Национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики.
Кафедра вычислительной техники.
Теория принятия решений.

Лабораторные работы №1-3
11 вариант

Работу выполнили студенты группы P3415
Фомин Евгений, Халанский Дмитрий

2017

Содержание

Исходные данные

	P	M	K
C	15	6	2
V	23	13	5
p	0.93	0.93	0.94
λ	$0.7\lambda_0$ Гц		
S	250		

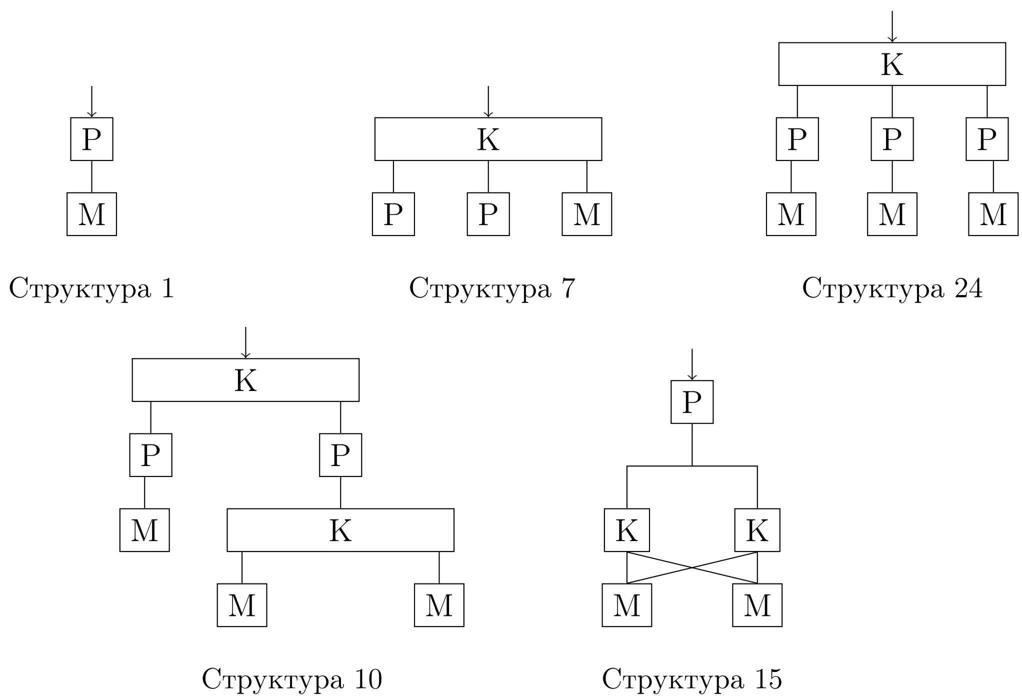


Рис. 1. Структуры, определённые заданием

1. Многокритериальный выбор

1.1. Оценка надёжности структур

Определим вероятность безотказной работы.

Чтобы структура функционировала, необходимо, чтобы существовал по крайней мере один путь от точки входа до устройства хранения.

1. Должны функционировать оба элемента: $P = P_P \cdot P_M$.

7. Должны функционировать коммутатор, устройство хранения и одно из обрабатывающих устройств. Вероятность того, что откажет одно устройство обработки, равна $1 - P_P$; того, что откажут оба — $(1 - P_P)^2$; того, что, напротив, хотя бы один не откажет, — $1-(1-P_P)^2$. В результате имеем $P = P_K \cdot P_M \cdot (1 - (1 - P_P)^2)$.

24. Должен функционировать коммутатор, а также хотя бы одна пара из устройства хранения и обрабатывающего устройства. Вероятность работы каждой конкретной пары равна $P_M \cdot P_P$, того, что пара работать не будет, — $1 - P_M \cdot P_P$, того, что не будет работать три пары, — $(1 - P_M \cdot P_P)^3$, а того, что будет работать хотя бы одна пара из трёх, — $1 - (1 - P_M \cdot P_P)^3$. Итоговый результат — $P = P_K \cdot (1 - (1 - P_M \cdot P_P)^3)$.

10. Должны функционировать один коммутатор, а также либо пара из обработчика и устройства хранения, либо обработчик, коммутатор и одно из двух устройств хранения. $P = P_K \cdot (1 - (1 - P_M \cdot P_P) \cdot (1 - P_P \cdot P_K \cdot (1 - (1 - P_M)^2)))$.

15. Должны работать вычислитель, а также хотя бы один коммутатор и хотя бы одно устройство хранения. $P = P_P \cdot (1 - (1 - P_K)^2) \cdot (1 - (1 - P_M)^2)$.

