Часть первая. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

1. Электрические цепи постоянного тока

1.1. Электрическая цепь.

Электрическая цепь представляет собой совокупность технических устройств и физических объектов, по которым протекает *электрический ток*, т.е. происходит упорядоченное направленное движение электрических зарядов.

Для того чтобы заряды перемещались им необходимо передать некоторую энергию и устройство, выполняющее эту функцию, называется *источником электрической энергии*. Источник электрической энергии является составным элементом электрической цепи. Энергия, передаваемая источником движущимся зарядам, может быть получена только путём преобразования других видов энергии (тепловой, химической, механической, световой) или путём воздействия на электрические заряды магнитным полем, возбуждаемым другим источником.

Создаваемый источником электрический ток может вызывать различные явления: нагревать элементы, по которым он протекает, вызывать свечение веществ, создавать механические усилия. Технические устройства, в которых получают требуемый эффект от протекания электрического тока называют *приёмниками электрической энергии*, т.к. в них происходит преобразование электрической энергии в другие виды.

Совместная работа источника и приёмника возможна только при наличии путей движения зарядов между ними. Причём, перемещение зарядов должно происходить с минимальными потерями энергии. Эту функцию в электрических цепях выполняют соединительные линии или провода.

Таким образом, электрическая цепь в общем случае состоит из трёх элементов: источника электрической энергии, приёмника и соединительных проводов.

Состав и связи электрических цепей бесконечно разнообразны, поэтому для их представления используют наборы символов, имеющих различную степень абстракции и называемых схемами. Более всего соответствует реальному объекту (рис. 1.1, *а*) *монтажная схема* (рис. 1.1, *б*). Она удобна для монтажа и ремонта изображённого на ней устройства. На *принципиальной схеме* (рис. 1.1, *в*) показывают условные изображения элементов цепи и их соединения. Эти схемы удобны для изучения принципа работы. Наиболее абстрактное представление об электрической цепи дают *схемы замещения* (рис. 1.1, *г*). Они предназначены для исследования электромагнитных процессов и являются расчётной моделью соответствующего устройства. Реальные элементы электрической цепи заменяют в схеме замещения расчётными моделями, в которых учитывают только существенные параметры и свойства. Так химический источник (аккумулятор) заменяют идеальным источником ЭДС E и включают последовательно с ним резистор r, соответствующий потерям

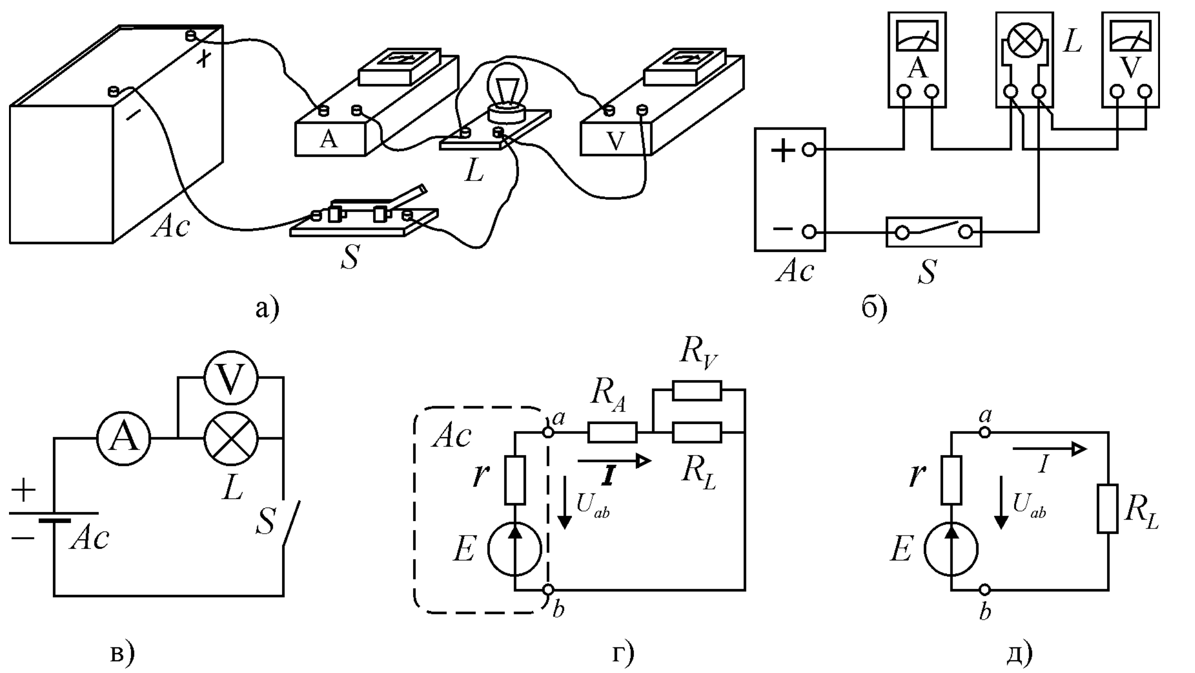


Рис. 1.1.

энергии внутри аккумулятора. Амперметр и вольтметр заменяют их входными сопротивлениями (R_A и R_V) Соединительные провода считаются идеальными проводниками без потерь, т.е. обладающими нулевым сопротивлением. Если входное сопротивление амперметра R_A существенно меньше сопротивления лампы накаливания R_L, а входное сопротивление вольтметра R_V существенно больше, то их исключают из схемы замещения (рис. 1.1, *д*).

Если параметры всех элементов схемы замещения известны, то, пользуясь законами электротехники, можно определить их состояние в любой момент времени. В дальнейшем вместо термина схема замещения электрической цепи мы будем пользоваться сокращёнными терминами – схема цепи или просто схема.

В любой схеме электрической цепи можно выделить один или несколько участков, подключённых к остальной части двумя проводами. Такой участок электрической цепи называется *двухполюсником*. В простейшем случае двухполюсник состоит из одного элемента цепи, например, лампа накаливания, вольтметр и амперметр на рис. 1.1 являются двухполюсниками. Если двухполюсник не содержит источников электрической энергии, то он называется *пассивным*, в противном случае двухполюсник относится к *активным* двухполюсникам. Двухполюсник на рис. 1.1, *г-д*, состоящий из источника ЭДС *E* и внутреннего сопротивления *r* аккумулятора и подключённый к точкам *ab* схемы замещения, является активным двухполюсником

При анализе процессов в электрических цепях используют некоторые топологические (геометрические) понятия. К ним относятся понятия узла, ветви и контура. *Узлом* электрической цепи называют соединение трёх и более элементов (например, точка *ef* рис. 1.2, *а-б* и точки *a*, *d*, *ec* рис. 1.2, *в-г*. Но в электрической цепи все токи протекают по соединительным проводам. При этом количество зарядов входящих в любую замкнутую поверхность в каждый момент времени (в том числе в поверхность, которой можно охватить узел) равно числу зарядов выходящих из неё. Отсюда следует, что токи в двух соединённых между собой элементах могут различаться только в том случае, если это соединение является узлом, иначе говоря, отсутствие узлов между связанными элементами электрической цепи является необходимым и достаточным условием равенства тока в них. *Ветвью* электрической цепи называют связную совокупность элементов, образующих путь для протекания тока между двумя узлами (например, R_1R_2, E, R_3, R_4 и R_5 на рис 1.2, *в-г*. Из признака отсутствия узлов внутри ветви следует, что по всем её элементам протекает одинаковый ток. *Контуром* называется замкнутый путь вдоль ветвей электрической цепи (например, *ebae*, *eade*, *dcd*, *adcba* на рис 1.2, *в-г*. Узлы, ветви и контуры являются топологическими параметрами цепи и не изменяются при любых преобразованиях схемы, производимых без разрыва связей. Пример такого преобразования показан на рис. 1.2, *в-г*.

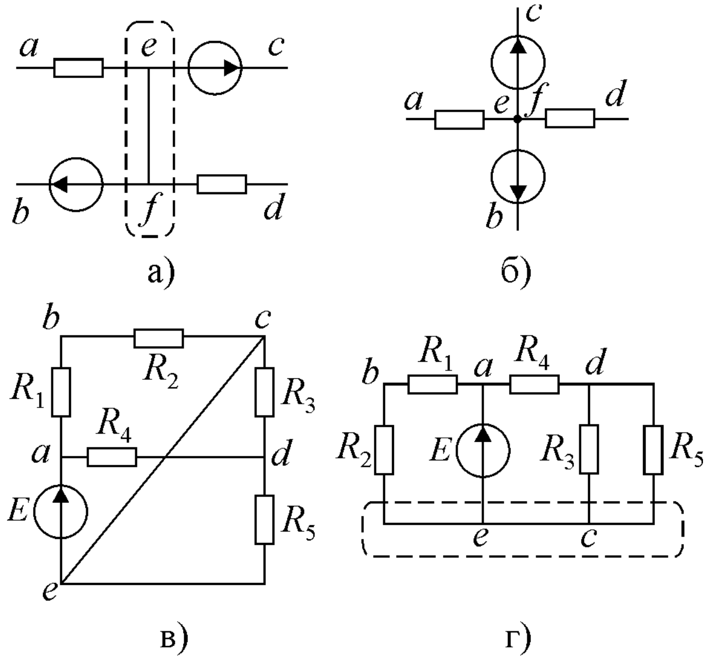


Рис. 1.2.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое электрическая цепь?
2. Что такое источник (приёмник) электрической энергии?
3. Какие виды схем используются в электротехнике? Что такое монтажная схема, принципиальная схема и схема замещения?
4. Что такое двухполюсник?
5. Чем отличается пассивный двухполюсник от активного?
6. Дайте определение узла, ветви и контура?
7. Почему во всех элементах ветви протекает одинаковый ток?

1.2. Основные величины, характеризующие электрическую цепь

Электрический ток это направленное движение носителей электрического заряда. Носителями заряда в металлах являются электроны, в плазме и электролите – ионы. В полупроводниках носителями заряда являются также дефекты электронных оболочек ядер кристаллической решётки – «дырки». Функционально они эквивалентны положительным зарядам.

Наличие электрического тока проявляется в виде трёх эффектов:

- в окружающей среде возникает магнитное поле;
- проводник, по которому протекает ток, нагревается;
- в проводниках с ионной проводимостью возникает перенос вещества.

