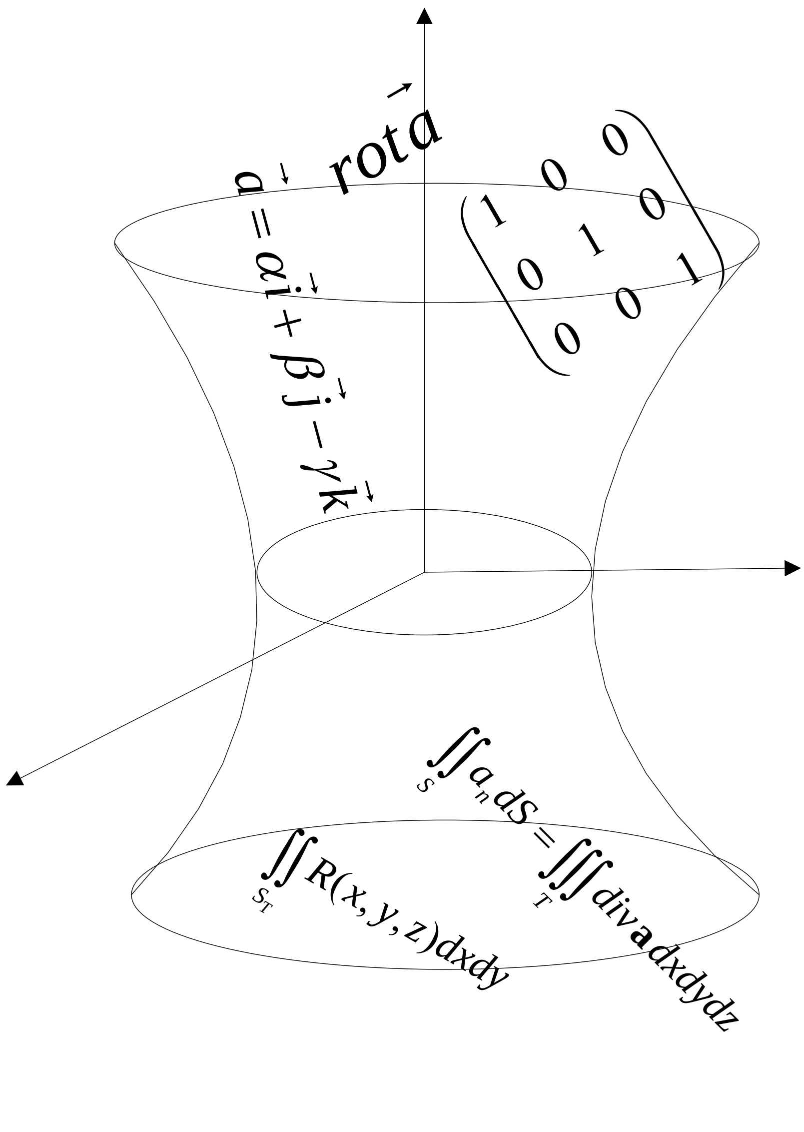
Типовой расчет по математике

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля

5 модуль

Учебно-методическое пособие



Санкт-Петербург

2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

О.И. Судавная, В.М.Фролов

Типовой расчет по математике

Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля

5 модуль

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург

2012

О.И. Судавная, В.М. Фролов. Типовой расчет. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля. 5 модуль. Учебно-методическое пособие. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 36 с.

Пособие содержит типовой расчет с методическими указаниями по темам

- кратные интегралы
- криволинейные интегралы
- поверхностные интегралы
- теория поля

Пособие адресовано студентам технических специальностей второго курса.

Рекомендовано к печати Ученым Советом естественнонаучного факультета 20.03.2012, протокол №3

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

Введение

Во втором семестре в рамках пятого модуля студенты очной формы обучения изучают тему «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля».

Типовой расчет по этой теме содержит 30 вариантов, каждый из которых включает шесть заданий по основным разделам. Перед заданиями помещены методические указания, а также приведены подробные решения наиболее типичных задач. Авторы рекомендуют студентам перед выполнением заданий типового расчета повторить теорию и разобрать приведенные решения.

Рекомендуемая литература

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Т.2. М.: Наука, 1986.
2. Лапин И.А., Ратафьева Л.С. Кратные интегралы. Теория поля. Учебное пособие. СПб: СПбГУИТМО, 2009.
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов. Т.2. М.: Наука, 2001.
4. Рынская А.К. Кратные интегралы и векторный анализ. Письменные лекции. СПб: СЗГЗТУ, 2005.
5. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. СПб: Лань, 1997.

Типовой расчет по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Теория поля»

Методические указания

Содержание расчетных заданий

I. Вычисление площадей плоских фигур с помощью двойных интегралов.

II. Вычисление объемов тел с помощью тройных интегралов. Замена переменных в тройном интеграле.

III. Применение криволинейных интегралов первого рода к нахождению масс плоских материальных кривых: 1) кривая задана уравнением $y = f(x)$, 2) кривая задана уравнениями $x = \varphi(t), y = \phi(t)$.

IV. Применение криволинейных интегралов первого рода к нахождению масс пространственных материальных кривых, заданных уравнениями $x = \varphi(t), y = \phi(t), z = \chi(t)$.

V. 1) Вычисление потоков векторных полей с помощью поверхностных интегралов. 2) Вычисление потоков векторных полей через замкнутую поверхность с помощью теоремы Остроградского-Гаусса. 3) Вычисление циркуляций векторных полей.

VI. Соленоидальные и потенциальные векторные поля. Нахождение потенциала потенциального векторного поля.

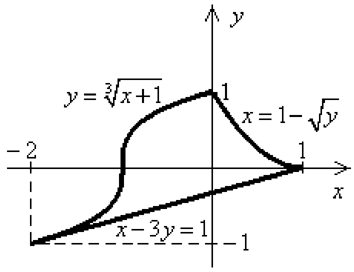
Образцы решения задач по теме «Кратные и криволинейные интегралы»

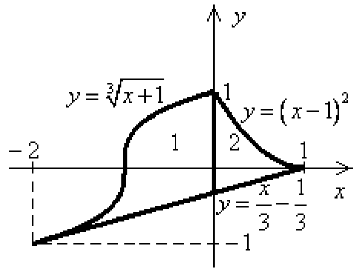
Задача 1. Плоская область D ограничена линиями $y = \sqrt[3]{x+1},\ x = 1 - \sqrt{y},\ x - 3y = 1$ и содержит точку O(0;0).

1) Сделайте схематический рисунок области D.

2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

Решение. 1) Область D, ограниченная указанными линиями, изображена на рис. 1. Координаты точек пересечения граничных линий найдены графически.





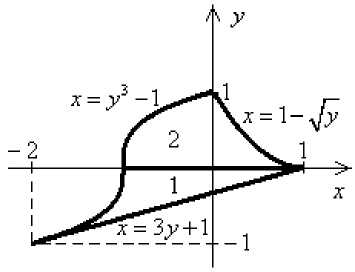


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

2) Площадь S области D находится с помощью двойного интеграла по формуле

$$S=\iint\limits_D dxdy$$

Перейти от двойного интеграла к повторному можно двумя способами.

I способ. Представим двойной интеграл в виде

$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy\,.$$

Для расстановки пределов интегрирования разрешим уравнения граничных линий относительно y:

$$y=\sqrt[3]{x+1},\quad y=(x-1)^2,\quad y=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}.$$

Площадь S области D представим в виде суммы площадей областей D_1 и D_2 (области 1 и 2 на рис. 2):

$$S=\iint\limits_{D_1} dxdy+\iint\limits_{D_2} dxdy=\int\limits_{-2}^{0} dx\int\limits_{\frac{x}{3}-\frac{1}{3}}^{\sqrt[3]{x+1}} dy+\int\limits_{0}^{1} dx\int\limits_{\frac{x}{3}-\frac{1}{3}}^{(x-1)^2} dy=$$

$$=\int\limits_{-2}^{0}\left((x+1)^{1/3}-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)dx+\int\limits_{0}^{1}\left((x-1)^2-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{3(x+1)^{4/3}}{4}-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{-2}^{0}+\left(\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=$$

$$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{6}=1\frac{5}{6}\,.$$

II способ. Представим двойной интеграл в виде

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} dx .$$

Для расстановки пределов интегрирования разрешим уравнения граничных линий относительно x:

$$x = y^3 - 1, \quad x = 1 - \sqrt{y}, \quad x = 3y + 1 .$$

Площадь S области D представим в виде суммы площадей областей D_1 и D_2 (области 1 и 2 на рис. 3):

$$S = \iint\limits_{D_1} dxdy + \iint\limits_{D_2} dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y^3-1}^{3y+1} dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^3-1}^{1-\sqrt{y}} dx =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (3y - y^3 + 2)dy + \int\limits_{0}^{1} (2 - \sqrt{y} - y^3)dy =$$

$$= \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 2y \right)\Bigg|_{-1}^{0} + \left(2y - \frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^4}{4} \right)\Bigg|_{0}^{1} =$$

$$= -\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} - 2 \right) + 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = 4 - \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = 1\frac{5}{6} .$$

Ответ: $1\frac{5}{6}$.

Задача 2. Тело T ограничено поверхностями

$$z = 4 - x^2 - y^2 \ (1), \quad z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \ (2), \quad y = 0 \ (3) \text{ при } y \le 0 .$$

1) Сделайте схематический рисунок тела T.

2) С помощью тройного интеграла найдите объем тела T.