Подставляя конкретные значения, получим такие результаты:

N	P
1	86.49%
7	86.99%
24	93.77%
10	92.35%
15	92.21%

1.2. Оценка времени пребывания

Рассмотрим каждый узел системы как M/M/1.
Формулы для M/M/1:

Среднее время пребывания $u = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$, где μ — среднее время обслуживания, λ — интенсивность входящего потока;

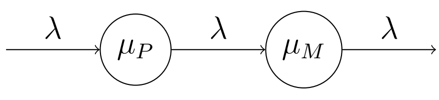
Среднее время ожидания $w = u - \dfrac{1}{\mu}$.

Формулы для сетей массового обслуживания:

Среднее время пребывания $u = \sum\limits_i a_i u_i$, где u_i — среднее время пребывания для заданного узла, a_i — среднее количество раз, которое заявка в попадает в узел;

Среднее время ожидания $w = \sum\limits_i a_i w_i$.

1. Простая система из двух последовательных M/M/1.

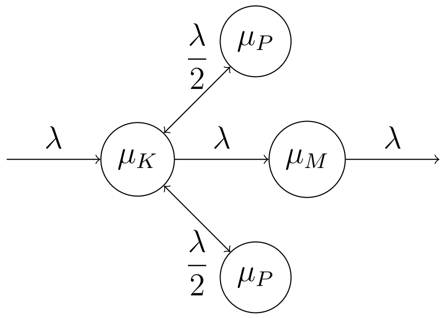


Интенсивность выходящего из M/M/1 потока равна интенсивности входящего.

Времена пребывания в такой системе просто суммируются: заявка сначала проводит время в одной очереди и одном приборе, затем в другой очереди и другом приборе.

$$u = u_1 + u_2 = \frac{1}{\mu_P - \lambda} + \frac{1}{\mu_M - \lambda}$$

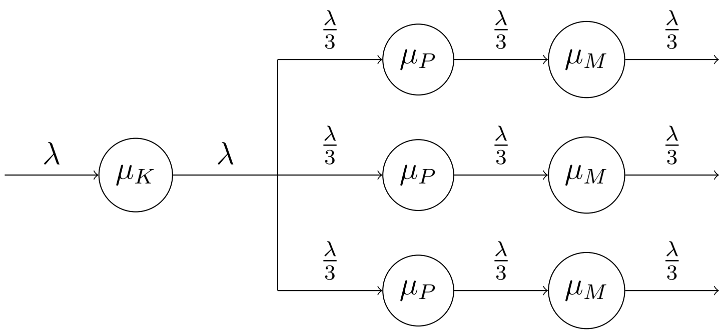
7. Каждая заявка после того, как пройдёт через вычислитель, должна ещё раз оказаться в коммутаторе перед попаданием в устройство хранения.



$$u = 2u_K + 0.5u_{P_1} + 0.5u_{P_2} + u_M = \frac{1}{\frac{\mu_K}{2} - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{\mu_M - \lambda}$$

Коэффициенты 2 и 0.5 обусловлены тем, что заявка дважды попадает в коммутатор и лишь в половине случаев находится в P_1 и в половине — в P_2.

24. Заявка проходит через коммутатор, а затем попадает в один из трёх идентичных приборов, составленных из цепи вычислителя и устройства хранения.



$$u = u_K + 3\left(\frac{1}{3}\left(u_P + u_M\right)\right) = \frac{1}{\mu_K - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3}}$$

10. Определим вероятность выбора каждого варианта в каждом коммутаторе как $\frac{1}{2}$.

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} u &= u_{K_1} + \frac{1}{2}\left(u_{P_1} + u_{M_1}\right) + \frac{1}{2}\left(u_{P_2} + u_{K_2} + \frac{1}{2}u_{M_2} + \frac{1}{2}u_{M_3}\right) \\ &= u_{K_1} + u_{P_1} + \frac{1}{2}u_{M_1} + \frac{1}{2}u_{K_2} + \frac{1}{2}u_{M_2} \\ &= \frac{1}{\mu_K - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{2\mu_M - \lambda} + \frac{1}{2\mu_K - \lambda} + \frac{1}{2\mu_M - \frac{\lambda}{2}} \end{aligned}$$

15. Вероятность попадания в конкретный коммутатор или конкретное устройство хранения — 0.5. Тогда через каждый коммутатор и каждое устройство хранения проходит половина потока:

$$u = u_P + 2\frac{1}{2}u_K + 2\frac{1}{2}u_M = \frac{1}{\mu_P - \lambda} + \frac{1}{\mu_K - \frac{\lambda}{2}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{2}}$$

1.3. Поиск максимальной интенсивности

Максимальная интенсивность, при которой не происходит перегрузка, легко определяется так: в каждом знаменателе при расчёте среднего времени пребывания в случае без перегрузки положительное число. Исходя из этого, имеем:

1. $\lambda < \min\left(\mu_P, \mu_M\right)$

7. $\lambda < \min\left(\frac{1}{2}\mu_K, 2\mu_P, \mu_M\right)$

24. $\lambda < \min\left(\mu_K, 3\mu_P, 3\mu_M\right)$

10. $\lambda < \min\left(\mu_K, 2\mu_P, 2\mu_M\right)$

15. $\lambda < \min\left(2\mu_K, \mu_P, 2\mu_M\right)$

Таким образом, интенсивность, не вызывающая перегрузки никакой системы: $\lambda_0 < \min\left(\frac{1}{2}\mu_K, \mu_P, \mu_M\right)$.