Величина электрического тока определяется как количество заряда q, переносимое через какую-либо поверхность в единицу времени, т.е.

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (1.1)$$

Такой поверхностью, в частности, может быть поперечное сечение проводника.

Если количество заряда q переносимого за одинаковые промежутки времени неизменно, то такой ток называется *постоянным* и для него справедливо выражение $I = q/t$, где q – заряд, переносимый за время t.

Из выражения (1.1) получается единица измерения электрического тока $[I] = [q]/[t] =$Кл/с=А [ампер].

Направлением тока принято считать направление движения положительных зарядов под действием электрического поля, т.е. направление противоположное движению электронов в проводниках. Если такое направление неизвестно, то для любой ветви электрической цепи его можно выбрать произвольно и считать *положительным направлением*. После расчёта режима работы цепи некоторые значения тока могут получиться отрицательными. Это означает, что действительное направление тока противоположно выбранному.

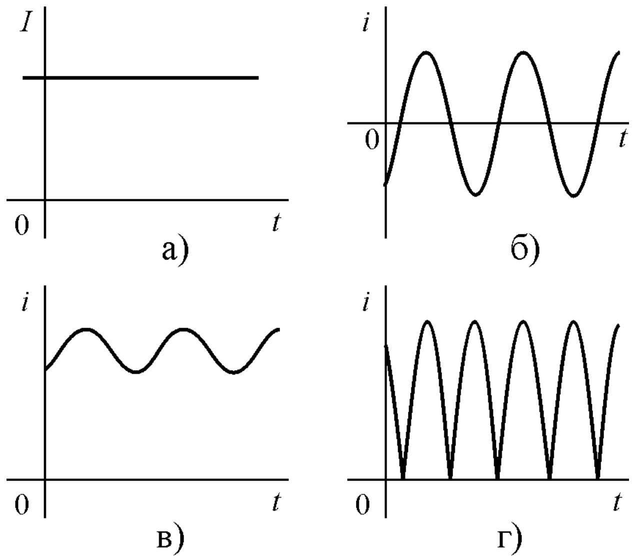


Рис. 1.3

По характеру изменения во времени электрический ток разделяют на постоянный (рис. 1.3, *а*) и переменный. Последний, в свою очередь, бывает синусоидальным (рис. 1.3, *б*) и несинусоидальным (рис. 1.3, *в-г*).

Электродвижущая сила. Движение носителей зарядов в электрической цепи, как всякое движение требует передачи энергии движущимся объектам. Если на некотором участке цепи заряжённые частицы получают энергию, то принято говорить, что на этом участке действует сила, приводящая их в движение, т.е. электродвижущая сила (ЭДС). Участок цепи, на котором действует ЭДС, является источником электрической энергии (энергии движущихся носителей электрических зарядов). Источником энергии для получения ЭДС могут быть различные физические явления, при которых возникает воздействие на заряжённые частицы – химические, тепловые, электромагнитные и др. процессы. Численно ЭДС равна работе по перемещению единичного заряда на участке её действия. Отсюда единицу ЭДС можно получить как $[E]=[A]/[q]=$ Дж/Кл=В (вольт).

Электрическое напряжение. На участках электрической цепи, где отсутствует ЭДС, движение носителей зарядов сопровождается расходом полученной ранее энергии путём преобразования её в другие виды. Этот процесс можно охарактеризовать падением напряжения или просто напряжением U. Оно численно равно работе, затраченной на перемещение заряжённых частиц по участку электрической цепи, к величине перемещённого заряда

$$U = A/q$$

В случае движения зарядов в безвихревом электрическом поле это определение идентично понятию разности потенциалов участка электрической цепи, т.е. $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$, где φ_a, φ_b – потенциалы границ участка. Следует заметить, что потенциал отдельной точки определить невозможно, т.к. он равен работе по перемещению единичного заряда из бесконечности в данную точку. Однако разность потенциалов между двумя точками всегда можно определить, если потенциал одной из них принять за точку отсчёта, т.е. нуль.

Единица измерения напряжения и разности потенциалов такая же, как и ЭДС: $[U]=[A]/[q]=$ Дж/Кл=В (вольт).

За положительное направление напряжения на участке цепи принимают направление от точки с большим потенциалом к точке с меньшим, а т.к. на участках где отсутствует ЭДС положительные заряды также перемещаются от точки с более высоким потенциалом к точке с более низким, то положительное направление напряжения на этих участках совпадает с положительным направлением протекающего тока. За положительное направление ЭДС принимают направление от точки с меньшим потенциалом к точке с большим. Это направление указывают стрелкой в условном изображении источника на схеме (рис. 1.1, 1.2).

Электрическая энергия и мощность. Из понятия ЭДС следует, что она является работой, совершаемой при перемещении единичного заряда между полюсами источника электрической энергии. Для перемещения всех зарядов, проходящих через источник, требуется совершить работу в q раз большую, т.е. затратить энергию

$$W_{\text{и}} = Eq = EIt$$

В приёмнике электрической энергии или в нагрузке энергия преобразуется или рассеивается. Её также можно определить, пользуясь понятием напряжения на участке электрической цепи, как работы по перемещению единичного заряда. Отсюда энергия, преобразуемая в нагрузке –

$$W_{\text{н}} = Uq = UIt\,.$$

Интенсивность преобразования энергии характеризуется понятием *мощности*. Численно она равна энергии, преобразуемой в электрической цепи в единицу времени. Для цепи постоянного тока мощность источника равна

$$P_\text{и} = W_\text{и} / t = EI \qquad (1.2\ \text{а})$$

а нагрузки –

$$P_\text{н} = W_\text{н} / t = UI\,. \qquad (1.2\ \text{б})$$

Единицами измерения энергии и мощности электрической цепи являются джоуль (Дж) и ватт (Вт).

На основании закона сохранения энергии мощность, развиваемая источниками электрической энергии в цепи должна быть равна мощности преобразуемой в другие виды энергии в нагрузке:

$$\sum \pm EI = \sum UI\,, \qquad (1.3)$$

где $\sum \pm EI$ – алгебраическая сумма мощностей, развиваемых источниками, а $\sum UI$ – сумма мощностей всех приёмников и потерь энергии внутри источников.

Выражение (1.3) называется *балансом мощности* электрической цепи. Мощность, преобразуемая в нагрузке, всегда положительна, в то время как источники могут работать как в режиме генерирования так и в режиме рассеяния электрической энергии, т.е. быть нагрузкой для внешней электрической цепи. Режим работы источника определяется взаимной направленностью ЭДС и тока, протекающего через источник. Если направление действия ЭДС и направление тока в источнике совпадают, то источник отдаёт энергию в цепь и соответствующее произведение в левой части (1.3) положительно. Если же направление тока противоположно, то источник является нагрузкой и его мощность включают в баланс с отрицательным знаком. Следует заметить, что при составлении баланса мощности должно учитываться реальное направление тока в источнике, т.е. направление, полученное в результате расчёта электрической цепи, а не условно положительное направление, принимаемое в начале решения.

Вопросы для самоконтроля.

1. По каким признакам можно определить наличие тока в электрической цепи?
2. Что такое постоянный электрический ток?
3. Что такое электродвижущая сила?
4. Почему невозможно определить электрический потенциал какой-либо одной точки электрической цепи?
5. Какое направление принято считать положительным для электрического тока (напряжения)?
6. Что такое баланс мощности электрической цепи?

1.3. Пассивные элементы электрической цепи

Пассивными называют элементы электрической цепи не способные производить электрическую энергию. К ним относятся: резистор, катушка индуктивности и конденсатор.

Для перемещения зарядов в электрической цепи требуется совершение работы, величина которой определяется свойствами среды, в которой движутся заряды, преодолевая её противодействие. Энергия, затрачиваемая на преодоление этого противодействия, необратимо преобразуется в тепло. Величиной, характеризующей затраты энергии на перемещение зарядов по данному участку цепи, является *электрическое сопротивление* или просто сопротивление. Оно равно отношению величины напряжения на участке цепи к току в нём

$$R = u / i. \qquad (1.4)$$

Выражение (1.4) является одной из форм записи закона Джоуля-Ленца. Если в электрической цепи с сопротивлением R протекает ток i, то за время dt в ней выделяется количество тепла $dQ = i^2 R dt$. При этом в тепло преобразуется элементарная энергия dA, затрачиваемая на перемещение заряда dq, т.е. $dA = dQ$. Отсюда $dA = dQ = i\frac{dq}{dt}Rdt = idqR \;\Rightarrow\; dA/dq = u = iR$.

Единицей измерения сопротивления является $[R]=[u]/[i]=$В/А=Ом (ом). Величина обратная сопротивлению называется *проводимостью* G=1/R и измеряется в сименсах (См).

Электрическое сопротивление является основным параметром элемента электрической цепи, используемого для ограничения тока и называемого *резистором*. Идеализированный резистор обладает только этим параметром и называется *резистивным элементом*.

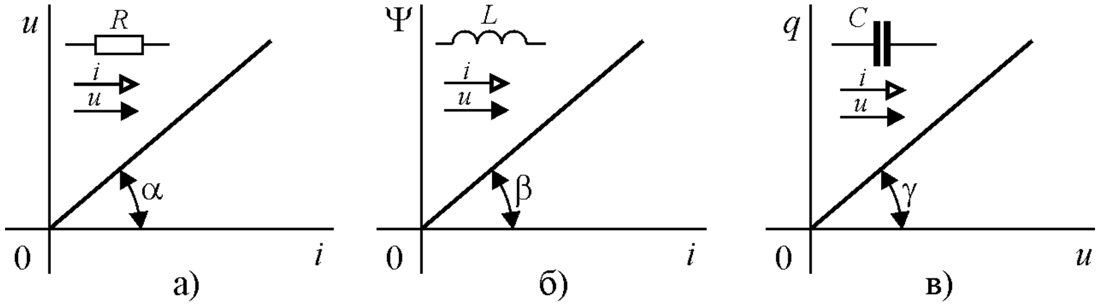


Рис. 1.4.