Решение. 1) Уравнение (1) задает параболоид вращения, симметричный относительно оси Oz с вершиной в точке $K(0;\ 0;\ 4)$, полость которого обращена вниз. Уравнение (2) задает нижнюю полусферу $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ с центром $O(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом 2. Уравнение (3) задает координатную плоскость Oxz. Условие $y \le 0$ выделяет ту часть тела, ограниченного указанными поверхностями, которая лежит в области отрицательных значений ординат. Тело T изображено на рис. 4.

2) Объем V тела T выражается тройным интегралом $V = \iiint\limits_T dv$.

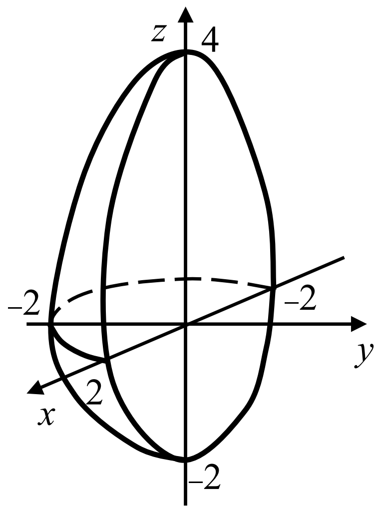


Рис. 4

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к цилиндрическим координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ с учетом того, что $x^2 + y^2 = r^2$. Якобиан перехода равен r, а формула объема тела примет вид: $V = \iiint\limits_T r\,dr\,d\varphi\,dz$.

Запишем уравнения поверхностей, ограничивающих тело T, в цилиндрических координатах. Уравнение параболоида: $z = 4 - r^2$, уравнение нижней полусферы: $z = -\sqrt{4-r^2}$. Неравенство $y \le 0$ в цилиндрических координатах примет вид

$$r\sin\varphi \le 0 \Rightarrow \sin\varphi \le 0 \Rightarrow -\pi \le \varphi \le 0 \ (4)$$

Для расстановки пределов интегрирования найдем линию пересечения параболоида и полусферы:

$$\begin{cases} z = 4 - r^2 \\ z = -\sqrt{4-r^2} \\ r \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - r^2 \\ 4 - r^2 = -\sqrt{4-r^2} \\ r \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 2 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Таким образом, параболоид и полусфера пересекаются по полуокружности радиуса 2 с центром в точке $O(0;\,0;\,0)$ в плоскости $z = 0$ при $y \le 0$. Значит, для всех точек тела T справедливо условие $0 \le r \le 2$ (5). Наконец, отметим, что при входе в область T прямая, параллельная оси Oz, пересечет полусферу $z = -\sqrt{4-r^2}$, а при выходе – параболоид $z = 4 - r^2$. Следовательно, для всех точек тела выполняется условие $-\sqrt{4-r^2} \le z \le 4 - r^2$ (6). Используя условия (4), (5) и (6), расставим пределы интегрирования в тройном интеграле:

$$V=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}rdr\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{4-r^2}dz\,.$$

Будем последовательно вычислять интегралы, начиная с интеграла по переменной z:

$$V=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}rdr\int_{-\sqrt{4-r^2}}^{4-r^2}dz=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}r\left(4-r^2+\sqrt{4-r^2}\right)dr=$$

$$=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}\left(4r-r^3+r\sqrt{4-r^2}\right)dr\,.$$

Далее воспользуемся линейностью интеграла и представим его в виде суммы:

$$V=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}\left(4r-r^3\right)dr+\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}r\sqrt{4-r^2}\,dr\,.$$

Первое слагаемое содержит табличные интегралы, а для вычисления интеграла во втором слагаемом используем метод «подведения под знак дифференциала»: $rdr=-\dfrac{1}{2}d(4-r^2)$. В результате получим

$$V=\int_{-\pi}^{0}d\varphi\left(2r^2-\frac{r^4}{4}\right)\Bigg|_0^2-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}d\varphi\int_{0}^{2}(4-r^2)^{1/2}d(4-r^2)=$$

$$=\int_{-\pi}^{0}d\varphi(8-4)-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}d\varphi\frac{2(4-r^2)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^2=$$

$$=4\pi+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}d\varphi\frac{16}{3}=4\pi+\frac{8\pi}{3}=\frac{20\pi}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{20\pi}{3}$.

Задача 3. Тело T ограничено поверхностями
$x^2+y^2+z^2=6z$ (7), $x^2+y^2=z^2$ (8), $y=0$ (9) при $y\ge 0$, $z\ge 0$ и содержит точку M (0; 1; 3).

1) Сделайте схематический рисунок тела T.
2) С помощью тройного интеграла найдите объем тела T.

Решение. 1) Преобразуем уравнение (7):

$$x^2+y^2+z^2=6z \Rightarrow x^2+y^2+z^2-6z=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2-6z+9=9 \Rightarrow x^2+y^2+(z-3)^2=3^2.$$

Таким образом, уравнение (7) задает сферу с радиусом, равным 3 и центром в точке K (0; 0; 3). Уравнение (8) задает конус с вершиной в точке O(0; 0; 0). Уравнение (9) задает координатную плоскость Oxz. Условие $y \geq 0$ выделяет ту часть тела, которая лежит в области положительных ординат. Принадлежность телу точки M (0; 1; 3) указывает на то, что тело содержит точки, лежащие внутри конуса и сферы.

Тело T изображено схематически на рис. 5.

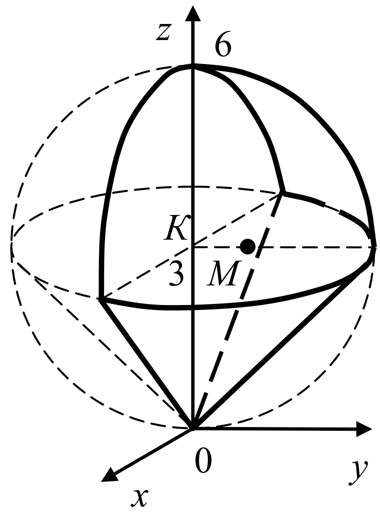


Рис. 5

2) Объем V тела T выражается тройным интегралом $V=\iiint\limits_T dv$.

Будем вычислять этот интеграл, перейдя к сферическим координатам. Для этого используем формулы перехода от декартовых координат к сферическим:

$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta.$ При этом выполняется условие $x^2+y^2=z^2=r^2$. Якобиан перехода равен $r^2\sin\theta$. Формула объема тела примет вид: $V=\iiint\limits_T r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta$.

Перейдем в уравнениях сферы и конуса от декартовых координат к сферическим.

Преобразуем уравнение сферы:

$$x^2+y^2+z^2=6z \Rightarrow r^2=6r\cos\theta \Rightarrow r=6\cos\theta .$$

Преобразуем уравнение конуса при $z \ge 0$:

$$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow r^2\sin^2\theta = r^2\cos^2\theta \Rightarrow \mathrm{tg}^2\theta = 1 \Rightarrow \mathrm{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Координатная плоскость $y = 0$ при $y \ge 0$ «отрезает» от тела, ограниченного сферой и конусом, ту часть, для точек которой выполняются неравенства $r\sin\theta\sin\varphi \ge 0 \Rightarrow \sin\varphi \ge 0 \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi$.

Таким образом, для всех точек данного тела справедливы следующие условия:

$$0 \le r \le 6\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \quad 0 \le \varphi \le \pi .$$

С помощью полученных неравенств расставим пределы интегрирования в тройном интеграле, выражающем объем *V* тела *T*:

$$V = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^{6\cos\theta} r^2 dr .$$

Будем последовательно находить определенные интегралы, начиная с интеграла по переменной *r*:

$$V = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta d\theta \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{6\cos\theta} = 72\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \sin\theta\cos^3\theta d\theta =$$

$$= -72\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{\pi/4} \cos^3\theta d(\cos\theta) = -72\int_0^{\pi} \left.\frac{\cos^4\theta}{4}\right|_0^{\pi/4} d\varphi =$$

$$= -18\int_0^{\pi}\left(\cos^4\frac{\pi}{4} - \cos^4 0\right)d\varphi = -18\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{4}-1\right)d\varphi = \frac{27}{2}\int_0^{\pi} d\varphi = 13{,}5\pi$$

Ответ: $13{,}5\pi$.

Задача 4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу *M* дуги плоской материальной кривой $y = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$ между точками *A* и *B* с абсциссами $x_1 = 1, x_2 = 9$, если плотность вещества равна $\rho(x,y) = 3$.

Решение. Масса *M* дуги плоской материальной кривой между точками *A* и *B* выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге *AB* кривой: $M = \int_{AB} \rho(x,y)dl$, где dl – дифференциал длины дуги.

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $dl = \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле $M = \int\limits_{x_1}^{x_2} \rho\left(x, f(x)\right)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$, где x_1 и x_2 – абсциссы точек A и B.

В нашем случае $x_1 = 1$, $x_2 = 9$, плотность постоянна: $\rho(x, y) = 3$, поэтому масса равна

$$M = 3\int\limits_{AB} dl = 3\int\limits_1^9 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Для нахождения дифференциала длины дуги найдем производную функции $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$:

$$f'(x) = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{x}}{3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x-1}{2\sqrt{x}}.$$

Найдем dl с учетом того, что $x > 0$ для всех точек дуги AB:

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{x-1}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{(x-1)^2}{4x}}\,dx = \sqrt{\frac{4x + x^2 - 2x + 1}{4x}}\,dx =$$

$$= \frac{\sqrt{(x+1)^2}}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{|x+1|}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx.$$

Масса M дуги материальной кривой AB равна

$$M = 3\int\limits_1^9 \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx = 3\int\limits_1^9 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{3}{2}\int\limits_1^9 \left(x^{1/2} + x^{-1/2}\right)dx =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2}\right)\Bigg|_1^9 = \left(x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}\right)\Big|_1^9 = 27 + 9 - 1 - 3 = 32.$$

Ответ: 32.