Подставляя значения из условия:

N	λ
1	0.0435
7	0.0769
24	0.1304
10	0.0870
15	0.0435
0	0.0435

1.4. Расчёт среднего времени ожидания

Мы имеем формулы вида $\sum\limits_i \dfrac{1}{k_i\mu_i - b_i\lambda}$ для расчёта среднего времени пребывания. В таком случае формулой для соответствующего времени ожидания будет

$$\sum_i \frac{1}{k_i\mu_i - b_i\lambda} - \frac{1}{k_i\mu_i} = u - \sum_i \frac{b_i}{k_i}$$

1. $w = u - b_P - b_M$

7. $w = u - b_P - b_M - 2b_K$

24. $w = u - b_P - b_K - b_M$

10. $w = u - b_P - 1.5b_K - b_M$

15. $w = u - b_P - b_K - b_M$

Подставляем $\lambda = 0.7\lambda_0 = 0.7\mu_P$:

N	u	w
1	98.18	62.18
7	84.50	38.50
24	50.87	9.87
10	59.30	15.80
15	98.28	57.28

1.5. Расчёт затрат на построение

Требуется всего лишь подсчитать количество элементов каждого вида.

1. $C_P + C_M$

7. $2 \cdot C_P + C_M + C_K$

24. $3 \cdot C_P + 3 \cdot C_M + C_K$

10. $2 \cdot C_P + 3 \cdot C_M + 2 \cdot C_K$

15. $C_P + 2 \cdot C_M + 2 \cdot C_K$

На конкретных значениях получим:

N	C
1	21
7	38
24	65
10	50
15	31

1.6. Определение области эффективных решений

Представим все варианты в порядке ухудшения каждой характеристики:

P	u	Λ	C
24	24	24	1
10	10	10	15
15	7	7	7
7	1	1	10
1	15	15	24

Обнаруживаем, что ни один вариант не лучше никакого другого по всем критериям.

1.7. Поиск наилучшего варианта

Для поиска варианта требуется выбрать способ нормализации значений: нельзя сравнивать доллары и секунды, нужно перейти к безразмерным величинам.

Существуют, к примеру, такие способы нормализации:

Название	**Формула**
Естественная	$\dfrac{f(i) - \min_i f(i)}{\max_i f(i) - \min_i f(i)}$
Относительная	$\dfrac{f(i)}{\max_i f(i)}$
Контекстуальная	$\dfrac{f(i) - t}{T - t}$

Под t и T при контекстуальной нормализации подразумеваются заранее определённые максимальные и минимальные значения: к примеру, имеющийся бюджет может быть определён как наибольшая допустимая стоимость, а заранее определённый ожидаемый поток посетителей — как наименьшая интенсивность входящих заявок.

Мы выбираем контекстуальную нормализацию с такими минимальными и максимальными значениями:

Надёжность Максимальная возможная надёжность — 100%, минимальная — та, при которой не происходит никакого резервирования и заявка должна пройти через обработчик и устройство памяти: $P_M \cdot P_P = 86.49\%$.

Среднее время пребывания Очевидно, что в идеальном случае заявка находится в системе ровно столько, сколько необходимо, чтобы она прошла через устройства обработки и хранения: $u = u_M + u_P = 13 + 23 = 36$. Худшим случаем является бесконечное время ожидания, однако зададим конечную величину, значения выше которой мы считаем неприемлемыми: 108, в три раза больше минимальной.

Интенсивность Определим границы как 0.01 и 0.4.

Стоимость В стоимость входят как минимум один обработчик и одно устройство памяти: $C = C_P + C_M = 15 + 6 = 21$. За максимальную стоимость примем 250, данное в условии к следующей лабораторной работе.

Условимся, что 1.0 — наилучшее значение для данного критерия, 0.0 — наихудшее. Те критерии, которые требуется минимизировать, а не максимизировать, следует преобразовать так: $f_n(i) := 1.0 - f_n(i)$.

