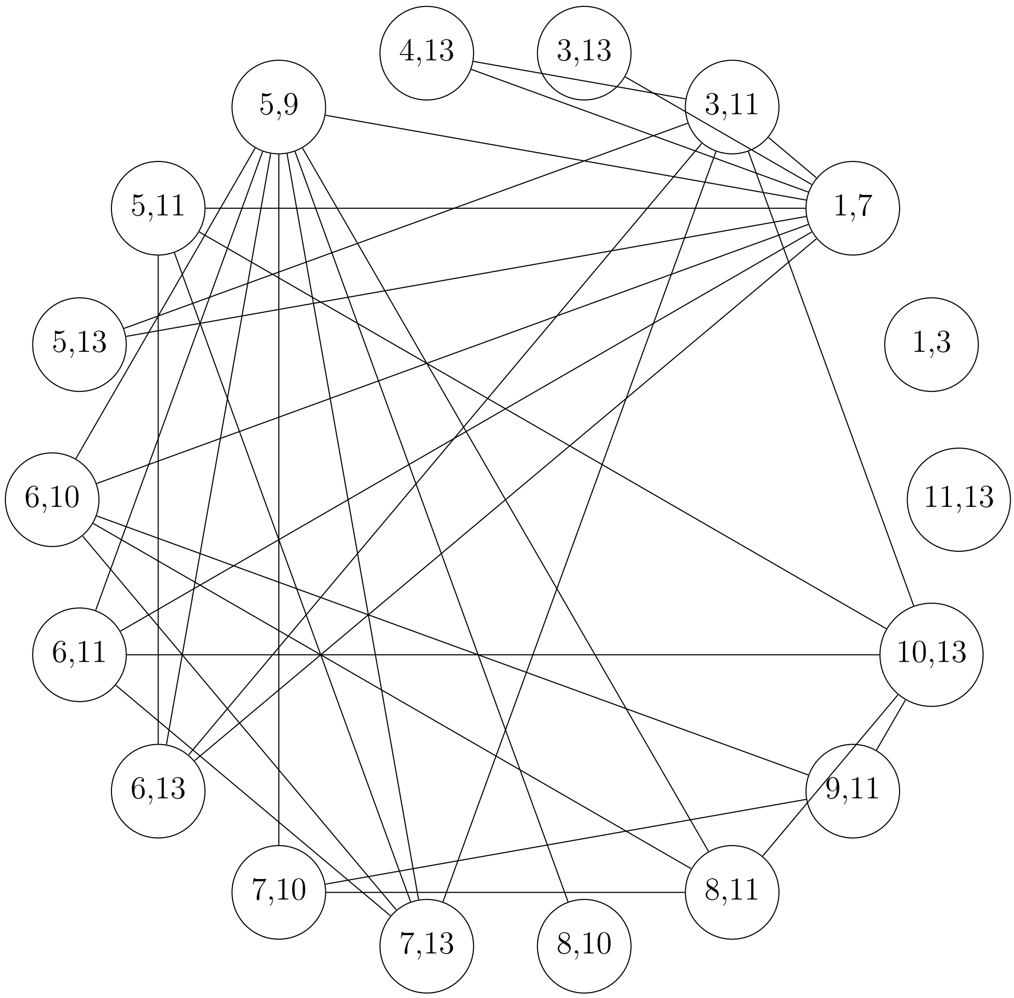


2.3. Построение графа пересечений

Рассмотрим рёбро, которое связывает вершины n и m; тогда оно пересекает все рёбра, которые связывают вершину в промежутке (n, m) и вершину за промежутком $[n; m]$.

Очевидно, что ни одно из рёбер, входящих в гамильтонов цикл, не пересекает никакое другое: промежуток $(n, n+1)$ пустой.

На основании этого строим граф смежности рёбер:



Матрица соединений этого графа:

		$u_{1,7}$	$u_{1,3}$	$u_{3,11}$	$u_{3,13}$	$u_{4,13}$	$u_{5,9}$	$u_{5,11}$	$u_{5,13}$	$u_{6,10}$	$u_{6,11}$	$u_{6,13}$	$u_{7,10}$	$u_{7,13}$	$u_{8,10}$	$u_{8,11}$	$u_{9,11}$	$u_{10,13}$	$u_{11,13}$
$u_{1,7}$	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
$u_{1,3}$	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{3,11}$	3	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
$u_{3,13}$	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{4,13}$	5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{5,9}$	6	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
$u_{5,11}$	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0
$u_{5,13}$	8	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{6,10}$	9	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0
$u_{6,11}$	10	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0
$u_{6,13}$	11	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{7,10}$	12	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
$u_{7,13}$	13	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$u_{8,10}$	14	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
$u_{8,11}$	15	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
$u_{9,11}$	16	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
$u_{10,13}$	17	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
$u_{11,13}$	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

2.4. Нахождение максимальных внутренне устойчивых подмножеств

Найдём семейство Ψ.

1. Нули в первой строке соответствуют элементам

$$\{2, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}$$

2. Выбираем первый элемент из них — 2.
3. Строим дизъюнкцию из первой строки и текущего элемента. Далее, пока в ней есть нули, добавляем в дизъюнкцию новые строки, соответствующие позициям с нулями.