Задача 5. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу дуги плоской материальной кривой $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$

при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{3}$, если плотность вещества равна $\rho(x,y) = \dfrac{6y^2}{\sqrt{1+3x^2}}$.

Решение. Масса M дуги плоской материальной кривой между точками A и B выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге AB кривой:

$M = \int\limits_{AB} \rho(x,y)dl$, где dl – дифференциал длины дуги. Если кривая задана параметрическим способом $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho\left(\varphi(t), \psi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие абсциссам точек A и B.

В нашем случае $\varphi'(t) = x'_t = -\sin t$, $\psi'(t) = y'_t = 2\cos t$, поэтому

$$dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\,dt = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t}\,dt = \sqrt{1+3\cos^2 t}\,dt,$$

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{3}.$$

Плотность примет вид

$$\rho(x,y) = \frac{6y^2}{\sqrt{1+3x^2}} \Rightarrow \rho(\cos t, 2\sin t) = \frac{24\sin^2 t}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}.$$

Подставив полученные формулы в выражение криволинейного интеграла, будем иметь

$$M = \int\limits_0^{\pi/3} \frac{24\sin^2 t\sqrt{1+3\cos^2 t}}{\sqrt{1+3\cos^2 t}}dt = \int\limits_0^{\pi/3} 24\sin^2 t\,dt = 12\int\limits_0^{\pi/3} (1-\cos 2t)dt =$$

$$= 12\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/3} = 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 12\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 4\pi - 3\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\pi - 3\sqrt{3}$.

Задача 6. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу дуги пространственной материальной кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \\ z = t \end{cases}$ при $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если плотность вещества равна $\rho(x,y,z) = \dfrac{xy}{3x^2 - 2y^2 + 48}$.

Решение. Масса M дуги пространственной материальной кривой между точками A и B выражается криволинейным интегралом первого рода по дуге AB кривой:

$M = \int\limits_{AB} \rho(x,y,z)dl$, где dl – дифференциал длины дуги. Если кривая задана параметрическим способом $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$, то $dl = \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 + \left(\chi'(t)^2\right)}dt$, а криволинейный интеграл преобразуется в определенный интеграл по формуле

$$M = \int\limits_{t_1}^{t_2} \rho\left(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\right)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2 + \left(\chi'(t)\right)^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 – значения параметра t, соответствующие абсциссам точек A и B (в нашем случае $t_1 = 0, t_2 = \pi/2$).

В данной задаче кривая AB представляет собой дугу эллиптической спирали, которая «вьется» вокруг оси Oz и проецируется на эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$, лежащий в плоскости Oxy. Для выражения дифференциала длины дуги найдем производные

$\varphi'(t) = -2\sin t,\ \psi'(t) = 3\cos t,\ \chi'(t) = 1$.

Подставив полученные производные в выражение дифференциала, будем иметь

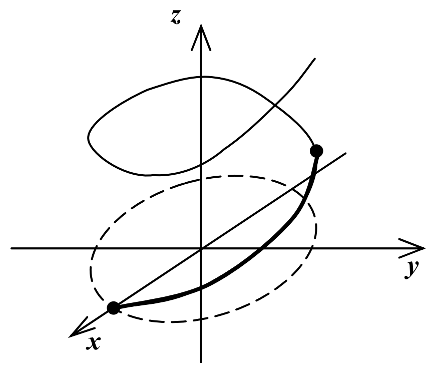


Рис. 5

$$dl = \sqrt{4\sin^2 t + 9\cos^2 t + 1}dt = \sqrt{5\cos^2 t + 5}dt.$$

Плотность $\rho(x,y,z)=\dfrac{xy}{3x^2-2y^2+48}$ примет вид

$$\rho(2\cos t,3\sin t,t)=\frac{6\cos t\sin t}{12\cos^2 t-18\sin^2 t+48}=$$
$$=\frac{\cos t\sin t}{2\cos^2 t-3\sin^2 t+8}=\frac{\cos t\sin t}{5\cos^2 t+5}.$$

Подставив найденные выражения в криволинейный интеграл, получим

$$M=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sqrt{5\cos^2 t+5}\cos t\sin t dt}{5\cos^2 t+5}=\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos t\sin t dt}{\sqrt{5\cos^2 t+5}}.$$

Произведем замену переменной в определенном интеграле по формулам $u=5\cos^2 t+5,\ du=-10\cos t\sin t dt,\ \cos t\sin t dt=-\dfrac{du}{10}$, $u_1=10$ при $t_1=0$, $u_2=5$ при $t_2=\pi/2$.

В результате будем иметь

$$M=-\frac{1}{10}\int\limits_{10}^{5}u^{-1/2}du=-\frac{1}{10}\cdot 2\sqrt{u}\Big|_{10}^{5}=-\frac{1}{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{10}\right)=\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{5}$.

Образцы решения задач по теме «Теория поля»

Задача 7. Дано векторное поле $\vec{a}=2(x+y)\vec{i}-$ $-(x+2y-2z-2)\vec{k}$ и плоскость σ, заданная уравнением $x+y+2z=2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной *KLMK*, где *K*, *L*, *M* – точки пересечения плоскости σ с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно.

1) Найдите поток *Q* векторного поля $\vec{a}$ через часть *S* плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат *O*(0;0;0).

2) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток *Q* векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра *OLMK* в сторону внешней нормали.

Решение. 1) Часть S плоскости σ, лежащая в первом октанте, представляет собой треугольник KLM (рис. 6).

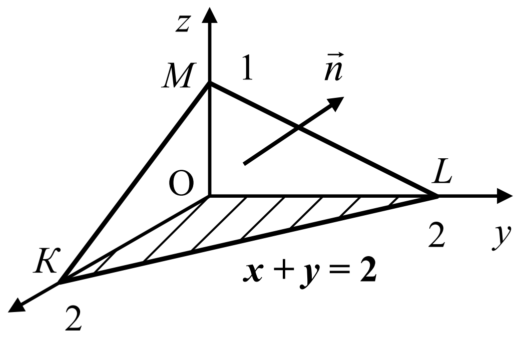


Рис. 6

Поток Q векторного поля $\vec{a}$ через поверхность S выражается поверхностным интегралом первого рода

$Q = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS$, где $\vec{n} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ – единичный вектор нормали к данной поверхности, направление которого задано в условии задачи, dS – дифференциал площади поверхности. Скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла, в координатной форме имеет вид $\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma$, где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ – координаты вектора $\vec{a}$.

Если уравнение поверхности разрешено относительно z, т. е. задано в виде $z = f(x, y)$, то, введя обозначения частных производных $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p(x, y)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q(x, y)$, выразим направляющие косинусы единичного вектора нормали:

$$\cos\alpha = \frac{-p(x,y)}{\pm\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}}, \cos\beta = \frac{-q(x,y)}{\pm\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}}.$$

В приведенных формулах перед радикалом выбирается знак «+», если вектор нормали образует острый угол с осью Oz, и знак « – » в противном случае. Дифференциал площади поверхности равен

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x,y) + q^2(x,y)}\,dxdy.$$

В условиях данной задачи координаты вектора $\vec{a}$ равны

$$a_x = 2(x + y),\ a_y = 0,\ a_z = -(x + 2y - 2z - 2).$$

Разрешив уравнение плоскости σ относительно z, получим $z = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$. Найдем частные производные этой функции $\frac{\partial z}{\partial x} = p(x, y) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q(x, y) = -\frac{1}{2}$. Радикал, стоящий в знаменателях направляющих косинусов, равен $\sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Согласно условию задачи, $\cos\gamma > 0$, следовательно, перед радикалом выбираем знак «+». В результате получим $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Найдем скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = 2(x + y) \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} - (x + 2y - 2z - 2) \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} =$$

$$= \frac{2x + 2y - (2x + 4y - 4z - 4)}{\sqrt{6}} = \frac{4 + 4z - 2y}{\sqrt{6}}.$$

Для вычисления потока преобразуем поверхностный интеграл по части S плоскости σ в двойной интеграл по плоской области D_{xy} – проекции области S на плоскость Oxy. Для этого в выражении $\vec{a} \cdot \vec{n}$ заменим z на $1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ и выразим дифференциал площади поверхности по формуле

$$dS = \sqrt{1 + p^2(x, y) + q^2(x, y)}dxdy = \frac{\sqrt{6}}{2}dxdy.$$

Получим $Q = \iint\limits_S \vec{a} \cdot \vec{n}dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{4 + 4 - 2x - 2y - 2y}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}dxdy =$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} (4 - x - 2y)dxdy.$$

Полученное выражение представляет собой двойной интеграл по треугольнику OKL, лежащему в плоскости Oxy (рис. 6). Расставим пределы интегрирования и вычислим этот интеграл.

$$Q = \iint\limits_{D_{xy}} (4 - x - 2y)dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4 - x - 2y)dy =$$

$$=\int_0^2 dx\left(4y-xy-y^2\right)\Big|_0^{2-x}=\int_0^2\left(8-4x-2x+x^2-4+4x-x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^2 (4-2x)dx=\left(4x-x^2\right)\Big|_0^2=8-4=4.$$

Замечание. В данной задаче часть плоскости, ограниченная координатными плоскостями, лежит в верхнем полупространстве, поэтому в выражениях направляющих косинусов перед радикалами был выбран знак « + ». Если же указанная часть плоскости будет лежать в нижнем полупространстве, перед радикалами следует выбрать знак « – ».