Величина сопротивления резистора зависит от свойств материала, из которого он изготовлен, а также от его геометрических размеров. Но может зависеть также от величины и/или направления протекающего по нему тока. Если зависимости от тока нет, то вольт-амперная характеристика (ВАХ) резистора представляет собой прямую линию (рис. 1.4, *а*) и он является линейным элементом электрической цепи. При этом из уравнения вольт-амперной характеристики (1.4) следует, что сопротивление можно определить как тангенс угла наклона ВАХ (рис. 1.4, а)

$$R = \frac{u}{i} = \frac{m_u}{m_i} \text{tg}\alpha,$$

где m_u, m_i – масштабы осей напряжения и тока ВАХ.

Пользуясь выражениями (1.2 *б*) и (1.4) можно определить мощность рассеяния электрической энергии резистором

$$P = u \cdot i = i^2 R = u^2 / R. \quad (1.5)$$

Протекание тока в электрической цепи сопровождается возникновением магнитного поля в окружающей среде. Магнитному полю присуща энергия, равная работе, совершаемой электрическим током i в процессе создания поля и численно равная $W_м = L \cdot i^2 / 2$. Коэффициент L, определяющий энергию магнитного поля называется индуктивностью.

Величина индуктивности участка электрической цепи зависит от магнитных свойств окружающей среды, а также от формы и геометрических размеров проводников, по которым протекает ток, возбуждающий магнитное поле. Чем больше величина магнитного потока, сцепляющегося с контуром (пронизывающего контур) участка электрической цепи, тем больше, при прочих равных условиях, величина его индуктивности. Сумма сцепляющихся с контуром цепи элементарных магнитных потоков Φ_k называется потокосцеплением – $\Psi = \sum_{k=1}^{w} \Phi_k$. Для увеличения потокосцепления проводнику придают форму цилиндрической катушки. Тогда с каждым витком сцепляется практически один и тот же магнитный поток Ф и потокосцепление становится равным $\Psi = w \cdot \Phi$, где w – число витков катушки. Такая катушка предназначена для формирования магнитного поля с заданными свойствами и называется *катушкой индуктивности*. Идеализированная катушка, основным и единственным параметром которой является индуктивность, называется *индуктивным элементом*.

Индуктивность численно равна отношению величины потокосцепления участка цепи к величине протекающего по нему тока

$$L = \Psi / i. \quad (1.6)$$

Единицей измерения индуктивности является $[L] = [\Psi]/[i] =$ Вб/А=Гн (генри).

Связь потокосцепления с током индуктивного элемента называется вебер-амперной характеристикой (ВбАХ). В случае линейной зависимости между этими величинами индуктивный элемент будет линейным и индуктивность может быть определена как тангенс угла наклона ВбАХ (рис. 1.4 *б*)

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{m_\Psi}{m_i} \text{tg}\beta,$$

где m_Ψ, m_i – масштабы осей потокосцепления и тока ВбАХ.

Изменение потокосцепления катушки вызывает появление ЭДС самоиндукции

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{di}{dt}. \tag{1.7}$$

Знак минус в выражении (1.7) показывает, что ЭДС, в соответствии с правилом Ленца, действует встречно по отношению к вызвавшему её изменению тока. Для того чтобы в катушке протекал ток, ЭДС самоиндукции должна уравновешиваться равным и встречно направленным напряжением

$$u_L = -e_L = L\frac{di}{dt}$$

Отсюда можно определить ток в индуктивном элементе

$$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt + i(0),$$

где $i(0)$ – ток на момент начала интегрирования.

Электрические заряды в цепи могут не только перемещаться по её элементам, но также накапливаться в них, создавая запас энергии $W_э = C \cdot u^2/2$, где u – напряжение на элементе электрической цепи, а C – коэффициент, определяющий запас энергии и называемый *электрической ёмкостью* или просто ёмкостью.

Величина ёмкости участка электрической цепи зависит от электрических свойств окружающей среды, а также от формы и геометрических размеров проводников, в которых накапливаются заряды. Исторически первые накопители представляли собой плоские проводники, разделённые тонкой прослойкой изоляционного материала. Чем больше площадь проводников и чем меньше толщина изолирующей прослойки, тем больше, при прочих равных условиях, величина их ёмкости. Такая совокупность проводников, предназначенных для накопления энергии электрического поля, называется *конденсатором*. Идеализированный конденсатор, основным и единственным параметром которого является ёмкость, называется *ёмкостным элементом*.

Ёмкость численно равна отношению величины электрического заряда на участке электрической цепи к величине напряжения на нём

$$C = q/u. \tag{1.8}$$

Единицей измерения ёмкости является $[C]=[q]/[u]=$Кл/В=Ф (фарада).

Связь заряда с напряжением на ёмкостном элементе называется кулон-вольтной характеристикой (КВХ). В случае линейной зависимости между этими величинами ёмкостный элемент будет линейным и ёмкость может быть определена как тангенс угла наклона КВХ (рис. 1.4 *в*)

$$C = \frac{q}{u} = \frac{m_q}{m_u}\,\mathrm{tg}\gamma\,,$$

где m_q, m_u – масштабы осей заряда и напряжения КВХ.

Изменение напряжения на конденсаторе вызывает изменение количества зарядов на электродах, т.е. электрический ток. Это следует из уравнения (1.8). Если взять производную по времени от числителя и знаменателя, считая, что $C = \mathrm{const}$, то

$$\frac{dq}{dt} = i = C\frac{du}{dt}. \tag{1.9}$$

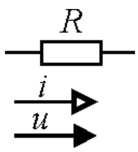
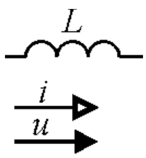
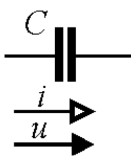
Отсюда можно определить напряжение на ёмкостном элементе

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u(0)\,, \tag{1.10}$$

где $u(0)$ – напряжение на момент начала интегрирования.

Таблица 1.1

Пассивные элементы электрической цепи

Название идеального элемента цепи	Параметр элемента	Условное обозначение	Величина тока	Величина напряжения
Резистивный	Сопротивление R [Ом]		$i = u / R$	$u = R \cdot i$
Индуктивный	Индуктивность L [Гн]		$i = \frac{1}{L}\int_0^t u\,dt + i(0)$	$u = L\frac{di}{dt}$
Ёмкостный	Ёмкость C [Ф]		$i = C\frac{du}{dt}$	$u = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt + u(0)$

Таким образом, из выражений (1.1-1.10) следует, что электромагнитные процессы в электрической цепи полностью описываются понятиями электродвижущей силы, напряжения и тока, а количественные соотношения между этими величинами определяются тремя параметрами элементов: сопротивлением, индуктивностью и ёмкостью. При этом следует отметить, что все рассмотренные элементы электрической цепи (резистор, катушка индуктивности и конденсатор) обладают всем набором параметров (*R*, *L* и *C*), т.к. в любом физическом объекте при протекании электрического тока происходит необратимое преобразование энергии с выделением тепла, возникают процессы, связанные с накоплением и перераспределением электрических зарядов, а в окружающей среде создаётся магнитное поле. Однако при определённых условиях то или иное свойство объекта проявляется сильнее и, соответственно, большее значение имеет параметр, связанный с этим свойством, в то время как остальными свойствами и соответствующими параметрами можно просто пренебречь.

Из трёх рассмотренных элементов цепи только резистивный элемент связан с необратимым преобразованием электрической энергии. Индуктивный и ёмкостный элементы соответствуют процессам накопления энергии в магнитном и электрическом полях с последующим возвратом её в источник в том же количестве, в котором она была накоплена.

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение резистора, катушки индуктивности и конденсатора.
2. Какие параметры являются основными для резистора, катушки индуктивности и конденсатора?
3. Что такое сопротивление, индуктивность и ёмкость?
4. Чем определяется величина сопротивления, индуктивности и ёмкости?
5. Чем отличается резистор от остальных пассивных элементов?
6. Какими величинами и параметрами полностью описываются электромагнитные процессы в электрической цепи?

1.4. Активные элементы электрической цепи

Активными элементами электрической цепи являются источники электрической энергии. Свойства источников, как элементов электрической цепи характеризуются вольт-амперной характеристикой, называемой в этом случае *внешней характеристикой* источника. Внешняя характеристика это зависимость выходного напряжения источника от тока, отдаваемого нагрузке. Также как все остальные элементы электрической цепи, источники могут быть линейными и нелинейными. Линейные источники обладают линейной внешней характеристикой.

Если напряжение на выходе источника постоянно и не зависит от тока в нагрузке, то такой источник называется *источником ЭДС* или источником напряжения. Его внешняя характеристика представляет собой горизонтальную линию (линия 1 на рис. 1.5, *д*), а т.к. тангенс угла наклона ВАХ соответствует сопротивлению элемента электрической цепи, то это означает, что сопротивление источника ЭДС равно нулю. На схемах он изображается окружностью со стрелкой, указывающей направление действия ЭДС, т.е. направление возрастания электрического потенциала (рис. 1.5, *а*).

Можно создать также источник электрической энергии, формирующий в нагрузке неизменный ток. Внешняя характеристика такого источника будет вертикальной прямой линией (линия 2 на рис. 1.5, *д*), а сам источник будет называться *источником тока*. В соответствии с внешней характеристикой сопротивление двухполюсника, обладающего свойствами источника тока, будет равно бесконечности. На электрических схемах источник тока изображается окружностью с двойной стрелкой внутри, направление которой указывает направление протекания тока (рис. 1.5, *в*).