   Пример:

   (a) $M_{1,2} = \{111111111110000000\}$
   (b) $M_{1,2,12} = \{111111111111001100\}$
   (c) $M_{1,2,12,13} = \{111111111111101100\}$
   (d) $M_{1,2,12,13,14} = \{111111111111111100\}$
   (e) $M_{1,2,12,13,14,17} = \{111111111111111110\}$
   (f) $M_{1,2,12,13,14,17,18} = \{111111111111111111\}$
   (g) Построено $\psi_1 = \{u_{1,7}, u_{1,3}, u_{7,13}, u_{8,10}, u_{8,11}, u_{10,13}, u_{11,13}\}$

4. Повторяем прошлый пункт, но начинаем добавлять новые составляющие в дизъюнкцию со второго нуля; находим множество ψ_2. Затем с третьего нуля, и так далее.
5. Выбираем следующий элемент и повторяем для него последние два пункта.

По такому принципу находим все семейства:

$$\psi_1 = \{9, 10, 11, 1, 4, 5, 8, 12, 14, 18\}$$
$$\psi_2 = \{9, 10, 1, 3, 4, 7, 12, 14, 18\}$$
$$\psi_3 = \{9, 10, 1, 4, 5, 8, 12, 14, 17, 18\}$$
$$\psi_4 = \{11, 1, 4, 5, 8, 12, 13, 14, 17, 18\}$$
$$\psi_5 = \{1, 2, 12, 13, 14, 17, 18\}$$
$$\psi_6 = \{1, 2, 13, 14, 15, 18\}$$
$$\psi_7 = \{1, 3, 4, 6, 7, 16, 18\}$$
$$\psi_8 = \{1, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 18\}$$

2.5. Поиск максимального двудольного подграфа

Высчитаем для каждой пары множеств из семейства Ψ значение $|\psi_i|+|\psi_j|-|\psi_i \cup \psi_j|$ и составим матрицу:

	ψ_1	ψ_2	ψ_3	ψ_4	ψ_5	ψ_6	ψ_7	ψ_8
ψ_1	0	12	11	12	13	13	14	13
ψ_2	-1	0	13	14	12	12	11	13
ψ_3	-1	-1	0	11	12	13	14	13
ψ_4	-1	-1	-1	0	11	12	14	13
ψ_5	-1	-1	-1	-1	0	8	12	13
ψ_6	-1	-1	-1	-1	-1	0	11	12
ψ_7	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0	9
ψ_8	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	0

Наибольшее значение функция принимает на паре ψ_1, ψ_7.

Общие рёбра для них — $1, 4, 18$. Они не пересекаются ни с чем.

Убираем рёбра, содержащиеся в ψ_1 или ψ_7. Остаётся:

$$\psi'_5 = \{2, 13, 17\}$$
$$\psi'_6 = \{2, 13, 15\}$$

Найдём новую матрицу A:

	ψ'_5	ψ'_6
ψ'_5	0	4
ψ'_6	-1	0

Возьмём пару из ψ'_5 и ψ'_6. Новое семество пустое. Все рёбра задействованы.

2.6. Проверка изоморфизма графов

Проведём проверку на изоморфизм исходный граф и граф, полученный перенумеровыванием вершин после нахождения гамильтонова цикла.

Значение	G_1	G_2
Число вершин m	13	13
Число рёбер k	48	48
Компоненты связности p	1	1

По основным инвариантам графы совпадают.

Список вершин и соответствующих рангов:

Ранг	G_1	G_2
21	e_{13}	e_{13}
15	e_{12}	e_{11}
10	e_{11}	e_{10}
9	e_8	e_6
7	e_5, e_7	e_5, e_7
5	e_4, e_9, e_{10}	e_3, e_8, e_9
4	e_1	e_1
3	e_2, e_6	e_4, e_{12}
2	e_3	e_2

Понятно, что вершины с одинаковым рангом изоморфны. Тогда имеем известное соответствие для большей части вершин.

Возьмём матрицу смежности оригинального графа и запишем уже известные номера вершин второго графа.

	e_1	?3	e_2	?5	?7	?3	?7	e_6	?5	?5	e_{10}	e_{11}	e_{13}
e_1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
?3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1
e_2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
?5	0	0	0	0	0	0	1	0	2	0	1	1	0
?7	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	3
?3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	1
?7	1	0	0	1	0	0	0	2	0	0	1	0	2
e_6	0	0	0	0	1	0	2	0	0	0	2	1	3
?5	0	0	0	2	1	0	0	0	0	0	1	1	0
?5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
e_{10}	0	0	0	1	0	0	1	2	1	0	0	2	3
e_{11}	0	0	0	1	1	2	0	1	1	1	2	0	6
e_{13}	1	1	0	0	3	1	2	3	0	1	3	6	0

Проверка уже идентифицировааных рёбер позволяет восстановить нумерацию. Следовательно, графы изоморфны.

2.7. Поиск эйлерова цикла

У графа есть вершины с нечётным количеством смежных рёбер. Дополним граф так, чтобы их не было.

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}
e_1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
e_2	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
e_3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
e_4	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0

e_5	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1
e_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
e_7	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	1
e_8	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
e_9	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
e_{10}	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1
e_{11}	0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1
e_{12}	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
e_{13}	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Эйлеров цикл:

$$\begin{aligned} e_1, e_3, e_{10}, e_1, e_7, e_4, e_9, \\ e_5, e_2, e_8, e_5, e_7, e_8, e_{11}, e_4, e_{12}, \\ e_5, e_{13}, e_2, e_{10}, e_9, e_{11}, e_7, e_{13}, \\ e_6, e_{12}, e_8, e_{13}, e_9, e_{12}, e_{10}, e_{13}, \\ e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_1 \end{aligned}$$