2) Формула Остроградского-Гаусса для нахождения потока векторного поля через замкнутую поверхность наружу, имеет вид $Q=\iiint\limits_T div\vec{a}dv$, где $div\vec{a}=\dfrac{\partial a_x}{\partial x}+\dfrac{\partial a_y}{\partial y}+\dfrac{\partial a_z}{\partial z}$, T – тело, ограниченное замкнутой поверхностью. В нашем случае дивергенция векторного поля равна

$$div\vec{a}=\frac{\partial(2x+2y)}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial y}+\frac{\partial(-x-2y+2z+2)}{\partial z}=2+2=4.$$

Поскольку дивергенция постоянна, формула Остроградского-Гаусса примет вид $Q=\iiint\limits_T div\vec{a}dv=4\iiint\limits_T dv=4V_T$, где V_T объем тела T, ограниченного замкнутой поверхностью, в нашем случае – объем тетраэдра *OLMK*. Для нахождения объема тетраэдра *OLMK* воспользуемся известной формулой

$$V_T=\frac{1}{3}OM\cdot\frac{1}{2}OK\cdot OL=\frac{1}{6}OM\cdot OK\cdot OL=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 2\cdot 1=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Окончательно получим $Q=4\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$.

Ответ: 1) $Q = 4$, 2) $Q=\dfrac{8}{3}$.

Задача 8. Дано векторное поле $\vec{a}=2(x+y)\vec{i}-$ $-(x+2y-2z-2)\vec{k}$ и плоскость σ, заданная уравнением $x+y+2z=2$, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной *KLMK*, где *K*, *L*, *M* – точки пересечения плоскости σ с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно.

Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру $KLMK$, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями

Решение. *I способ.* Циркуляция векторного поля $\vec{a}$ по контуру l представляет собой криволинейный интеграл второго рода:

$$C = \int_l \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Для нашей задачи получим

$$C = \int_{KLMK} a_x dx + a_y dy + a_z dz = \int_{KLMK} 2(x+y)dx - (x+2y-2z-2)dz$$

По условию задачи обход контура производится в направлении, отмеченном стрелками на рис. 7.

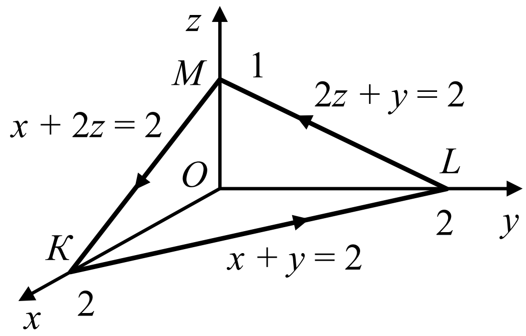


Рис. 7

Для вычисления циркуляции применим свойство аддитивности интеграла и представим C в виде суммы трех криволинейных интегралов I_{KL}, I_{LM} и I_{MK}, взятых по отрезкам KL, LM и MK соответственно, т. е. $C = I_{KL} + I_{LM} + I_{MK}$. Найдем значение каждого из этих трех интегралов.

а) Отрезок KL представляет собой отрезок прямой, заданной системой $\begin{cases} z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$, откуда следует, что $dz = 0$. При движении от точки K к точке L координата x меняется от 2 до 0. Следовательно,

$$I_{KL} = \int_2^0 4dx = 4x\Big|_2^0 = -8.$$

б) Отрезок LM представляет собой отрезок прямой, заданной системой $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 - 2z \end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = -2dz \end{cases}$. При движении от точки L к точке M координата z меняется от 0 до 1. Следовательно,

$$I_{LM} = -\int_0^1 (4-4z-2z-2)dz =$$

$$= 2\int_0^1 (3z-1)dz = 2\left(\frac{3z^2}{2} - z\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) = 1.$$

в) Отрезок MK представляет собой отрезок прямой, заданной системой $\begin{cases} y = 0 \\ x = 2-2z \end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases} dy = 0 \\ dx = -2dz \end{cases}$. При движении от точки M к точке K координата z меняется от 1 до 0. Следовательно,

$$I_{MK} = \int_1^0 \big((2-2z)(-4) - (2-2z-2z-2)\big)dz =$$

$$= \int_1^0 (12z-8)dz = \left(6z^2 - 8z\right)\Big|_1^0 = -6+8 = 2.$$

Окончательно получим $C = -8 + 1 + 2 = -5$.

II способ. Найдем циркуляцию векторного поля по той же замкнутой линии с помощью теоремы Стокса, согласно которой циркуляция векторного поля по контуру равна потоку ротора векторного поля через поверхность, ограниченную контуром $C = \iint\limits_S rot\vec{a} \cdot \vec{n}dS$. Выразим поток ротора через поверхностный интеграл второго рода

$$C = \iint\limits_S rot\vec{a} \cdot \vec{n}dS = \iint\limits_S (rot\vec{a})_x dydz + (rot\vec{a})_y dxdz + (rot\vec{a})_z dxdy.$$

В этой формуле $(rot\vec{a})_x$, $(rot\vec{a})_y$, $(rot\vec{a})_z$ – составляющие ротора по осям координат Ox, Oy, Oz соответственно. Сторона поверхности выбирается таким образом, чтобы при наблюдении с конца нормали обход контура происходил так, чтобы поверхность оставалась слева (рис. 7).

Поверхностный интеграл второго рода выразим через сумму двойных интегралов, каждый из которых берется по проекции поверхности S на координатные плоскости D_{yz}, D_{xz}, D_{xy}:

$$C = \pm\iint\limits_{D_{yz}} rot\vec{a}_x dydz \pm \iint\limits_{D_{xz}} rot\vec{a}_y dxdz \pm \iint\limits_{D_{xy}} rot\vec{a}_z dxdy.$$

Перед каждым интегралом выбирается знак «+», если нормаль образует острый угол с осью координат, перпендикулярной к плоскости, на которую проецируется поверхность; в противном случае выбирается знак « – ».

Найдем ротор векторного поля в нашей задаче:

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x+2y & 0 & -x-2y+2z+2 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(-x-2y+2z+2) - \frac{\partial}{\partial z}0 \right)\vec{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x-2y+2z+2) - \frac{\partial}{\partial z}(2x+2y) \right)\vec{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}0 - \frac{\partial}{\partial y}(2x+2y) \right)\vec{k} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k} .$$

Циркуляция равна $C = \iint\limits_S (-2)dydz + dxdz + (-2)dxdy$. В нашем случае нормаль к поверхности образует острые углы с осями координат. Поэтому, перейдя от поверхностного интеграла второго рода к двойным интегралам, получим

$$C = \iint\limits_{\Delta OLM} (-2)dydz + \iint\limits_{\Delta OKM} dxdz + \iint\limits_{\Delta OKL} (-2)dxdy =$$

$$= -2\iint\limits_{\Delta OLM} dydz + \iint\limits_{\Delta OKM} dxdz - 2\iint\limits_{\Delta OKL} dxdy = -2S_{\Delta OLM} + S_{\Delta OKM} - 2S_{\Delta OKL},$$

где $S_{\Delta OLM}$, $S_{\Delta OKM}$, $S_{\Delta OKL}$ – площади соответствующих треугольников (рис. 7). Применив формулу площади прямоугольного треугольника $S = \dfrac{1}{2}ab$, где a и b катеты, окончательно получим $C = -2 + 1 - 4 = -5$.

Ответ: $C = -5$.

Задача 9. Дано векторное поле $\vec{a}(M) = -3x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 - 2z)\vec{k}$

1) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
2) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

Решение. 1) Условием соленоидальности векторного поля является равенство его дивергенции нулю во всей области его определения. Данное векторное поле определено при любых значениях переменных. Для проверки его соленоидальности найдем дивергенцию векторного поля.

$$div\vec{a}(M)=\frac{\partial(-3x^2)}{\partial x}+\frac{\partial(2xy)}{\partial y}+\frac{\partial(y^2-2z)}{\partial z}=-6x+2z-2$$

Дивергенция обращается в ноль не при всех значениях x, y, z, а лишь при условии $-6x+2z-2=0$, т. е. на плоскости $z=1+3x$, поэтому поле не соленоидально.

Условием потенциальности векторного поля является равенство его ротора нулевому вектору во всей области определения поля. Для проверки его потенциальности найдем ротор векторного поля.

$$rot\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -3x^2 & 2yz & y^2-2z\end{vmatrix}=$$

$$=\left(\frac{\partial(y^2-2z)}{\partial y}-\frac{\partial(2yz)}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial(-3x^2)}{\partial z}-\frac{\partial(y^2-2z)}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial(2yz)}{\partial x}-\frac{\partial(-3x^2)}{\partial y}\right)\vec{k}=$$

$$=(2y-2y)\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$$

Таким образом, $rot\vec{a}(M)=\vec{0}$ при любых значениях переменных. Значит, поле потенциально.

2) Поскольку поле потенциально, оно является градиентом некоторого скалярного поля $U(M)$, т. е. $\vec{a}(M)=grad\,U(M)$. Скалярное поле $U(M)$ называется потенциалом векторного поля $\vec{a}(M)$. Его полный дифференциал задается выражением $dU=a_x dx+a_y dy+a_z dz$, в котором a_x, a_y, a_z – координаты векторного поля $\vec{a}(M)$. Задача нахождения потенциала сводится к нахождению функции трех переменных по ее полному дифференциалу. Для этого следует найти криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования

$$U(M)=\int\limits_{M_0}^{M}dU+C=\int\limits_{M_0}^{M}a_x dx+a_y dy+a_z dz+C,$$

где $M_0=M_0(x_0,\,y_0,\,z_0)$ – начальная точка, $M=M(x,\,y,\,z)$ – конечная точка пути интегрирования.