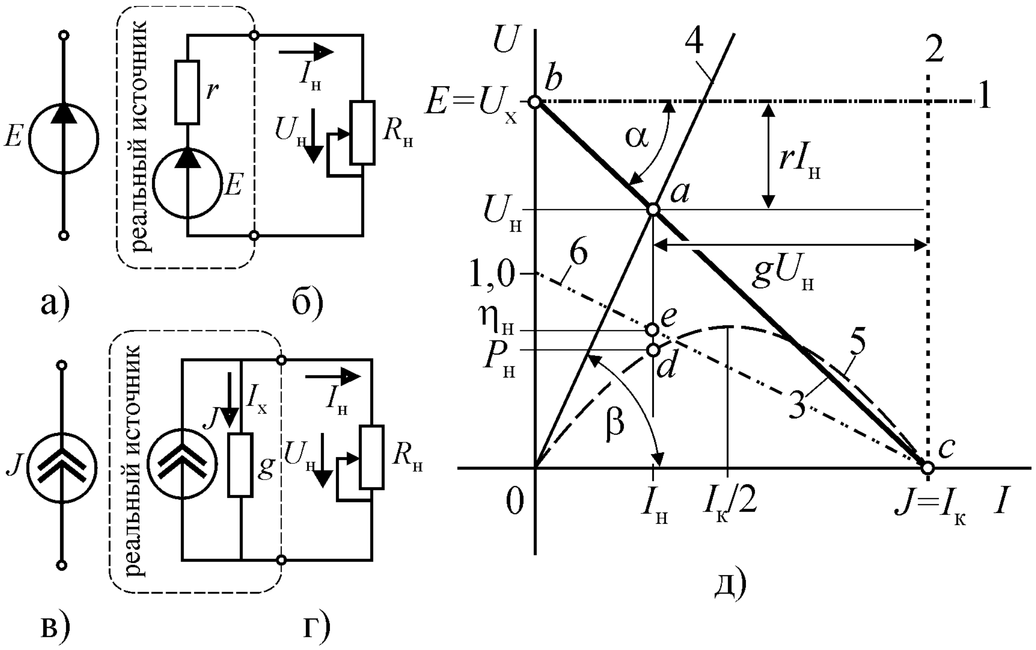


Рис. 1.5

Источники ЭДС и тока называются *идеальными источниками электрической энергии*. Это связано с тем, что в них нет потерь энергии, т.к. их проводимость и сопротивление бесконечны ($I^2 \cdot 0 = 0;\ U^2/\infty = 0$). На самом деле не существует технических устройств, в которых в той или иной форме не происходили бы необратимые преобразования энергии. Однако эти потери можно компенсировать за счёт источников энергии внешних по отношению к рассматриваемой электрической цепи и тогда реальное техническое устройство будет обладать свойствами идеального источника по отношению к нагрузке. Простейшим примером такого устройства является стабилизированный источник питания, в котором с помощью внутренней обратной связи обеспечивается компенсация потерь внутри источника за счёт энергии питающей сети. Тем самым обеспечивается постоянство выходного напряжения до определенного значения тока нагрузки, после чего он переключается в режим работы с постоянным током, реализуя в этих двух режимах работы оба идеальных источника.

Если потери электрической энергии внутри источника не компенсируются, то он имеет наклонную внешнюю характеристику (линия 3 на рис. 1.5, *д*). Такие источники часто называют *реальными источниками*. Их схему замещения можно представить в виде источника ЭДС и последовательно включённого внутреннего сопротивления *r* (рис. 1.5, *б*). Уравнение внешней характеристики в этом случае имеет вид

$$U_н = E - rI_н. \tag{1.11}$$

Решая его совместно с уравнением нагрузки $U_н = R_н I_н$, мы получим значение тока в цепи

$$I_н = E/(r + R_н). \tag{1.12}$$

Графически это решение соответствует точке *a* пересечения внешней характеристики источника (линия 3 на рис. 1.5, *д*) с вольтамперной характеристикой нагрузки (линия 4 на рис. 1.5, *д*). При изменении сопротивления нагрузки будет меняться угол β ВАХ и точка *a* будет скользить по внешней характеристике, определяя режим работы электрической цепи.

При $R_н = \infty$ ток в цепи равен нулю (рабочая точка *b* на рис. 1.5 *д*) и этот режим работы называется *холостым ходом*. Из выражения (1.11) следует, что в режиме холостого хода напряжение на выводах источника $U_х$ равно его ЭДС *E*, что позволяет произвести её измерение вольтметром с большим входным сопротивлением.

При $R_н = 0$ напряжение на выводах источника равно нулю (рабочая точка *c* на рис. 1.5 *д*) и этот режим работы цепи называется *коротким замыканием*. В режиме короткого замыкания ток в цепи $I_к = E/r$ ограничивается только внутренним сопротивлением источника *r*, что крайне опасно, т.к. обычно это сопротивление имеет очень малую величину и ток в цепи может достигать значений, при которых источник может выйти из строя.

На всём остальном множестве точек внешней характеристики источника выделяют два режима работы цепи: номинальный и согласованный. *Номинальный режим* работы это режим, при котором элементы электрической цепи работают в условиях соответствующих проектным. Для элементов электрических цепей номинальными параметрами, обеспечивающими номинальный режим работы, являются ток, напряжение и мощность.

Согласованный режим работы цепи это режим, при котором источник отдает в нагрузку максимально возможную мощность. Из выражений (1.5) и (1.12) можно найти мощность, рассеиваемую на сопротивлении нагрузки

$$P_н = R_н I_н^2 = R_н \frac{E^2}{\left(r + R_н\right)^2} = EI_н(1 - I_н / I_к).$$

Очевидно, что эта функция (линия 5 на рис. 1.5, *д*) имеет максимум, т.к. она обращается в нуль при $R_н = 0 \Leftrightarrow I_н = I_к$ и $R_н = \infty \Leftrightarrow I_н = 0$. Взяв производную $dP/dR_н$ и приравнивая её нулю, найдём значение сопротивления нагрузки, соответствующее максимуму мощности. Это условие имеет вид $R_н = r$, что соответствует току $I_н = I_к/2$. Ток нагрузки, равный половине тока короткого замыкания источника в силовых электрических цепях недопустим. Кроме того, КПД электрической цепи, как отношение мощности рассеиваемой в нагрузке, к мощности, рассеиваемой во всей цепи –

$$\eta = \frac{P_\text{н}}{P_r + P_\text{н}} = \frac{R_\text{н}}{r + R_\text{н}} = \frac{1}{1 + r/R_\text{н}} = 1 - I_\text{н}/I_\text{к} = \begin{cases} \xrightarrow{R_\text{н}\to 0;\ I_\text{н}\to I_\text{к}} 0 \\ 0,5\big|_{r=R_\text{н}} \\ \xrightarrow{R_\text{н}\to\infty;\ I_\text{н}\to 0} 1,0 \end{cases},$$

в согласованном режиме составляет 0,5. Столь низкий КПД также недопустим для силовых электрических цепей. Для его повышения в них стремятся обеспечить условие $r \ll R_\text{н}$ и работают в режиме левее точки максимума (точки d и e на рис. 1.5, *д*). В то же время, в маломощных устройствах (например, в радиоэлектронных) согласованный режим работы является основным, т.к. обеспечивает в приёмнике сигнал максимальной мощности.

В некоторых случаях оказывается удобным представить реальный источник электрической энергии параллельной схемой замещения с источником тока (рис. 1.5, *г*). Такая возможность следует из уравнения (1.11), если обе его части разделить на величину внутреннего сопротивления r. Тогда

$$\begin{gathered} U_\text{н}/r = E/r - I_\text{н} \\ \Downarrow \\ I_\text{х} = I_\text{к} - I_\text{н} = J - I_\text{н} \end{gathered} \tag{1.13}$$

где $I_\text{х} = U/r = Ug$ – ток холостого хода источника с внутренней проводимостью $g = 1/r$; $J = E/r = I_\text{к}$ ток источника J равный току короткого замыкания источника с последовательной схемой. Сопоставляя уравнения (1.11) и (1.13), получим соотношения параметров последовательной и параллельной схем замещения

$$\begin{aligned} J &= E/r; \quad g = 1/r; \\ E &= J/g; \quad r = 1/g \end{aligned} \tag{1.14}$$

Обе схемы по отношению к нагрузке полностью эквивалентны, т.к. эквивалентны их внешние характеристики. Однако сами источники реализованные по этим схемам будут работать по-разному в одинаковых режимах работы нагрузки. В режиме холостого хода в источнике с последовательной схемой рассеяние мощности будет равно нулю, а в источнике с параллельной – J^2/g, т.е. этот режим для него будет аварийным, т.к. вся мощность источника J будет рассеиваться на внутренней проводимости (сопротивлении). В режиме короткого замыкания в источнике с параллельной схемой замещения рассеяния мощности не будет, а источник с последовательной схемой будет работать в аварийном режиме, рассеивая на внутреннем сопротивлении мощность E^2/r. Единственным режимом работы цепи, в котором обеспечивается эквивалентность преобразования схемы замещения по отношению к источнику, является согласованный режим.

С практической точки зрения имеет большое значение задача определения внутренних параметров источника E и r. Их можно определить по данным измерений напряжения и тока в режимах холостого хода и короткого замыкания, но, как уже упоминалось выше, режим короткого замыкания представляет опасность для источников с малым внутренним сопротивлением, а режим холостого хода для источников с большим внутренним сопротивлением. Поэтому эти параметры можно определить, измерив ток и напряжение в нагрузке в двух произвольных режимах – I_1, U_1, I_2, U_2, а затем из уравнения (1.11) найти

$$r = \left|\frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1}\right|; \quad E = U_1 + I_1 r = U_2 + I_2 r. \qquad (1.14\text{ а})$$

Выражения (1.14) упрощаются, если одним из режимов будет холостой ход ($I_1 = 0;\ U_1 = U_\text{х} = E$) или короткое замыкание ($U_1 = 0;\ I_1 = I_\text{к}$) –

$$r = \frac{U}{I_\text{к} - I}; \quad E = U + Ir; \quad r = \frac{U_\text{х} - U}{I}; \quad E = U_\text{х} \quad . \qquad (1.14\text{ б})$$

Вопросы для самоконтроля.

1. Что такое внешняя характеристика источника электрической энергии?
2. Чем отличаются внешние характеристики источников ЭДС, тока и реального источника электрической энергии?
3. Почему источники ЭДС и тока называются идеальными?
4. Можно ли технически реализовать источники ЭДС и тока?
5. Перечислите типовые режимы электрической цепи.
6. Что такое согласованный режим, и в каких устройствах он применяется?
7. Почему согласованный режим не используют в силовых цепях?
8. Какие режимы и почему опасны для источников с высоким и низким внутренним сопротивлением?

1.5. Основные законы электрических цепей постоянного тока

Основой для расчёта режима работы любой электрической цепи являются законы Ома и Кирхгофа. С их помощью, зная параметры элементов электрической цепи можно определить протекающие в ней токи и действующие напряжения. Можно также решить обратную задачу определения параметров цепи, обеспечивающих требуемые токи и напряжения.

Закон Ома устанавливает связь между током и напряжением на участках цепи.