Получаем:

N	P	u	Λ	C
1	0.00	0.136	0.09	1.00
7	0.04	0.326	0.17	0.93
24	0.54	0.793	0.31	0.81
10	0.43	0.676	0.20	0.87
15	0.42	0.135	0.09	0.96

1.7.1. Минимаксный критерий

Минимаксный метод заключается в том, что к матрице нормализованных значений критериев приписывается дополнительный столбец, в котором размещается наименьшее значение на данной строке. В качестве принимаемого решения выбирается то, на строке которого в дополнительном столбце наибольшее число.

$$\min_i f_n(i) \to \max$$

N	P	u	Λ	C	
1	0.00	0.136	0.09	1.00	0.00
7	0.04	0.326	0.17	0.93	0.04
24	0.54	0.793	0.31	0.81	0.31
10	0.43	0.676	0.20	0.87	0.20
15	0.42	0.135	0.09	0.96	0.09

Мы выбрали решение 24: самая слабая его сторона — пропускная способность, но у остальных она ещё меньше. Эта система стоит значительно больше, чем остальные, однако стоимость для нас не так значима.

1.7.2. Мультипликативный критерий

Мультипликативный метод заключается в максимизации произведения значений разных критериев:

$$\prod_i f_n(i) \to \max$$

N	P	u	Λ	C	
1	0.00	0.136	0.09	1.00	0.0000
7	0.04	0.326	0.17	0.93	0.0021
24	0.54	0.793	0.31	0.81	0.1075
10	0.43	0.676	0.20	0.87	0.0506
15	0.42	0.135	0.09	0.96	0.0049

Очевидный победитель — решение 24.

1.7.3. Аддитивный критерий

Требуется максимизировать сумму значений разных критериев:

$$\sum_i f_n(i) \to \max$$

N	P	u	Λ	C	
1	0.00	0.136	0.09	1.00	1.226
7	0.04	0.326	0.17	0.93	1.466
24	0.54	0.793	0.31	0.81	2.453
10	0.43	0.676	0.20	0.87	2.176
15	0.42	0.135	0.09	0.96	1.605

На первом месте по аддитивному критерию — решение 24, самое дорогое, но в остальных аспектах лидирующее. На втором месте 10, которое по всем параметрам рядом с 24.

1.7.4. Метод отклонения от идеала

Идеальный прибор мы определяем как обладающий максимальными значениями, описанными при выборе метода нормализации.

Его характеристики, таким образом, выглядят так:

P	u	Λ	C
1.00	1.00	1.00	1.00

Теперь определим качество прибора как его близость к идеальному:

$$\sum_i f_I(i) - f_n(i) \to \min$$

Несложно заметить, что в силу выбора нормализации результат в данном случае совпадает с результатом выбора по аддитивному критерию.

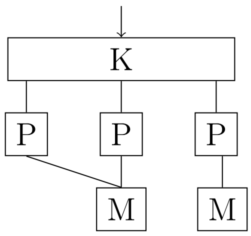
1.8. Окончательный выбор структуры

Мы выбрали вариант 24 как оптимальный по всем критериям, кроме стоимости. Также приемлемыми характеристиками обладает вариант 10, однако он лишь на 30%

дешевле. Выигрыш в надёжности, производительности и допустимом входном потоке, как нам показалось, стоит этих денег.

1.9. Рекомендации по улучшению структуры

Если из убрать блок памяти и подключить два обработчика к одному из оставшихся, окажется, что стоимость понизилась.



Найдём формулы для определения характеристик новой системы:

$$P = P_K \cdot \left(1 - (1 - P_P \cdot P_M) \cdot \left(1 - P_M \cdot \left(1 - (1 - P_P)^2\right)\right)\right)$$

$$u = u_K + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot u_P + \frac{2}{3} u_{M_1} + \frac{1}{3} u_{M_2} = \frac{1}{\mu_K - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3}} + \frac{1}{\frac{3}{2}\mu_M - \lambda} + \frac{1}{3\mu_M - \lambda}$$

$$3 \cdot C_P + 2 \cdot C_M + C_K$$

$$\lambda = \min\left(\mu_K, 3\mu_P, 1.5\mu_M\right)$$

P	u	Λ	C
93.05	52.66	0.1154	59

В нормализованном виде:

P	u	Λ	C
0.486	0.769	0.27026	0.834

Таким образом, эта система стоит на втором месте по минимаксному критерию (после 24), а также с небольшим отрывом по мультипликативному (с произведением характеристик, равным 0.0842). По аддитивному критерию это решение таже стоит на втором месте с суммой, равной 2.3593.

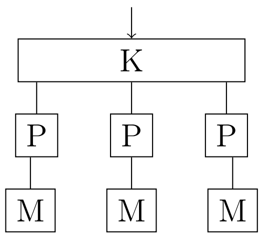
Таким образом, мы получаем решение, которое, имея лишь небольшой отрыв от оптимального, улучшает его сторону, по которой оно слабее остальных.