Обозначим переменные интегрирования через $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$. В качестве начальной точки выберем начало координат $O(0;\,0;\,0)$, а в качестве конечной точки – текущую точку $M(x,\,y,\,z)$. В нашем случае полный дифференциал имеет вид

$$dU=-3x^2dx+2yzdy+(y^2-2z)dz.$$

Тогда потенциал $U(M)=U(x,\,y,\,z)$ равен

$$U(x,y,z)=\int\limits_{(0;0;0)}^{(x;y;z)} -3\tilde{x}^2d\tilde{x}+2\tilde{y}\tilde{z}d\tilde{y}+(\tilde{y}^2-2\tilde{z})d\tilde{z}+C$$

В качестве пути интегрирования выберем ломаную *OABM*, где *O* = *O*(0; 0; 0), *A* = *A*(*x*; 0;0), *B* = *B*(*x*; *y*; 0), *M* = *M*(*x*, *y*, *z*) (рис. 8). Пользуясь свойством аддитивности криволинейного интеграла, представим его в виде суммы интегралов, найденных на каждом отрезке данной ломаной.

- Отрезок *OA* задается уравнениями $\begin{cases}\tilde{y}=0\\ \tilde{z}=0\end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases}d\tilde{y}=0\\ d\tilde{z}=0\end{cases}$. Переменная $\tilde{x}$ меняется от 0 до *x*. Интеграл по отрезку *OA* равен $I_{OA}=\int\limits_0^x(-3\tilde{x}^2)d\tilde{x}=-\tilde{x}^3\Big|_0^x=-x^3$

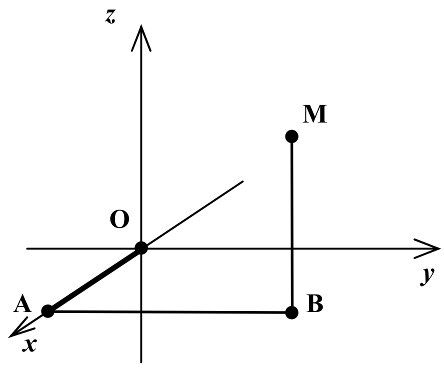


Рис. 8

- Отрезок *AB* задается уравнениями $\begin{cases}\tilde{x}=x=const\\ \tilde{z}=0\end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases}d\tilde{x}=0\\ d\tilde{z}=0\end{cases}$. Переменная $\tilde{y}$ меняется от 0 до *y*. Интеграл по отрезку *AB* равен $I_{AB}=\int\limits_0^y 0dy=0$.

- Отрезок *BM* задается уравнениями $\begin{cases}\tilde{x}=x=const\\ \tilde{y}=y=const\end{cases}$, откуда следует, что $\begin{cases}d\tilde{x}=0\\ d\tilde{y}=0\end{cases}$. Переменная $\tilde{z}$ меняется от 0 до *z*. Интеграл по отрезку *BM* равен $I_{BM}=\int\limits_0^z(y^2-2\tilde{z})d\tilde{z}=(y^2\tilde{z}-\tilde{z}^2)\Big|_0^z=y^2z-z^2$.

Окончательно получим

$U(x;y;z)=I_{OA}+I_{AB}+I_{BM}+C=-x^3+y^2z-z^2+C$

Ответ 1) Поле не соленоидально, поле потенциально.

2) $U(x;y;z)=-x^3+y^2z-z^2+C$.

Расчетные задания

I. Плоская область D ограничена заданными линиями.

1) Сделайте схематический рисунок области D.
2) С помощью двойного интеграла найдите площадь области D.

1. $y = 2/(x^2+1),\ y = \sqrt{x},\ x = -\sqrt{y}$.

2. $y = 2x-6,\ x = 3-\sqrt{y},\ y = \log_2 x$.

3. $y = x^3,\ x+y=2,\ y=3x+2$ при $x+y \le 2$.

4. $y = \sqrt{x+1},\ x-y=1,\ x+y=-1$.

5. $y = 2^x,\ x = -\sqrt{2y},\ x+2y=2$.

6. $y = \sqrt{x+2},\ x = \sqrt{2y},\ y = -x$.

7. $y = 0{,}5^x,\ y-x=1,\ y+4x=-4$.

8. $x = \sqrt{y}-1, x = \sqrt{1-y}, y = x^2-1$.

9. $x = \sqrt{2-y},\ y = -\sqrt{2x},\ y = x$.

10. $y = \sqrt[3]{x}, x = -\sqrt{y+2}, y = 3x-2$.

11. $y = -x^3, y-x=2, x\sqrt{3} = \sqrt{2-y}$ при $y \ge -x^3$.

12. $y-x=1,\ x+y=-1,\ x=\sqrt{y+1}$.

13. $y = 4^x, y = (x-1)^2, x = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

14. $y = \sqrt{-x},\ x = \sqrt{y},\ y = \dfrac{2}{x^2+1}$.

15. $x+y=1,\ y=2^x, 4x-y=4$.

16. $y = \sqrt{4-x}, x+y=-2,$ $x = \sqrt{2y}-2$.

17. $y = \sqrt{2-x}, x = -\sqrt{2y},\ y = x$.

18. $x = \sqrt{2y}, y = 0{,}5^x, 2y-x=2$.

19. $y = \sqrt[3]{x}, x+y=2, y\sqrt{3} = -\sqrt{2-x}$ при $y \le \sqrt[3]{x}$.

20. $x = \sqrt{1-y}, y-x=1, y+x=-1$.

21. $y=\log_2 x,\ y=\dfrac{x-1}{\ln 2},\ y=2$.

22. $y=\dfrac{4}{x},\ y=\sqrt{2x},\ y=4x$.

23. $4y-x=4,\ y=\log_2 x, x+y=1$.

24. $x=-\sqrt{y},\ y=\sqrt{x},\ y=2-x$.

25. $y=\log_2 x,\ y=-\sqrt{2x}, 2x+y=2$.

26. $x=\arcsin y, y=\dfrac{\pi}{2x}, y=\dfrac{8x}{\pi}$ при $x\ge 0$

27. $x=y^3,\ x=1-\sqrt{y+1},\ x+y=2$.

28. $y=2^x,\ x+y=3,\ x+3y=3$.

29. $y=\sqrt{x},\ x+y=2,\ x-y=2$.

30. $y=4^{-x},\ y=(x+1)^2,\ x=-\dfrac{2}{\sqrt{y}}$.

II. Тело *T* ограничено заданными поверхностями.

1) Сделайте схематический рисунок тела *T*.
2) С помощью тройного интеграла найдите объем тела *T*, перейдя к цилиндрическим или сферическим координатам.

1. $z=2+\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ x=0$ при $x\le 0$.
2. $z+4=x^2+y^2,\ 9z=5(x^2+y^2),\ y=0$ при $y\ge 0$.
3. $3z^2=x^2+y^2,\ z^2=3(x^2+y^2), x^2+y^2+z^2=9$ при $z\ge 0$.
4. $x^2+y^2=z^2-5,\ \dfrac{z^2}{9}=\dfrac{x^2+y^2}{4},\ x=0$ при $z\ge 0,\ x\ge 0$.
5. $\dfrac{z^2}{9}=1-\dfrac{x^2+y^2}{25},\ x^2+y^2=9,\ z=0,\ x=0$ при $z\ge 0,\ x\le 0$.
6. $z=4-2\sqrt{x^2+y^2},\ z=\dfrac{x^2+y^2}{2}-2,\ y=0$ при $y\ge 0$.
7. $z=\dfrac{5}{3}\sqrt{9-x^2-y^2},\ z=\dfrac{5}{4}\sqrt{x^2+y^2},\ x=0$ при $x\le 0$.
8. $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+(z-2)^2=4$ при $0\le z\le 2$.
9. $z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z=\sqrt{x^2+y^2}-2,\ x=0$ при $x\ge 0$.
10. $z=4-x^2-y^2,\ 9z=-5(x^2+y^2),\ y=0$ при $y\le 0$.
11. $z=2-\sqrt{x^2+y^2},\ z=4-x^2-y^2,\ x=0$ при $x\le 0$.

12. $z^2 = 3(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z,\ x = 0$ при $x \ge 0$,
$0 \le z \le \sqrt{3(x^2 + y^2)}$.

13. $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 1,\ x = 0,\ z = 0$ при $x^2 + y^2 \ge 1$, $x \le 0$.

14. $2z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 2\sqrt{x^2 + y^2} - 4,\ y = 0$ при $y \ge 0$, $z \ge -4$.

15. $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ z + 2 = x^2 + y^2,\ x = 0$ при $x \le 0$.

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{3}z,\ x = 0,\ z = 0$ при $x \ge 0$,
$0 \le 2\sqrt{3}z \le x^2 + y^2 + z^2$.

17. $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2},\ y = 0$ при $y \ge 0$, $z \le 2$.

18. $z = x^2 + y^2,\ z = \dfrac{5}{9}(x^2 + y^2) + 4,\ y = 0$ при $y \le 0$.

19. $z = 2 - x^2 - y^2,\ z = -\sqrt{x^2 + y^2},\ x = 0$ при $x \ge 0$.

20. $z^2 = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z,\ x = 0$ при $x \le 0$,
$z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$.

21. $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 36,\ x^2 + y^2 = 4,\ y = 0,\ z = 0$ при
$y \ge 0$, $z \le 0$, $x^2 + y^2 \ge 4$.

22. $z = -2\sqrt{x^2 + y^2},\ 2(z + 6) = x^2 + y^2,\ y = 0$ при $y \le 0$.

23. $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 9},\ 4z = 5\sqrt{x^2 + y^2},\ y = 0$ при $y \ge 0$.

24. $3z^2 = x^2 + y^2,\ z^2 = 3(x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 + z^2 = 4z,\ x = 0$ при
$x \ge 0$, $z \ge 0$.