Для любого участка цепи, не содержащего активных элементов справедливо соотношение

$$I = U / R \qquad (1.15)$$

Закон Ома можно записать и для участков цепи, содержащих источник ЭДС (рис. 1.6). В этом случае его называют *обобщённым законом Ома*. Пусть ток на участке *ac* протекает от точки *a* к точке *c*. Это означает, что потенциал φ_a выше, чем φ_c и напряжение $U_{ac} = \varphi_a - \varphi_c > 0$, т.е. положительное направление U_{ac} совпадает с направлением тока. Прибавим и вычтем из U_{ac} потенциал точки *b*. Тогда $U_{ac} = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c = U_{ab} + U_{bc}$. Напряжение на резисторе участка *ab* всегда совпадает с направлением тока и равно $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = RI$, а напряжение на выводах источника ЭДС всегда противоположно *E*, т.е. $U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = -E$. Отсюда $U_{ac} = RI - E$. Если направление действия ЭДС будет противоположным направлению протекания тока, то изменятся направление и знак напряжения $U_{bc} = \varphi_b - \varphi_c = E$, и напряжение на участке *ac* будет равно $U_{ac} = RI + E$. В общем случае $U_{ac} = RI \mp E$, а протекающий ток равен

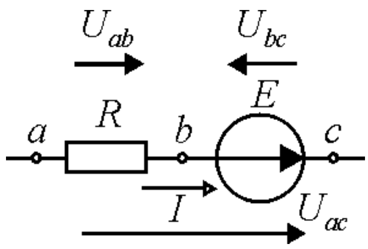


Рис. 1.6

$$I = (U_{ac} \pm E)/R. \tag{1.16}$$

Положительный знак в (1.16) соответствует согласному направлению тока и ЭДС, а отрицательный встречному.

Участок электрической цепи может содержать в общем случае *n* источников ЭДС и *m* резисторов. Тогда, используя тот же ход рассуждений, получим

$$I = \frac{U_{ac} + \sum_{k=1}^{n} \pm E_k}{\sum_{k=1}^{m} R_k}. \tag{1.17}$$

В выражении (1.17) знак ЭДС в сумме принимается положительным, если её направление совпадает с положительным направлением протекания тока.

Законы Кирхгофа являются частным случаем фундаментальных физических законов применительно к электрическим цепям.

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей, объединённых в узел электрической цепи, и, по сути, является принципом непрерывности электрического тока. Поскольку узел является идеальным элементом цепи и в нем не происходит накопления или преобразования энергии, то, мысленно охватив его некоторой замкнутой поверхностью (*S* на рис. 1.7), мы можем утверждать, что количество электрических зарядов входящих внутрь этой поверхности за любой промежуток времени, равно количеству зарядов выходящих из неё. Если

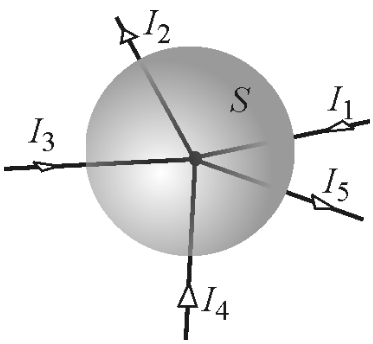


Рис. 1.7

при этом учесть, что заряды в электрической цепи перемещаются по проводникам и образуют электрический ток, то сказанное выше можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{n} \pm i_k = 0. \qquad (1.18\text{ а})$$

$$\sum_{p=1}^{m} i_p = \sum_{q=1}^{n-m} i_q. \qquad (1.18\text{ б})$$

Выражения (1.18) представляют собой первый закон Кирхгофа, который гласит, что алгебраическая сумма токов в узлах электрической цепи равна нулю (1.18 а) или, что сумма токов направленных к узлу равна суме токов направленных от узла (1.18 б). В первой формулировке токи, направленные к узлу можно считать положительными, а от узла отрицательными.

Второй закон Кирхгофа является одной из форм закона сохранения энергии. Он описывает тот факт, что при обходе контура и возвращении в исходную точку её электрический потенциал остаётся неизменным.

Этот закон можно сформулировать следующим образом: алгебраическая сумма падений напряжения в любом контуре электрической цепи равна алгебраической сумме действующих в нём ЭДС. Для контура с числом m резисторов и n источников ЭДС второй закон Кирхгофа можно записать в виде

$$\sum_{p=1}^{m} \pm U_p = \sum_{q=1}^{n} \pm E_q, \qquad (1.19)$$

Положительные знаки в уравнении (1.19) имеют напряжения и ЭДС, направления которых совпадают с направлениями протекания токов в соответствующих элементах цепи, а отрицательные – напряжения и ЭДС, направленные встречно по отношению к токам.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте правило выбора знака ЭДС в обобщённом законе Ома.
2. Какому фундаментальному физическому закону (принципу) соответствует первый (второй) закон Кирхгофа?
3. Сформулируйте первый (второй) закон Кирхгофа. Почему алгебраическая сумма электрических токов в узлах цепи равна нулю?
4. Сформулируйте правило выбора знаков в уравнениях, составляемых для узлов электрической цепи.
5. Сформулируйте правило выбора знаков в уравнениях, составляемых для контуров электрической цепи.
6. Почему число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, не может быть равно числу узлов электрической цепи?
7. Сформулируйте правило выбора контуров электрической цепи.

1.6. Эквивалентные преобразования электрических цепей

В электрических цепях различают следующие соединения элементов: последовательное, параллельное, смешанное, звездой и треугольником. Часто задачу анализа цепи можно существенно упростить, если заменить одно соединение другим эквивалентным.

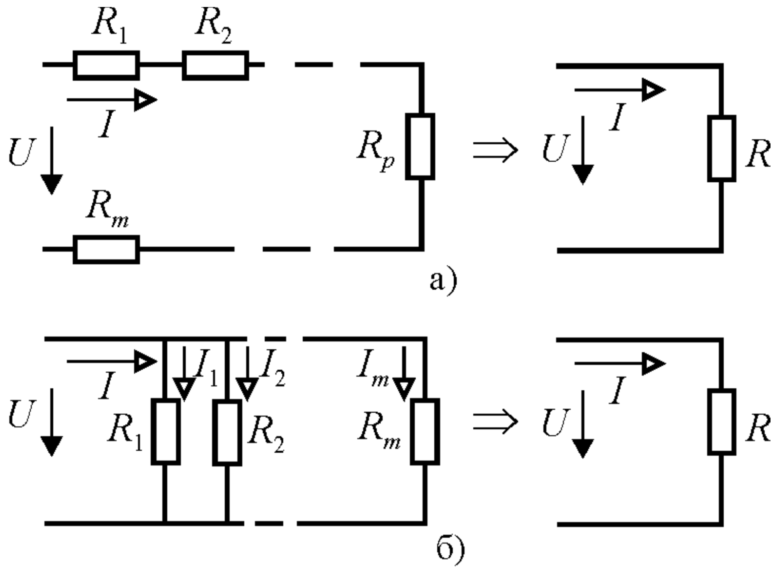


Рис. 1.8

Последовательное соединение это соединение элементов цепи, в котором каждый элемент соединён не более чем с двумя другими, причём так, что с каждым из них у него есть только одна общая точка (рис. 1.8, *а*). Это означает, что в последовательном соединении не может быть узлов и, как следствие, во всех элементах протекает один и тот же ток.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа и законом Ома

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_m = IR_1 + IR_2 + \ldots + IR_m = I(R_1 + R_2 + \ldots + R_m) = IR,$$

т.е. эквивалентное сопротивление m последовательного соединённых резисторов равно сумме их сопротивлений

$$R = \sum_{k=1}^{m} R_k . \quad (1.20)$$

Параллельное соединение это соединение элементов цепи, в котором все они подключены к одной паре узлов (рис. 1.8, *б*). Это означает, что падение напряжения на всех элементах одинаково и равно разности потенциалов узлов.

Пользуясь первым законом Кирхгофа и законом Ома можно записать:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_m = UG_1 + UG_2 + \ldots + UG_m = U(G_1 + G_2 + \ldots + G_m) = UG .$$

Отсюда эквивалентная проводимость параллельного соединения равна

$$G = \sum_{k=1}^{m} G_k . \quad (1.21)$$

На практике в качестве параметра резистивных элементов обычно используют сопротивление. Поэтому выражение (1.21) можно преобразовать

$$G = \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k} \Rightarrow R = \frac{1}{\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R_k}} = \frac{\prod_{k=1}^{m} R_k}{\sum_{p=1}^{m} \left(\prod_{q=1;\, q \neq p}^{m} R_q \right)_p} .$$

В наиболее часто встречающихся случаях параллельного соединения двух и трёх резисторов эквивалентное сопротивление определяется как

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}; \quad R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}. \tag{1.22}$$

Следует заметить, что, в отличие от последовательного соединения, понятие параллельного соединения используется также для соединения ветвей, т.е. параллельно соединёнными ветвями являются все ветви между двумя узлами.

Смешанное соединение это произвольная комбинация последовательных и параллельных соединений. Для каждого смешанного соединения можно найти эквивалентное сопротивление путём последовательных эквивалентных преобразований отдельных элементов. Рассмотрим эту задачу на примере схемы рис. 1.9.

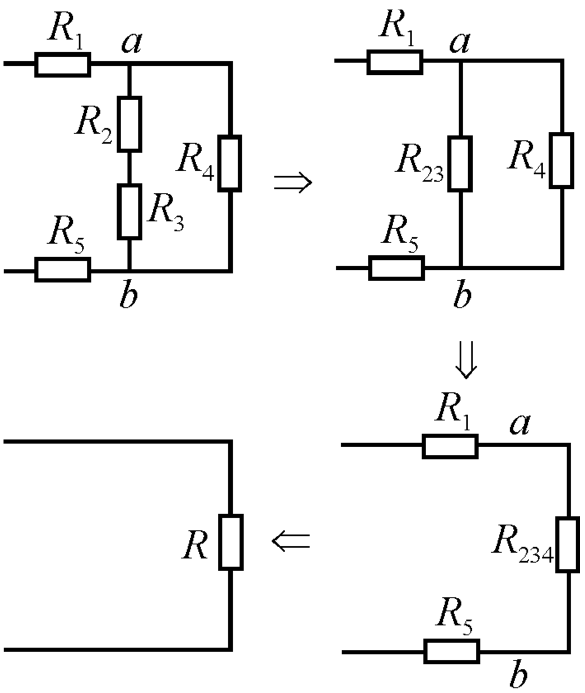


Рис. 1.9

Здесь изображены четыре ветви. В первую входит резистор R_1; во вторую резисторы R_2 и R_3; в третью резистор R_4 и в четвёртую – R_5. Вторая и третья ветви соединены между собой параллельно, т.к. обе соединены с узлами *a* и *b*. Однако из этого не следует, что параллельно соединены между собой элементы этих ветвей. Это было бы справедливо только в том случае, если бы обе ветви состояли из одного элемента.