1.10. Выводы

В результате проделанной работы мы применили свои знания в теории надёжности, математическом моделировании и базовой арифметике для получения численных метрик вычислительной системы, а также изучили основные методы принятия решений в условиях, где не заданы заранее критерии оптимизации.

2. Многокритериальное оптимальное проектирование

Без резервирования имеем систему:



Формулы, по которым мы рассчитали параметры системы:

$$
\begin{aligned}
&P = P_K \cdot \left(1 - (1 - P_M \cdot P_P)^3\right) \\
&u = u_K + 3\left(\frac{1}{3}\left(u_P + u_M\right)\right) = \frac{1}{\mu_K - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3}} \\
&\Lambda = \lambda < \min\left(\mu_K, 3\mu_P, 3\mu_M\right) \\
&C = 3 \cdot C_P + 3 \cdot C_M + C_K
\end{aligned}
$$

Параметры при известных входных данных:

P	u	Λ	C
93.77%	50.87	0.1304	65

2.1. Поэлементное резервирование

2.1.1. Анализ

Требуется обнаружить такую комбинацию (n_K, n_P, n_M), что, пусть мы остаёмся в рамках бюджета, достигается $\min u, \min C, \max P, \max \Lambda$.

Чтобы определить надёжность требуемой системы, требуется в формуле надёжности и сходной системы каждое вхождение P_a заменить на $(1 - (1 - P_a)^{n_a})$: элемент заменяется на n_a идентичных ему, и этой формулой задаётся вероятность того, что работает хотя бы один из элементов.

Рассмотрим, что происходит со среднем временем ожидания при поэлементном резервировании. Итак, каждый элемент в сумме $u = \sum_i \dfrac{1}{\mu_i - \lambda_i}$ заменяется, если ему соответствует прибор типа a, на n_a идентичных ему элементов. При этом поток в каждый из этих элементов будет в n_a раз меньше, чем у исходного, как и вероятность попадания в этот конкретный элемент: $\dfrac{1}{\mu_i - \lambda_i} \to \sum^{n_a} \frac{1}{n_a} \dfrac{1}{\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_a}} = \dfrac{1}{\mu_i - \frac{\lambda_i}{n_a}}$. Таким образом, в каждом слагаемом в выражении для среднего времени ожидания необходимо лишь заменить λ на $\frac{\lambda}{n}$.

Это позволяет быстро определить, как переход к поэлементному резервированию влияет на допускаемый поток входящих заявок: раз входной поток в каждый узел типа a становится в n_a раз меньше, значит, он может быть в n_a раз больше, чем раньше. Соответственно, в каждом аргументе к min мы увеличиваем дозволенный поток в n_a раз.

Со стоимостью ещё проще: достаточно в формуле для её вычисления C_a домножить на n_a.

Результирующие формулы таковы:

$$
\begin{aligned}
&P = (1-(1-P_K)^{n_K}) \cdot \left(1-(1-(1-(1-P_M)^{n_M}) \cdot (1-(1-P_P)^{n_P}))^3\right) \\
&u = \frac{1}{\mu_K - \frac{\lambda}{n_K}} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3n_P}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3n_M}} \\
&\Lambda = \lambda < \min\left(n_K\mu_K, 3n_P\mu_P, 3n_M\mu_M\right) \\
&C = 3 \cdot n_P C_P + 3 \cdot n_M C_M + n_K C_K
\end{aligned}
$$

Подставляя вместо всех n единицы, получаем отсутствие поэлементного резервирования и, как и следует ожидать, исходные формулы.

2.1.2. Получение значений

Экспериментально установим некоторые близкие к идеальным значения и зададим такие ограничения, чтобы лишь небольшой набор комбинаций n под них подходил. Это будут: $P \geq 1 - 1e - 9$, $C \leq 250$, $u \leq 43.4$.

Получаем такие комбинации:

n_K	n_M	n_P	$1-P, 10^{-9}$	u	Λ	C
8	3	4	2.17	43.120	0.52	250
8	5	3	2.09	43.389	0.39	241
9	5	3	0.51	43.378	0.39	243
10	5	3	0.42	43.369	0.39	245
11	5	3	0.4098	43.362	0.39	247
12	5	3	0.4095	43.356	0.39	249

Легко заметить, что все решения, кроме первого, — это поставить пять блоков памяти, три блока обработки и некоторое количество коммутаторов.

Нормализуем согласно таким соображениям:

- Худшие случаи выбираем такие, какие использовали при фильтрации;
- Лучший случай для времени пребывания — отсутствие очередей, то есть проход по одному разу по коммутатору, обработчику и устройству памяти: 41;
- Лучший случай для надёжности — 100%;
- Граничные случаи для интенсивности входных заявок — 0.350.6;
- Лучший случай для стоимости — 240.