25. $z = 2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2},\ y = 0$ при $y \le 0$.

26. $z = -\dfrac{5}{16}(x^2 + y^2),\ z = -\sqrt{x^2 + y^2 + 9},\ y = 0$ при $y \le 0$.

27. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 + z^2 - 2\sqrt{3}z = 0$ при $x^2 + y^2 + z^2 \ge 9$.

28. $x^2 + y^2 + z^2 = -2z,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ при $x^2 + y^2 + z^2 \ge 1$.

29. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{4} + 1,\ z = \dfrac{3(x^2 + y^2)}{4} - 1,\ x = 0,\ y = 0$ при
$x \ge 0,\ y \ge 0$.

30. $z = 3 - \dfrac{3(x^2 + y^2)}{4},\ z = 1 - \dfrac{x^2 + y^2}{4},\ x = 0,\ y = 0$ при
$x \le 0,\ y \le 0$.

III. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги плоской материальной кривой, заданной уравнениями а) $y = f(x)$ при $x_1 \le x \le x_2$; б) $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ при $t_1 \le t \le t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x, y)$.

1. а) $y = x\sqrt{x},\ \rho(x, y) = 8,\ x_1 = \dfrac{1}{4},\ x_2 = 5$;

б) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases},\ \rho(x, y) = 1,\ t_1 = \ln\sqrt{2},\ t_2 = \ln\sqrt{8}$.

2. а) $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2},\ \rho(x, y) = 1,\ x_1 = -\dfrac{1}{2},\ x_2 = \dfrac{1}{8}$;

б) $\begin{cases} x = e^t \\ y = \dfrac{2}{3} e^{1,5t} \end{cases},\ \rho(x, y) = 3,\ t_1 = \ln 8,\ t_2 = \ln 15$.

3. а) $y = \dfrac{x^2}{2},\ \rho(x, y) = \dfrac{8x}{1 + 2y},\ x_1 = 0,\ x_2 = \dfrac{3}{4}$;

б) $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases},\ \rho(x, y) = 8,\ t_1 = \dfrac{\pi}{6},\ t_2 = \dfrac{\pi}{3}$.

4. а) $y = \ln x,\ \rho(x, y) = 3xe^y,\ x_1 = 1,\ x_2 = 2$;

б) $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases},\ \rho(x, y) = \dfrac{y^2}{x^2},\ t_1 = 0,\ t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

5. а) $y = \ln\cos x,\ \rho(x, y) = 1,\ x_1 = -\dfrac{\pi}{4},\ x_2 = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $\begin{cases} x = 2e^{-t/2} \\ y = e^{-t} \end{cases},\ \rho(x, y) = \dfrac{12}{x^2 y},\ t_1 = \ln 3,\ t_2 = \ln 8$.

6. а) $y = \ln(x^2 - 1),\ \rho(x, y) = 1,\ x_1 = 3,\ x_2 = 5$;

б) $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \end{cases},\ \rho(x, y) = \dfrac{3x^2}{y^3},\ t_1 = \dfrac{1}{4}\ln 8,\ t_2 = \dfrac{1}{4}\ln 24$.

7. а) $y=2\sqrt{x},\ \rho(x,y)=\dfrac{6x}{y},\ x_1=3,\ x_2=15$;

б) $\begin{cases} x=\ln t \\ y=\dfrac{1}{t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{3e^x}{y^2},\ t_1=1,\ t_2=\sqrt{2}$.

8. а) $y=\dfrac{x^3}{3},\ \rho(x,y)=6x^2\sqrt[3]{3y},\ x_1=0,\ x_2=1$;

б) $\begin{cases} x=\cos^2 t \\ y=\sin^2 t \end{cases},\ \rho(x,y)=16\sqrt{2}(x-y),\ t_1=0,\ t_2=\dfrac{\pi}{6}$.

9. а) $y=\ln\sin x,\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\dfrac{\pi}{6},\ x_2=\dfrac{5\pi}{6}$;

б) $\begin{cases} x=t^2/2 \\ y=t^3/3 \end{cases},\ \rho(x,y)=3,\ t_1=2\sqrt{2},\ t_2=2\sqrt{6}$.

10. а) $y=\dfrac{1}{x},\ \rho(x,y)=\dfrac{6x^3}{y^2},\ x_1=\sqrt[4]{3},\ x_2=\sqrt[4]{8}$;

б) $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases},\ \rho(x,y)=1,\ t_1=0,\ t_2=\pi$.

11. а) $y=\dfrac{2}{\sqrt{x}},\ \rho(x,y)=\dfrac{3y}{\sqrt{y^2+4x^2}},\ x_1=\dfrac{1}{9},\ x_2=1$;

б) $\begin{cases} x=e^t-t \\ y=e^t+t \end{cases},\ \rho(x,y)=\sqrt{2},\ t_1=\ln\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ t_2=\ln\sqrt{3}$.

12. а) $y=e^x,\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\ln\sqrt{3},\ x_2=\ln\sqrt{8}$;

б) $\begin{cases} x=2\sqrt{t} \\ y=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\sqrt{1+\dfrac{3}{4}xy},\ t_1=1,\ t_2=4$.

13. а) $y=x^2,\ \rho(x,y)=\dfrac{8x}{1+4y},\ x_1=\sqrt{2},\ x_2=\sqrt{30}$;

б) $\begin{cases} x=1-\cos t \\ y=t-\sin t \end{cases},\ \rho(x,y)=1,\ t_1=0,\ t_2=\pi$.

14. а) $y=\ln(1-x^2),\ \rho(x,y)=1,\ x_1=0,\ x_2=0,2$;

б) $\begin{cases} x=\sin t+\cos t \\ y=\sin t-\cos t \end{cases},\ \rho(x,y)=x^2-y^2,\ t_1=0,\ t_2=\dfrac{\pi}{4}$.

15. а) $y=x^3,\ \rho(x,y)=\dfrac{12y}{1+9xy},\ x_1=0,\ x_2=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$;

б) $\begin{cases} x=e^t+t \\ y=e^t-t \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{(x+y)^2}{\sqrt{2}},\ t_1=\ln\sqrt{3},\ t_2=\ln\sqrt{8}$.

16. а) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\dfrac{1}{2},\ x_1=\dfrac{7}{8}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{2}{3}e^{1,5t}-1 \\ y=e^t+1 \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{1}{12},\ t_1=\ln 8,\ t_2=\ln 80$.

17. а) $y=\sqrt{x},\ \rho(x,y)=\dfrac{6y^2}{7\sqrt{x}},\ x_1=2,\ x_2=6$;

б) $\begin{cases} x=\cos t-\sin t \\ y=\sin t+\cos t \end{cases},\ \rho(x,y)=xy\sqrt{2},\ t_1=0,\ t_2=\dfrac{\pi}{4}$.

18. а) $y=\sin x,\ \rho(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{2-y^2}},\ x_1=0,\ x_2=\pi$;

б) $\begin{cases} x=e^t \\ y=0,5e^{2t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{3y}{x},\ t_1=0,\ t_2=\ln\sqrt{3}$.

19. а) $y=2x\sqrt{x},\ \rho(x,y)=1,\ x_1=\dfrac{8}{9},\ x_2=\dfrac{35}{9}$;

б) $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\, t \\ y=0,5\ln(1+t^2) \end{cases},\ \rho(x,y)=1,\ t_1=0,\ t_2=1$.

20. а) $y=\dfrac{x\sqrt{2x}}{3}-\sqrt{2x},\ \rho(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x_1=8,\ x_2=18$;

б) $\begin{cases} x=t^2-2t \\ y=t^2+2t \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{x-y}{7},\ t_1=1,\ t_2=\sqrt{7}$.

21. а) $y=\sqrt{x}-\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, $\rho(x,y)=3(\sqrt{x}-y)$, $x_1=\sqrt{6}, x_2=2\sqrt{3}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\cos t} \\ y=\operatorname{tg} t \end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{\sqrt{2x^2-1}}{x(y^2+1)}$, $t_1=\frac{\pi}{6}, t_2=\frac{\pi}{3}$.

22. а) $y=\frac{e^{2x}}{2}$, $\rho(x,y)=4y^2$, $x_1=\ln\sqrt[4]{3}, x_2=\ln\sqrt[4]{8}$;

б) $\begin{cases} x=\arcsin t \\ y=\sqrt{1-t^2} \end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{\sqrt{2-y^2}}{y}$, $t_1=0, t_2=\frac{1}{2}$.

23. а) $y=\cos x$, $\rho(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{2-y^2}}$, $x_1=0, x_2=\frac{\pi}{2}$;

б) $\begin{cases} x=\sqrt{1+t^2} \\ y=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{e^y}{x}-1$, $t_1=\frac{\sqrt{5}}{2}, t_2=\sqrt{3}$.

24. а) $y=\sqrt{1-x^2}$, $\rho(x,y)=\frac{1}{\pi}$, $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=\frac{1}{2}$;

б) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t \\ y=\dfrac{1}{\sin t} \end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{\sqrt{2y^2-1}}{y(x^2+1)}$, $t_1=\frac{\pi}{8}, t_2=\frac{3\pi}{8}$.

25. а) $y=2\sqrt{x-1}$, $\rho(x,y)=xy$, $x_1=\sqrt[5]{4}, x_2=4$;

б) $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\arcsin t \end{cases}$, $\rho(x,y)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{2-x^2}}$, $t_1=0, t_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

26. а) $y=2\sqrt{x}-\frac{x\sqrt{x}}{3}$, $\rho(x,y)=6\sqrt{x}-3y$, $x_1=2\sqrt{3}, x_2=4\sqrt{2}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=\ln t \end{cases}$, $\rho(x,y)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$, $t_1=2, t_2=4$.