На первом этапе эквивалентное преобразование возможно только для последовательного соединения R_2 и R_3 во второй ветви, т.к. в цепи нет других соединений, которые можно определить как параллельные или последовательные. Отсюда $R_{23} = R_2 + R_3$.

Теперь каждая из параллельных ветвей состоит из одного элемента, и они образуют между собой параллельное соединение, для которого с помощью выражения (1.22) можно найти эквивалентное сопротивление

$$R_{234} = \frac{R_{23} R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{(R_2 + R_3) R_4}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

В результате мы получили последовательное соединение с эквивалентным сопротивлением

$$R = R_1 + R_5 + R_{234} = R_1 + R_5 + \frac{(R_2 + R_3) R_4}{R_2 + R_3 + R_4}.$$

В сложных цепях встречаются соединения, которые нельзя свести к комбинации последовательных и параллельных. К ним относятся соединения трёхлучевой *звездой и треугольником* (рис. 1.10). Взаимное преобразование этих соединений часто позволяет получить более простые смешанные соединения и после этого решать задачу подобно тому, как это было сделано выше.

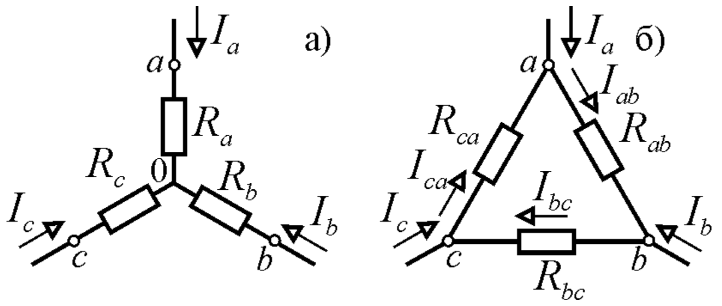


Рис. 1.10

Условиями эквивалентности преобразования являются равенство токов, подходящих к точкам a, b и c, а также напряжений между ними в обеих схемах.

Составим для контура треугольника и узлов a и b схемы рис. 1.10, *б* уравнения Кирхгофа

$$R_{ab}I_{ab} + R_{bc}I_{bc} + R_{ca}I_{ca} = 0;$$

$$I_{ca} = I_{ab} - I_a; \;\; I_{bc} = I_{ab} + I_b;$$

и решим полученную систему относительно тока I_{ab}

$$I_{ab} = \frac{R_{ca}I_a - R_{bc}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Отсюда можно определить U_{ab}

$$U_{ab} = R_{ab}I_{ab} = \frac{R_{ab}R_{ca}I_a - R_{ab}R_{bc}I_b}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}.$$

Но в соединении звездой $U_{ab} = R_aI_a - R_bI_b$. Приравнивая множители при токах в этих двух выражениях, получим:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ca}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}; \;\; R_b = \frac{R_{bc}R_{ab}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \qquad (1.23\ а)$$

По аналогии можно записать для третьего сопротивления:

$$R_c = \frac{R_{ca}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ca}}. \qquad (1.23\ б)$$

Из уравнений (1.23) можно определить сопротивления резисторов эквивалентного треугольника:

$$R_{ab} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_c}; \; R_{bc} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_a}; \; R_{ca} = \frac{R_aR_b + R_bR_c + R_cR_a}{R_b}. \qquad (1.24)$$

Примером использования преобразований трёхполюсников может служить мостовая схема, широко используемая в технике (рис. 1.11, *а*). В ней можно выделить два соединения звездой R_{ca}, R_{cd}, R_{bc}; R_{ad}, R_{cd}, R_{db} и два соединения треугольником R_{ca}, R_{cd}, R_{ad}; R_{bc}, R_{cd}, R_{db}. В результате преобразования любого из четырёх соединений мостовая схема приводится к смешанному соединению. На рис. 1.11, *б* показан результат преобразования треугольника R_{ca}, R_{cd}, R_{ad}, а на рис. 1.11, *в* – звезды R_{ad}, R_{cd}, R_{db}. В первом случае мы получаем смешанное соединение с сохранением всех узлов мостовой схемы и их потенциалов, а во втором информация о потенциале узла *d* утрачивается.

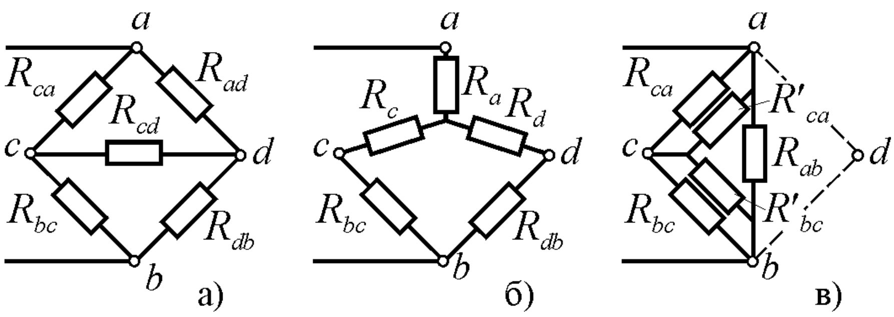


Рис. 1.11.

Преобразование ветвей с источниками ЭДС. При последовательном включении *n* источников ЭДС и *m* резисторов (рис. 1.12, а) напряжение на входе цепи можно определить по второму закону Кирхгофа как

$$U = R_1 I + R_2 I + E_1 + \ldots + R_p I - E_q + R_{p+1} I + E_{q+1} + \ldots$$

$$\ldots - E_n + R_m I = I \sum_{p=1}^{m} R_p + \sum_{q=1}^{n} \pm E_q = RI + E$$

Отсюда параметры эквивалентной цепи

$$R = \sum_{p=1}^{m} R_p; \quad E = \sum_{q=1}^{n} \pm E_q. \qquad (1.25)$$

Полученное выражение $U = RI + E$ соответствует последовательному соединению резистора и источника с ЭДС $E = \sum_{q=1}^{n} \pm E_q$. Причём, ЭДС источника E_q включается в сумму с положительным знаком, если направление ЭДС совпадает с направлением тока в цепи.

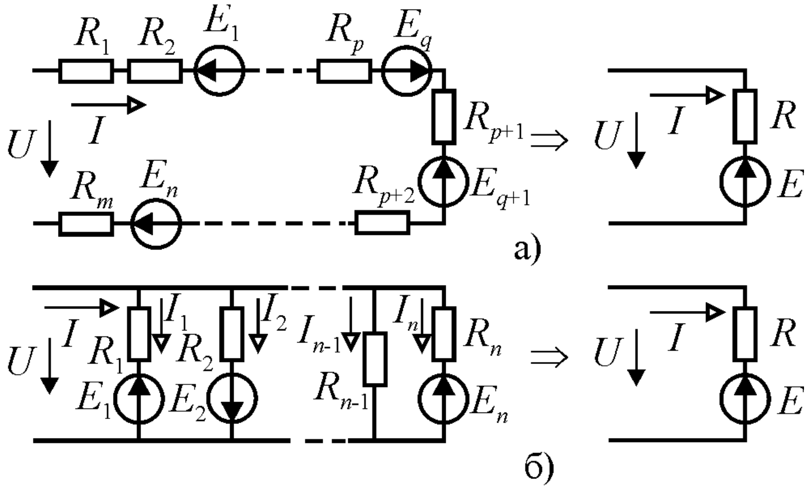


Рис. 1.12.

Ветви с источниками ЭДС могут соединяться параллельно (рис. 1.12, *б*) и для них также возможно эквивалентное преобразование. По первому закону Кирхгофа входной ток цепи равен сумме токов в ветвях: $I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n$.

Эти токи можно определить по закону Ома для участка цепи с источником ЭДС как

$$I_1 = \left(U - E_1\right)G_1;\; I_2 = \left(U + E_2\right)G_2;\ldots\; I_n = \left(U - E_n\right)G_n.$$

Подставляя значения токов в исходное уравнение, получим:

$$I = UG_1 - E_1G_1 + UG_2 + E_2G_2 + \ldots + UG_n - E_nG_n =$$

$$= U\sum_{k=1}^{n} G_k - \sum_{k=1}^{n} \pm G_kE_k = (U - E)/R$$

Отсюда

$$R = 1\Big/\sum_{k=1}^{n} G_k; \quad E = \sum_{k=1}^{n} \pm G_kE_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} G_k. \tag{1.26}$$

Здесь также как в последовательном соединении положительный знак в сумме ЭДС соответствует согласному направлению ЭДС и тока в ветви. В случае отсутствия источника ЭДС в какой-либо ветви в числителе эквивалентной ЭДС будет отсутствовать соответствующее слагаемое (на рис. 1.12, *б* $E_{n-1} = 0$).

Вопросы для самопроверки:

1. Как меняется общее сопротивление последовательно соединённых резисторов при подключении нового элемента?
2. Как меняется общая проводимость параллельно соединённых резисторов при подключении нового элемента?
3. Возможно ли последовательное соединение ветвей электрической цепи?
4. Возможно ли параллельное соединение ветвей электрической цепи?
5. К какому виду приводится последовательное соединение резисторов и источников ЭДС при эквивалентных преобразованиях?
6. К какому виду приводится параллельное соединение резисторов и источников ЭДС при эквивалентных преобразованиях?
7. Сформулируйте правило выбора знаков ЭДС источников при эквивалентных преобразованиях последовательного и параллельного соединений.