Тогда нормализованные значения таковы:

n_K	n_M	n_P	P	u	Λ	C
8	3	4	0.7826	0.110	0.69	0.00
8	5	3	0.7910	0.005	0.17	0.90
9	5	3	0.9490	0.009	0.17	0.70
10	5	3	0.9584	0.012	0.17	0.50
11	5	3	0.9590	0.016	0.17	0.30
12	5	3	0.9591	0.018	0.17	0.10

2.1.3. Поиск наилучшего решения

Главный критерий Считая, что надёжность в $1.00 - 10^{-9}$ достаточно хороша, не ставим своей целью её дальнейшее увеличение. Вместо этого обеспокаиваемся величиной входного потока и средним временем пребывания. В таких условиях побеждает вариант $(8, 3, 4)$.

Мультипликативный критерий Посчитаем значения произведений частных показателей:

n_K	n_M	n_P	
8	3	4	0.000000
8	5	3	0.000605
9	5	3	0.001010
10	5	3	0.000978
11	5	3	0.000783
12	5	3	0.000293

Побеждает вариант $(9, 5, 3)$ как наиболее сбалансированный по цене и остальным показателям.

Аддитивный критерий Значения сумм частных показателей:

n_K	n_M	n_P	
8	3	4	1.5826
8	5	3	1.8660
9	5	3	1.8280
10	5	3	1.6404
11	5	3	1.4450
12	5	3	1.2471

Обнаруживаем, что побеждает вариант $(8, 5, 3)$, низкая стоимость которого даёт существенный прирост общему значению.

Метод отклонения от идеала В силу способа нормализации по идеалу мы обнаруживаем, что результат вычисления по аддитивному критерию совпадает с методом отклонения от идеала. Таким образом, мы уже нашли ответ: $(8, 5, 3)$.

Метод последовательной уступки Определяем значение главного критерия и осуществляем уступку по нему. Так как значение уступки по выбранным нами главным критериям требуется слишком большое и требуется выбрать только одно значение, выберем другой главный критерий: стоимость. По ней оптимальный вариант $(8,5,3)$. Зададим уступку в 4 у. е. и произведём оптимизацию по времени пребывания. Тогда имеем три варианта: $(8,5,3)$, $(9,5,3)$ и $(10,5,3)$. Побеждает вариант $(10,5,3)$ со значением 43.369. Произведём уступку в 0.01 и произведём оптимизацию по надёжности. Имеем $(9,5,3)$ и $(10,5,3)$, и $(10,5,3)$ снова выигрывает. Критериев, по которым можно произвести дальнейшую оптимизацию, не осталось, — побеждает $(10,5,3)$.

Метод STEM Метод STEM заключается в

2.2. Общее резервирование

2.3. Анализ

Рассмотрим формулы для системы, полученной из исходной путём полного резервирования.

Пусть надёжность исходной системы равна P_a. Тогда вероятность её отказа — $1 - P_a$. Вероятность того, что не работает n таких систем разом, — $(1-P_a)^n$. Соответственно, вероятность того, что хотя бы одна работает, — $1-(1-P_a)^n$.

Далее, пусть среднее время пребывания в системе равно $u_a(\lambda)$. Тогда вероятность попадания заявки в конкретную из n систем равна $\frac{1}{n}$. Соответственно, если при полном резервировании мы имеем в n раз меньший поток в каждую из копий. Так как $u = \sum_i \alpha_i u_i$, имеем $u = \sum_i^n \frac{1}{n} u_a\left(\frac{\lambda}{n}\right) = u_a\left(\frac{\lambda}{n}\right)$.

Теперь, пусть ранее максимальный допустимый входной поток был равен λ_a, который мы вычисляли как $\min M$. При резервировании же имеем $\lambda = \min nM$: в силу того, что все потоки в каждой копии уменьшились пропорционально в n раз по сравнению с имеющимися в исходной системе, каждая копия способна обрабатывать в n раз больший входной поток. Так как $\min nA = n \min A$, имеем $\Lambda = n \min M = n\lambda_a$.

Стоимость системы, состоящей из n копий, равна стоимости одной копии n раз: $C = nC_a$.

Итоговые формулы:

$$P = 1 - (1-P_a)^n$$
$$u = \frac{1}{\mu_K - \frac{\lambda}{n}} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3n}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3n}}$$
$$\Lambda = n\lambda_a$$
$$C = nC_a$$

Мы пользуемся значениями P_a, λ_a и C_a, поскольку они уже расчитаны.

2.3.1. Получение значений

В силу того, что стоимость выбранной системы равна 65 у. е., а бюджет составляет 250 у. е., мы можем себе позволить только трёхкратное резервирование: $65 \cdot 3 = 210 = 250 - 40$.