27. а) $y=2e^{x/2}$, $\rho(x,y)=1$, $x_1=\ln 3, x_2=\ln 8$;

б) $\begin{cases} x=0{,}5\ln(1+t^2) \\ y=\operatorname{arctg} t \end{cases}$, $\rho(x,y)=\operatorname{tg} y$, $t_1=0, t_2=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

28. а) $y=2\sqrt{x+1},\ \rho(x,y)=\dfrac{2}{\sqrt{y^2+4}},\ x_1=-\dfrac{3}{4}, x_2=\dfrac{21}{4}$;

б) $\begin{cases} x=\operatorname{tg} t \\ y=\dfrac{1}{\cos t} \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{y}{\sqrt{2y^2-1}},\ t_1=\dfrac{\pi}{6}, t_2=\dfrac{\pi}{3}$.

29. а) $y=\sin x,\ \rho(x,y)=y\cos x,\ x_1=0, x_2=\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\begin{cases} x=\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right) \\ y=\sqrt{1+t^2} \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{1}{y},\ t_1=0, t_2=1$.

30. а) $y=\dfrac{1}{2}\left(\ln x-x^2\right),\ \rho(x,y)=\left(\ln x-2y\right)^2,\ x_1=\sqrt[4]{2}, x_2=\sqrt[4]{20}$;

б) $\begin{cases} x=\dfrac{1}{\sin t} \\ y=\operatorname{ctg} t \end{cases},\ \rho(x,y)=\dfrac{x}{\sqrt{2x^2-1}},\ t_1=\dfrac{\pi}{4}, t_2=\dfrac{\pi}{2}$.

IV. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите массу M дуги пространственной материальной кривой, заданной уравнениями $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ при $t_1\le t\le t_2$, если плотность вещества равна $\rho(x,y,z)$.

1. $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=2t+1 \\ z=t-1 \end{cases},\ \rho(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{(z+1)^2}, t_1=\dfrac{1}{8}, t_2=\dfrac{1}{2}$.

2. $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ z=\sqrt{3}t \end{cases},\ \rho(x,y,z)=z\sqrt{3(x^2+y^2)+z^2}, t_1=0, t_2=2\sqrt{2}$.

3. $\begin{cases} x=2t-1 \\ y=t+1 \\ z=t-1 \end{cases},\ \rho(x,y,z)=\dfrac{y^2+z^2}{(x+1)^2}, t_1=\sqrt{6}, t_2=2\sqrt{6}$.

4. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + z^2}$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{1}{2}$.

5. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2\sin t \\ z = t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{z^2}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$, $t_1 = 3, t_2 = 6$.

6. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \\ z = 3\sqrt{7}t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{9(x^2 + y^2)}{z^2 + 63}$, $t_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}, t_2 = \sqrt{3}$.

7. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = t \\ z = 2\cos t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{9}{2}xz$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

8. $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t \\ z = 6t + 1 \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{y}{\sqrt{z^2 + 3x^2}}$, $t_1 = 0, t_2 = \sqrt{2}$.

9. $\begin{cases} x = t \\ y = \cos t \\ z = 2\sin t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \sqrt{6 - y^2 - z^2}$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

10. $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 2t + 1 \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - x^2}}$, $t_1 = 6, t_2 = 20$.

11. $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sqrt{3}t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = y^2 - x^2 + 12z^2$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

12. $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \dfrac{zy}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

13. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t + 2 \end{cases}$, $\rho(x, y, z) = \sqrt{z^2 - 6xy}$, $t_1 = -\dfrac{1}{8}, t_2 = 0$.

14. $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = t \\ z = 3\cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{5x^2}{2} + \dfrac{5z^2}{9}}, t_1 = 0, t_2 = 2\pi$.

15. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos 2t \\ z = 4\sqrt{2}t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, t_1 = \dfrac{1}{2}, t_2 = 1$.

16. $\begin{cases} x = t \\ y = 3\sin t \\ z = 2\cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{xy\sqrt{6}}{\sqrt{48 + 3z^2 - 2y^2}}, t_1 = \dfrac{\pi}{3}, t_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

17. $\begin{cases} x = 0,5t - 1 \\ y = 2 - 0,5t \\ z = t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{z\sqrt{6}}{\sqrt{x^2 - y^2}}, t_1 = 4, t_2 = 7$.

18. $\begin{cases} x = 4\sqrt{2}t \\ y = 2\cos t \\ z = 2\sin t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{x(y^2 + z^2)}{\sqrt{x^2 + 32}}, t_1 = \dfrac{\sqrt{13}}{6}, t_2 = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

19. $\begin{cases} x = t \\ y = 2\sin t \\ z = \cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{xz}{\sqrt{6 - y^2 - z^2}}, t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

20. $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sqrt{3}t \\ z = \cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = (x+z)y, t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

21. $\begin{cases} x = 0,5\sqrt{5}t \\ y = \sin t \\ z = \cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = 2\sqrt{5}x(z - y), t_1 = \dfrac{3\pi}{2}, t_2 = 2\pi$.

22. $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = t \\ z = \sin t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{11 - x^2 - z^2}, t_1 = 0, t_2 = 2\pi$.

23. $\begin{cases} x = 3\sin t \\ y = \cos t \\ z = t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{xyz}{\sqrt{11 - x^2 - y^2}}$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{\pi}{4}$.

24. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 0,5t \\ z = 1 - 0,5t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{2(y^2 - z^2)}}{x}$, $t_1 = 1, t_2 = 2$.

25. $\begin{cases} x = t \\ y = \sin t \\ z = 3\cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{xy}{\sqrt{11 - y^2 - z^2}}$, $t_1 = \dfrac{\pi}{4}, t_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

26. $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = 2\sqrt{3}t \\ z = \sin 2t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}}$, $t_1 = 0, t_2 = 2$.

27. $\begin{cases} x = 3t \\ y = 2\sin 2t \\ z = 2\cos 2t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, $t_1 = 0, t_2 = \dfrac{2}{3}$.

28. $\begin{cases} x = 0,5t - 1 \\ y = 0,5t \\ z = 0,5t + 1 \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{2y}{\sqrt{2(x^2 + z^2)}}$, $t_1 = 0, t_2 = \sqrt{5}$.

29. $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 3t \\ z = 4\cos t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \dfrac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$, $t_1 = 0, t_2 = 4$.

30. $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2t - 1 \\ z = 3t \end{cases}$, $\rho(x,y,z) = \sqrt{\dfrac{3(x^2 - y^2)}{z}}$, $t_1 = \dfrac{1}{4}, t_2 = \dfrac{3}{4}$.

V. Дано векторное поле $\vec{a}$ и плоскость σ, пересекающая координатные плоскости по замкнутой ломаной *KLMK*, где *K*, *L*, *M* – точки пересечения плоскости σ с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно.

1) Найдите поток *Q* векторного поля $\vec{a}$ через часть *S* плоскости σ, вырезанной координатными плоскостями, в сторону нормали $\vec{n}$, направленной от начала координат *O*(0;0;0).

2) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса найдите поток Q векторного поля $\vec{a}$ через полную поверхность тетраэдра *OLMK* в сторону внешней нормали.
3) Найдите циркуляцию C векторного поля $\vec{a}$ по контуру *KLMK*, образованному пересечением плоскости σ с координатными плоскостями.

1. $\vec{a} = (y - x)\vec{i} + (3y - z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x + y + z = 4.$
2. $\vec{a} = 3(y - x)\vec{i} + (x + 3y + z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad x - 3y - z = -3.$
3. $\vec{a} = (x + y)\vec{i} + (z - 3y)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + y - z = -2.$
4. $\vec{a} = (x + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x - 2y + z = 2.$
5. $\vec{a} = (1 + z - y)\vec{j} + (3x - 2y - 2z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 3x + 2y - z = 6.$
6. $\vec{a} = (3y + z)\vec{j} - 3(x + y)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 3x - 3y + z = -3.$
7. $\vec{a} = (z - y)\vec{i} + (x + y - 2z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x + 2y + z = -2.$
8. $\vec{a} = 3x\vec{j} - (3x + 2y + z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x - y - z = 2.$
9. $\vec{a} = (x - y + z)\vec{j} + 3(y - 1)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 3x + 3y + z = 6.$
10. $\vec{a} = (3z - x)\vec{i} + (z - y)\vec{j}, \quad \sigma: \quad x - 2y - z = -4.$
11. $\vec{a} = 3(z - y)\vec{j} + (x + y + 3z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + y - 3z = -3.$
12. $\vec{a} = (x - 3z)\vec{i} + (y + z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad x - y + z = 2.$
13. $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (x + y)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + y - 2z = 2.$
14. $\vec{a} = (3y + 2z - 2x)\vec{i} + (1 + x - z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x - 3y + 2z = -6.$
15. $\vec{a} = -3(y + z)\vec{i} + (x + 3z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + 3y + 3z = -3.$
16. $\vec{a} = (y + z - 2x)\vec{i} + (x - z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad x - 2y - 2z = 2.$
17. $\vec{a} = -(x + 3y + 2z)\vec{i} + 3y\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + 2y + z = 2.$
18. $\vec{a} = 3(z - 1)\vec{i} + (x + y - z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x - 3y - 3z = -6.$
19. $\vec{a} = (3x - y)\vec{j} + (x - z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + y - 2z = -4.$
20. $\vec{a} = (3x + y + z)\vec{i} + 3(x - z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 3x - y + z = 3.$
21. $\vec{a} = (y - 3x)\vec{j} + (x + z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x + y - z = 2.$
22. $\vec{a} = (y + z)\vec{i} + (y - x)\vec{j}, \quad \sigma: \quad 2x - y + z = -2.$
23. $\vec{a} = (1 - x + y)\vec{i} + (2x - 2y + 3z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad 2x + y + 3z = -6.$
24. $\vec{a} = (3x + y)\vec{i} - 3(x + z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad 3x - y - 3z = 3.$

25. $\vec{a}=(x+z-2y)\vec{j}+(y-x)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x+y+2z=2$.