1.7. Методы расчёта электрических цепей

Расчёт электрической цепи производится с целью получения данных о режиме её работы или для определения параметров, обеспечивающих заданный режим. Первая задача, задача определения токов, напряжений и мощностей на участках или элементах электрической цепи при заданной схеме, параметрах элементов и источников электрической энергии называется анализом цепи. Вторая задача заключается в определении состава электрической цепи и параметров ее элементов, обеспечивающих требуемый режим работы одного или нескольких из них, называется синтезом цепи и в пределах данного курса не рассматривается. Не входит в задачу данного курса и анализ цепей с источниками тока, которые обычно рассматриваются в курсах теоретических основ электротехники.

Основой для анализа электрической цепи являются законы Ома и Кирхгофа, а также методы, разработанные на их основе для оптимального решения определённого класса задач.

1.7.1. Метод непосредственного применения закона Ома

Закон Ома применяется для расчёта режимов отдельных участков электрической цепи, состоящих из одного или нескольких резисторов и источников ЭДС. Однако в сочетании с эквивалентными преобразованиями он может использоваться для более сложных задач. В частности, его можно использовать для задач определения тока в какой-либо ветви двухконтурной электрической цепи или напряжения на отдельном элементе.

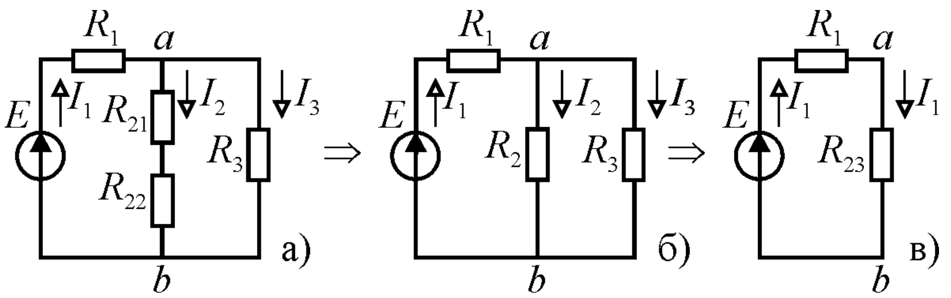


Рис. 1.13.

Рассмотрим ход решения подобных задач на примере цепи рис. 1.13. Пусть известны параметры всех элементов цепи и требуется определить напряжение на R_{21}.

Для определения напряжения по закону Ома нужно знать ток I_2, протекающий через R_{21}. Его можно найти, поэтапно преобразовав схему к цепи, состоящей из одного контура (рис. 1.13, *в*), и вначале вычислить ток I_1 в первой ветви.

Эквивалентное сопротивление последовательно включённых резисторов R_{21} и R_{22} равно $R_2 = R_{21} + R_{22}$, а параллельно включённых R_2 и R_3 – $R_{23} = R_2 R_3 /(R_2 + R_3)$.

Ток в цепи рис. 1.13, *в* можно определить с помощью обобщённого закона Ома для участка *ab*:

$$U_{ab} = R_{23} I_1;\ \ U_{ab} = E - R_1 I_1.$$

Отсюда

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + R_{23}}.$$

Теперь можно найти напряжение U_{ab}:

$$U_{ab} = R_{23} I_1 = \frac{R_{23} E}{R_1 + R_{23}},$$

а затем ток I_2 и искомое напряжение:

$$I_2 = U_{ab} / R_2; \quad U_{21} = R_{21} I_2.$$

1.7.2. Метод непосредственного применения законов Кирхгофа

Законы Кирхгофа являются универсальным средством анализа электрических цепей. При расчёте режима цепи с их использованием рекомендуется определённая последовательность решения.

Вначале нужно определить число ветвей $N_в$ и число узлов $N_у$ цепи. Число ветвей определяет общее число уравнений Кирхгофа, т.к. неизвестными величинами являются токи в ветвях.

Для всех $N_у$ узлов цепи можно составить уравнения по первому закону Кирхгофа, однако только $N_у - 1$ уравнений будут независимыми, т.к. последнее уравнение является суммой остальных. Поэтому число уравнений составляемых по первому закону равно $N_1 = N_у - 1$, а число уравнений по второму закону – $N_2 = N_в - N_1 = N_в - N_у + 1$.

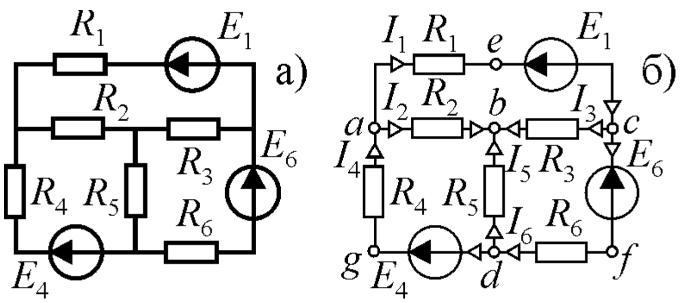


Рис. 1.14.

На следующем этапе решения произвольно выбирают направления токов в ветвях цепи, а затем контуры и направления их обхода. Число контуров должно быть равно числу уравнений по второму закону Кирхгофа. Выбор контуров нужно производить таким образом, чтобы все ветви были включены, по крайней мере, в один из контуров и все контуры отличались друг от друга, по крайней мере, одной ветвью.

После этого составляют уравнения для выбранных узлов цепи, считая токи, направленные к узлам положительными, а от узлов отрицательными. Затем составляют уравнения для контуров, включая в левую часть уравнений напряжения на пассивных элементах, а в правую ЭДС источников. При этом напряжения на элементах, у которых направление протекания тока совпадает с направлением движения при обходе контура, включаются в уравнение с положительным знаком, а остальные с отрицательным. ЭДС источников также включаются в уравнение с учётом направлений их действия и направлений обхода контура: с плюсом, если эти направления совпадают, и с минусом при встречных направлениях.

Рассмотрим алгоритм составления уравнений Кирхгофа для конкретной цепи, приведенной на рис. 1.14.

Общее количество неизвестных токов в цепи равно шести. Цепь имеет четыре узла, поэтому для неё можно составить три уравнения по первому закону Кирхгофа и три по второму.

На рисунке 1.14 *б*) стрелками показаны произвольно выбранные направления токов во всех ветвях (индексы элементов цепи соответствуют номеру ветви). По отношению к узлу b токи I_2, I_3, I_5 получились ориентированными одинаково. Это означает, что в результате решения один или два тока из трёх будут отрицательными, т.е. будут протекать в направлениях противоположных выбранным. Выберем из четырех узлов три, например, a, b и c и составим для них уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned} &a)\;\; I_4 - I_1 - I_2 = 0 \\ &b)\;\; I_2 + I_3 + I_5 = 0 \\ &c)\;\; I_1 - I_3 - I_6 = 0 \end{aligned} \qquad (1.27)$$

Выберем теперь произвольно три замкнутых контура так, чтобы в них входили все ветви. Всего для рассматриваемой цепи можно составить семь контуров: *aecba*, *abdga*, *bcfdb*, *aecfdga, aecfdba, aecbdga, abcfdga*. Любые три из них можно использовать при составлении уравнений по второму закону Кирхгофа, но лучше ограничиться малыми контурами, т.к. при этом уравнения будут более компактными, а для результата выбор контуров не имеет значения.

Примем направления обхода контуров по часовой стрелке и составим уравнения:

$$\begin{aligned} &aecba)\;\; R_1 I_1 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = -E_1; \\ &abdga)\;\; R_2 I_2 - R_5 I_5 + R_4 I_4 = E_4; \\ &bcfdb)\;\; -R_3 I_3 + R_6 I_6 + R_5 I_5 = -E_6; \end{aligned} \qquad (1.28)$$

Следует заметить, что направления обхода могут быть любыми, в том числе и различными для разных контуров.

Решить систему уравнений (1.27-1.28) можно любым способом, но в современных математических пакетах есть средства, позволяющие легко получить результат, если представить задачу в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ R_1 & -R_2 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & 0 & R_5 & R_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_1 \\ E_4 \\ -E_6 \end{Vmatrix}$$

Столбцами матрицы являются множители соответствующих токов в уравнениях Кирхгофа, а в вектор-столбец правой части включены алгебраические суммы ЭДС источников, действующих в контурах.

Определив токи $I_1 \dots I_6$, можно по закону Ома найти напряжения на всех резисторах ($U_k = R_k I_k$), а также составить баланс мощностей цепи:

$$P_R = \sum_{k=1}^{m} I_k^2 R_k; \quad P_S = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k I_k \,, \tag{1.29}$$

где P_R – мощность, рассеваемая на m сопротивлениях цепи, а P_S – мощность, доставляемая n источниками ЭДС. *Причём, мощность источника считается положительной, если направление тока в нём совпадает с направлением ЭДС.*

1.7.3. Метод контурных токов

Метод контурных токов используют для расчёта сложных цепей с большим количеством узлов. Он позволяет исключить уравнения, составленные по первому закону Кирхгофа. Метод основан на предположении, что в каждом контуре цепи протекает собственный ток независимый от токов в других контурах, а истинные токи в ветвях являются алгебраической суммой контурных токов, протекающих через каждую ветвь.

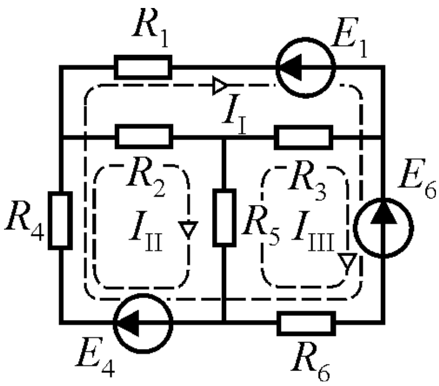


Рис. 1.15

Рассмотрим решение задачи для цепи рис. 1.14 методом контурных токов. Пусть в произвольно выбранных контурах протекают независимые контурные токи $I_{\text{I}}, I_{\text{II}}, I_{\text{III}}$ (рис. 1.15). Направление этих токов также выберем произвольно и независимо одно от другого.

Составим для каждого контура уравнение по второму закону Кирхгофа, включив в левую часть падения напряжения на элементах контура, создаваемые протекающими по ним токами, а в правую часть – ЭДС источников, действующих в контуре. ЭДС источников будем считать положительными, если направление их действия совпадает с направлением протекания контурного тока. Падения напряжения, создаваемые собственными токами контура, будем всегда считать положительными, а падения напряжения, создаваемые в элементах контура токами смежных контуров, будем считать положительными, если ток смежного контура протекает через смежную ветвь в том же направлении, что и собственный ток контура.