Таким образом, мы можем рассмотреть лишь три различных варианта:

n	P	u	Λ	C
1	93.77%	50.87	0.1304	65
2	99.61%	45.37	0.2608	130
3	99.98%	43.80	0.3912	195

Нормализуем по таким правилам:

Показатель	**Худший случай**	**Лучший случай**
Надёжность	93.00%	100%
Время пребывания	60	41
Интенсивность	0.1	0.6
Стоимость	250	50

Получаем:

n	P	u	Λ	C
1	0.11000	0.481	0.0608	0.925
2	0.94429	0.770	0.3216	0.600
3	0.99714	0.853	0.5824	0.275

2.3.2. Поиск наилучшего решения

Мультипликативный критерий Строим таблицу произведений нормализованных частных показателей:

n	
1	0.0030
2	0.1403
3	0.1362

С небольшим отрывом выигрывает резервирование, при котором у нас есть два экземпляра системы. Сильно проигрывает отсутствие резервирования.

Аддитивный критерий Значения сумм:

n	
1	1.5768
2	2.6359
3	2.7075

По аддитивному критерию лучше резервирование с тремя экземплярами. Снова отсутствие резервирования значительно хуже любой формы его наличия.

2.4. Сравнение методов резервирования

Обнаруживается, что поэлементное резервирование куда более гибкое и позволяет в рамках заданных ограничений добиться значительно больших результатов. Однако необходимо учитывать, что полное резервирование существенно проще реализуемо на практике: достаточно, не изменяя внутренней структуры прибора, добавить схожих с ним и добиться прироста по нужным параметрам, в то время как поэлементное резервирование требует наличия контроля над реализацией прибора.

3. Оптимизация в условиях неопределённости

В рамках прошлой работы мы определили формулы для поэлементного резервирования, а именно:

$$u = \frac{1}{\mu_K - \frac{\lambda}{n_K}} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3n_P}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3n_M}}$$
$$C = 3 \cdot n_P C_P + 3 \cdot n_M C_M + n_K C_K$$

Требуется найти такие (n_K, n_P, n_M), что достигает оптимального значения критерий

$$u(\vec{n}) \cdot C(\vec{n}) \to \min$$

3.1. Описание неопределённого потока

Зададим вектор вероятностей интенсивностей входного потока так:

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.3 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

3.2. Оптимизация по критерию Байеса

Расчёт по методу Байеса заключается в минимизации матожидания критерия:

$$\sum_i b_i \left(u(\lambda_i) \cdot C(\lambda_i)\right) \to \min$$

Реализуя эту функцию в GNU Octave, получаем результат: минимальное значение она принимает в тривиальном случае

$$(n_K, n_M, n_P) = (1, 1, 1)$$

3.3. Оптимизация при среднем значении интенсивности

Среднее значение интенсивности определяется как $\sum_i b_i \lambda_i$. Подсталяя значения, имеем результат:

$$\overline{\lambda} = 0.48\lambda_0 \approx 0.0209$$

Рассчитывая минимальное значение критерия при заданной интенсивности, имеем тот же результат:

3.4. Оптимизация при максимальной интенсивности

Максимальной интенсивностью считаем λ_0. Тогда необходимо найти оптимальное решение по критерию

$$u(\lambda_0) \cdot C(\lambda_0) \to \min$$

И снова результат

$$(n_K, n_M, n_P) = (1, 1, 1)$$

3.5. Оптимизация по минимуму потерь

При оптимизации по точке i имеем критерий

$$u(\lambda_i) \cdot C(\lambda_i) \to \min$$

Однако обнаружилось, что во всех этих точках оказывается оптимальным одно и то же решение:

$$(n_K, n_M, n_P) = (1, 1, 1)$$

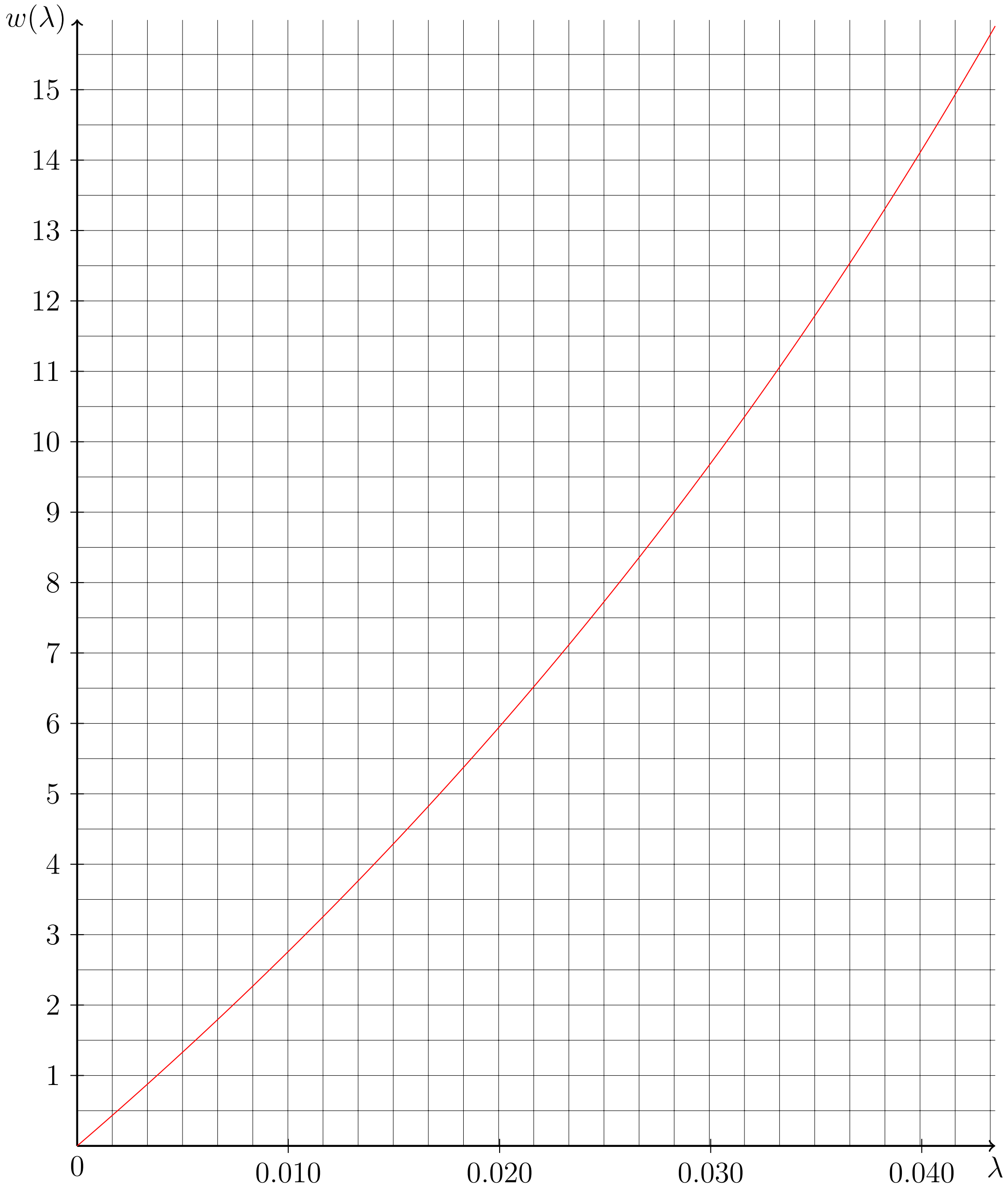
3.6. Графики

Единственным решением, которое появилось в рамках выполнения данной лабораторной работы, оказалось $(n_K, n_M, n_P) = (1, 1, 1)$. Построим график зависимости среднего времени ожидания для данного случая. Он определяется формулой:

$$w(\lambda) = \frac{1}{\mu_K - \lambda} + \frac{1}{\mu_P - \frac{\lambda}{3}} + \frac{1}{\mu_M - \frac{\lambda}{3}} - b_P - b_K - b_M$$

После подстановки констант и некоторых преобразований получаем

$$w(\lambda) = \frac{39}{3 - 13\lambda} + \frac{5}{1 - 5\lambda} + \frac{69}{3 - 23\lambda} - 41$$



3.7. Сравнение методов оптимизации

Так как все методы оптимизации дали один и тот же результат, сложно их сопоставить. Однако интуитивно понятно, что метод Байеса более точный, поскольку учитывает вероятности тех или иных нагрузок. В то же время метод, заключающийся в выборе наихудшего случая и оптимизации под него, весьма пессимистичный, но может быть полезен, когда ожидается, что система часто будет оперировать в режиме наибольшей нагрузки. Наконец, метод поиска решений путём взятия среднего значения интенсивности позволяет оптимально адресовать случаи, когда ожидаются лишь малые флунктуации относительно матожидания, то есть при распределении нагрузки, обладающим малым среднеквадратическим отклонением.

3.8. Выводы

Обнаружилось, что рассматриваемая система ведёт себя оптимально во всех рассмотренных случаях даже без резервирования, если в качестве критерия оптимизации принимать $C(\lambda) \cdot u(\lambda) \to \min$. Это обусловлено малым приростом производительности при добавлении коммутаторов и высокой стоимостью устройств памяти и обработки при высоком их числе, что приводит к тому, что их резервирование требует сразу большого количества денег.