26. $\vec{a}=3z\vec{i}-(2x+y+3z)\vec{j}, \quad \sigma: \quad x-y-2z=-2$.

27. $\vec{a}=(3x-2)\vec{i}+(y+z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 3x+2y-2z=-6$.

28. $\vec{a}=(2z+2)\vec{j}+(x+y)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x-3y+2z=6$.

29. $\vec{a}=(x+y)\vec{i}+(z-2)\vec{k}, \quad \sigma: \quad 2x+2y-3z=6$.

30. $\vec{a}=(x-3)\vec{i}+(y+2z)\vec{k}, \quad \sigma: \quad x-y+z=-3$.

VI. Дано векторное поле $\vec{a}(M)$.

1) Проверьте, является ли векторное поле соленоидальным или потенциальным.
2) Если поле потенциально, найдите его потенциал.

1. $\vec{a}=(yz+y-1)\vec{i}+(xz+x)\vec{j}+(xy+2)\vec{k}$.
2. $\vec{a}=(-4x+y)\vec{i}+(2y+x+z)\vec{j}+(2z+y)\vec{k}$.
3. $\vec{a}=(2xy-6x)\vec{i}+(x^2-2yz)\vec{j}-y^2\vec{k}$.
4. $\vec{a}=(\sin y+2)\vec{i}+(x\cos y+z)\vec{j}+(y+2z)\vec{k}$.
5. $\vec{a}=(y^2-3x^2+z)\vec{i}+2xy\vec{j}+(x+1)\vec{k}$.
6. $\vec{a}=2x(y+z)\vec{i}+(x^2-y^2)\vec{j}+(x^2-z^2+3)\vec{k}$.
7. $\vec{a}=(z^2-y^2)\sin x\,\vec{i}+(2y\cos x+2)\vec{j}-2z\cos x\,\vec{k}$.
8. $\vec{a}=(y^2+y)\vec{i}+(2xy-z^2+x)\vec{j}-2yz\vec{k}$.
9. $\vec{a}=(y^2-z^2)\vec{i}+2xy\vec{j}+(1-2xz)\vec{k}$.
10. $\vec{a}=(1+e^y)\vec{i}+(xe^y-e^z-1)\vec{j}+(2-ye^z)\vec{k}$.
11. $\vec{a}=(2-yz)\vec{i}+(z-xz-1)\vec{j}+(y-xy+1)\vec{k}$.
12. $\vec{a}=(3y^2z-3x^2z)\vec{i}+(6xyz+3)\vec{j}+(3xy^2-x^3)\vec{k}$.
13. $\vec{a}=(ye^x+z^2)\vec{i}+(e^x+1)\vec{j}+2(xz-1)\vec{k}$.
14. $\vec{a}=\sin y\,\vec{i}+(x\cos y-\sin z)\vec{j}-y\cos z\,\vec{k}$.
15. $\vec{a}=(x^2-y^2-3)\vec{i}-2y(x+z)\vec{j}+(z^2-y^2)\vec{k}$.
16. $\vec{a}=(e^z+2)\vec{i}-(e^z+3)\vec{j}+(e^z x-e^z y+1)\vec{k}$.
17. $\vec{a}=(2yz+y-z)\vec{i}+(2xy+x-z)\vec{j}+(2xy-x-y)\vec{k}$.
18. $\vec{a}=(yz+2y-3z)\vec{i}+(xz+2x+z)\vec{j}+(xy-3x+y)\vec{k}$.
19. $\vec{a}=2x\sin z\,\vec{i}-2y\sin z\,\vec{j}+(x^2-y^2)\cos z\,\vec{k}$.
20. $\vec{a}=3(y^2-x^2+1)\vec{i}+6y(x-z)\vec{j}+3(z^2-y^2)\vec{k}$.

21. $\vec{a} = 3(z^2 - x^2)\vec{i} + 3(y^2 - z^2)\vec{j} + (6xz - 6yz - 3)\vec{k}$.

22. $\vec{a} = 2x\cos y\,\vec{i} + (z^2 - x^2)\sin y\,\vec{j} - 2z\cos y\,\vec{k}$.

23. $\vec{a} = (2x + z)\vec{i} + (z - 4y)\vec{j} + (x + y + 2z)\vec{k}$.

24. $\vec{a} = (2 - ze^x)\vec{i} + (e^z - 3)\vec{j} + (ye^z - e^x)\vec{k}$.

25. $\vec{a} = (y - 3z)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (2y - 3x + 4)\vec{k}$.

26. $\vec{a} = (4x + z - y)\vec{i} - (2y + x)\vec{j} + (x - 2z)\vec{k}$.

27. $\vec{a} = (y + e^z - ze^x)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (xe^z - e^x - y)\vec{k}$.

28. $\vec{a} = (2x + \cos z)\vec{i} - (2y + \cos z)\vec{j} + (y - x)\sin z\,\vec{k}$.

29. $\vec{a} = (2xy + 2)\vec{i} + (x^2 - 2yz - y^2)\vec{j} + (z^2 - y^2)\vec{k}$.

30. $\vec{a} = \cos y\,\vec{i} + (\sin z - x\sin y)\vec{j} + y\cos z\,\vec{k}$.

В 2009 году Университет стал победителем многоэтапного конкурса, в результате которого определены 12 ведущих университетов России, которым присвоена категория «Национальный исследовательский университет». Министерством образования и науки Российской Федерации была утверждена программа его развития на 2009–2018 годы. В 2011 году Университет получил наименование «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Кафедра высшей математики (ВМ) была организована в 1931 году. Первым заведующим кафедрой был профессор Г.Д. Гродский. С конца 1936 года кафедрой ВМ заведовал профессор И.П. Натансон, известный специалист по теории функций действительной переменной. В 1944 году заведующим кафедрой ВМ становится профессор В.А. Тартаковский (1901-1973), замечательный математик и педагог. Владимир Абрамович Тартаковский является одним из крупнейших советских алгебраистов. Им получены пользующиеся мировой известностью результаты по проблеме тождества в теории бесконечных групп. Известность получили также его работы по использованию теоретико-числовых методов в теории изгибания поверхностей, теории диофантовых уравнений.

Обладая исключительной энергией, В.А. Тартаковский уделял много внимания научной и общественной работе. Ещё в тридцатые годы он в составе комиссии Наркомпроса участвовал в разработке программы по математике для средней школы. В течение долгого времени был членом президиума учебно-методического совета при Министерстве высшего и среднего специального образования СССР, входил в комиссию по реформе математического образования в стране. Был одним из инициаторов проведения среди школьников Ленинграда первой математической олимпиады. В.А. Тартаковский участвовал в организации Ленинградского отделения математического института им. В.А. Стеклова и был первым его директором.

В разное время на кафедре ВМ преподавали академик В.И. Смирнов, член-корреспонпент АН АН СССР Д.К. Фаддеев, проф. И.С. Соминский, проф. Ф.И. Харшиладзе, проф. А.Ф. Андреев, проф. Ю.В. Аленицын, проф. И.А. Молотков. В 1979 году кафедру возглавил доктор технических наук, профессор В.Г. Дегтярёв, специалист по теории устойчивости и теории движения космических аппаратов. С 1997 года кафедрой руководит доктор физикоматематических наук, профессор И.Ю. Попов, в область научных интересов которого входят теория рассеяния, теория операторов, моделирование сложных физических систем.

Кафедра ВМ осуществляет обучение студентов всех специальностей университета по дисциплине “Высшая математика” и читает ряд специальных дисциплин математического цикла. Кафедра ведет подготовку бакалавров и магистров по направлению “Прикладная математика и информатика”. Кафедра ВМ является самой большой кафедрой в университете по числу преподавателей. Среди её сотрудников 7 докторов и 19 кандидатов наук. Преподаватели кафедры активно участвуют как в фундаментальных исследованиях по математике и теоретической физике, так и в прикладных научно-технических исследованиях, принимают активное участие в работе российских и международных научных конференций, выступают с докладами и преподают за рубежом. За последние 5 лет сотрудниками кафедры опубликовано более 300 работ в отечественных и зарубежных научных изданиях. Областью научных интересов профессора А.Г.Петрашеня является теория взаимодействия излучения с веществом, оптика и спектроскопия. Профессор В.П. Смирнов – специалист по теории твёрдого тела и применению теории групп в квантовой механике. Профессор Жук В.В. – один из ведущих в мире ученых в области дифференциальных уравнений. Профессор В.Ю. Тертычный занимается теорией оптимального управления механическими системами. Профессор Уздин В.М. является известным специалистом в физике магнитных наносистем. Профессор Мирошниченко Г.П. активно занимается изучением взаимодействия излучения с веществом.

Судавная Ольга Илларьевна, Фролов Валентин Михайлович

Типовой расчет по математике
Кратные и криволинейные интегралы. Теория поля
5 модуль
Учебно-методическое пособие

В авторской редакции
Редакционно-издательский отдел НИУ ИТМО
Зав. РИО Н.Ф. Гусарова
Лицензия ИД № 00408 от 05.11.99
Подписано к печати
Заказ №
Тираж 1000
Отпечатано на ризографе

Редакционно-издательский отдел
Санкт-Петербургского национального
исследовательского университета
информационных технологий, механики и оптики
197101, Санкт-Петербург, Кронверкский пр., 49