Для схемы рис. 1.15 уравнения контурных токов имеют вид:

$$\begin{aligned}
&\text{I)} \quad (R_1+R_4+R_6)I_{\text{I}} + R_4 I_{\text{II}} + R_6 I_{\text{III}} = E_4 - E_1 - E_6 \\
&\text{II)} \quad R_4 I_{\text{I}} + (R_2+R_4+R_5)I_{\text{II}} - R_5 I_{\text{III}} = E_4 \\
&\text{III)} \quad R_6 I_{\text{I}} - R_5 I_{\text{II}} + (R_3+R_5+R_6)I_{\text{III}} = -E_6
\end{aligned} \tag{1.30}$$

или в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} R_1+R_4+R_6 & R_4 & R_6 \\ R_4 & R_2+R_4+R_5 & -R_5 \\ R_6 & -R_5 & R_3+R_5+R_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} I_{\text{I}} \\ I_{\text{II}} \\ I_{\text{III}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_4-E_1-E_6 \\ E_4 \\ E_6 \end{Vmatrix}$$

При известном навыке уравнения (1.30) можно составлять сразу в матричной форме, если учесть, что матрица коэффициентов этой системы симметрична относительно главной диагонали, на которой расположены суммы всех сопротивлений, входящих в соответствующие контуры. Эти суммы называются собственными сопротивлениями контуров. Элементы матрицы вне главной диагонали представляют собой алгебраическую сумму сопротивлений смежных ветвей соответствующих контуров, называемых также общими или взаимными сопротивлениями. Эти сопротивления включаются в сумму с положительным знаком, если контурные токи в смежной ветви имеют одинаковое направление. Элементы вектора-столбца правой части уравнений представляют собой алгебраическую сумму ЭДС действующих в соответствующем контуре. Знаки ЭДС в сумме соответствуют правилу, принятому при составлении уравнений (1.30).

После решения системы уравнений (1.30) можно определить токи в ветвях цепи как алгебраическую сумму протекающих в них контурных токов:

$$I_1 = I_{\text{I}}; \qquad I_2 = I_{\text{II}}; \qquad I_3 = I_{\text{III}};$$

$$I_4 = I_{\text{I}} + I_{\text{II}}; \qquad I_5 = I_{\text{II}} - I_{\text{III}}; \qquad I_6 = I_{\text{I}} + I_{\text{III}};$$

1.7.4. Метод узловых потенциалов

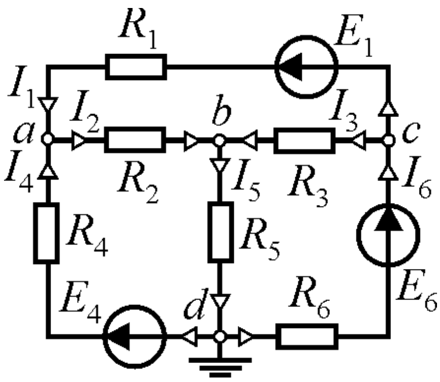


Рис. 1.16

Метод узловых потенциалов позволяет исключить уравнения, составленные по второму закону Кирхгофа. Метод основан на применении закона Ома и уравнений Кирхгофа для узлов электрической цепи. С помощью закона Ома можно определить ток в ветви, если известна разность потенциалов узлов, к которым подключена ветвь, а также её проводимость и действующая в ветви ЭДС. Если затем все токи ветвей связать условиями, соответствующими закону Кирхгофа для узлов цепи, то получится система уравнений, в которой неизвестными величинами будут потенциалы узлов. Решив систему относительно этих потенциалов, мы можем затем определить токи по составленным ранее уравнениям.

Рассмотрим решение задачи для цепи рис. 1.14 методом узловых потенциалов. Выберем произвольно направления токов во всех ветвях с пассивными элементами, а в ветвях с источниками ЭДС примем за положительное направление тока, совпадающее с направлением действия ЭДС* так, как это показано на рис. 1.16. Тогда на основании закона Ома:

$$\begin{aligned} I_1 &= (U_{ac} + E_1)G_1 = (\varphi_a - \varphi_c + E_1)G_1; \\ I_2 &= U_{ab}G_2 = (\varphi_a - \varphi_b)G_2; \\ I_3 &= U_{cb}G_3 = (\varphi_c - \varphi_b)G_3; \\ I_4 &= (U_{da} + E_4)G_4 = (\varphi_d - \varphi_a + E_4)G_4; \\ I_5 &= U_{bd}G_5 = (\varphi_b - \varphi_d)G_5; \\ I_6 &= (U_{cd} + E_6)G_6 = (\varphi_c - \varphi_d + E_6)G_6. \end{aligned} \qquad (1.31)$$

где $G_k = 1/R_k$.

В любой электрической цепи имеет смысл только понятие разности потенциалов. Поэтому потенциал одного из узлов можно принять за нулевую точку отсчёта для остальных потенциалов. Произвольно примем потенциал узла d равным нулю и составим для остальных узлов уравнения Кирхгофа:

$$\begin{aligned} a)&\ I_4 + I_1 - I_2 = 0 \\ b)&\ I_2 + I_3 - I_5 = 0 \\ c)&\ I_6 - I_1 - I_3 = 0 \end{aligned}$$

Подставляя в эту систему уравнений выражения (1.31), получим:

$$\begin{aligned} &(G_1 + G_2 + G_4)\varphi_a - G_2\varphi_b - G_1\varphi_c = E_1G_1 + E_4G_4 \\ &-G_2\varphi_a + (G_2 + G_3 + G_5)\varphi_b - G_3\varphi_c = 0 \\ &-G_1\varphi_a - G_3\varphi_b + (G_1 + G_3 + G_6)\varphi_c = -E_1G_1 + E_6G_6 \end{aligned} \qquad (1.32)$$

или в матричной форме:

$$\begin{Vmatrix} G_1 + G_2 + G_4 & -G_2 & -G_1 \\ -G_2 & G_2 + G_3 + G_5 & -G_3 \\ -G_1 & -G_3 & G_1 + G_3 + G_6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \\ \varphi_c \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_1G_1 + E_4G_4 \\ 0 \\ -E_1G_1 + E_6G_6 \end{Vmatrix}$$

Матрица проводимостей симметрична относительно главной диагонали, на которой расположены суммарные проводимости ветвей, сходящихся в соответствующих узлах. Вне главной диагонали расположены элементы матрицы, представляющие собой суммарные проводимости всех ветвей, соединяющих соответствующие узлы, взятые с отрицательным знаком. Элементами вектора-столбца правой части уравнений являются алгебраические суммы ЭДС источников ветвей, сходящихся в узле, умноженные на проводимости этих ветвей. ЭДС источников входят в сумму с плюсом, если они направлены к узлу и с минусом, если от узла. Пользуясь этими правилами можно составлять уравнения или проверять правильность уже составленных.

После определения потенциалов из уравнений (1.32) не составляет труда найти токи в ветвях по выражениям (1.31).

* Это условие не является обязательным, но существенно упрощает выбор знаков ЭДС в уравнениях

Частным случаем метода узловых потенциалов является *метод двух узлов*. Как следует из его названия, он используется для расчёта электрических цепей, имеющих два только узла. Тогда потенциал одного из них принимается равным нулю, а потенциал другого определяется как

$$\varphi = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \pm E_k G_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} G_k}. \qquad (1.33)$$

Знак ЭДС в числителе выбирается положительным, если она направлена к узлу, и отрицательным в противном случае.

Пример электрической цепи, для расчёта которой можно использовать метод двух узлов, приведён на рис. 1.17.

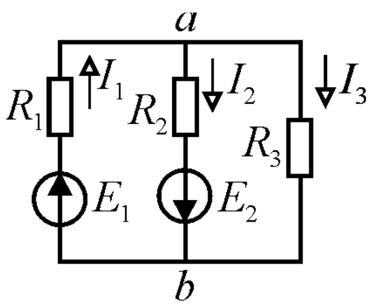


Рис. 1.17

Примем $\varphi_b = 0$. Тогда в соответствии с (1.33):

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \varphi_a = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} - \dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}.$$

Отсюда токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{ab}}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U_{ab} + E_2}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3}.$$

1.7.5. Принцип и метод суперпозиции (наложения)

Для линейных электрических цепей справедлив принцип суперпозиции, заключающийся в том, что реакция электрической цепи на суммарное воздействие равно сумме реакций на элементарные воздействия. Под реакцией электрической цепи понимается режим работы, который устанавливается в результате действия ЭДС источников электрической энергии. Метод наложения непосредственно следует из принципа суперпозиции и заключается в

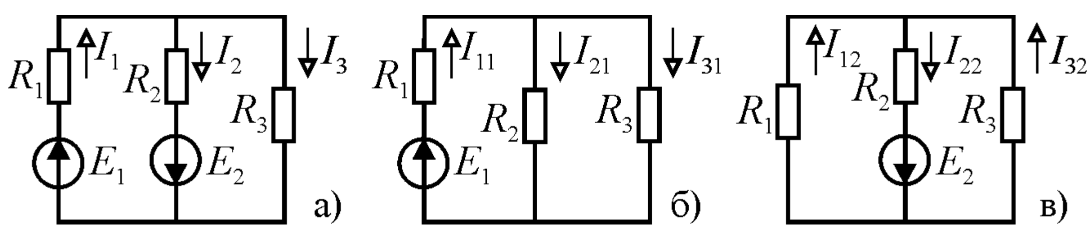


Рис. 1.18

том, что ток в любой ветви *линейной электрической цепи* можно определить в виде суммы токов, создаваемых каждым источником в отдельности. Очевидно, что этот метод целесообразно применять в цепях с небольшим количеством источников.

Рассмотрим применение метода наложения на примере цепи рис. 1.18. В ней действуют два источника ЭДС. Отключим второй источник, заменив его внутренним сопротивлением ($r = 0$). Тогда схема цепи будет соответствовать рис. 1.18, *б*, и для неё токи можно легко рассчитать, пользуясь, например, эквивалентными преобразованиями и законом Ома:

$$I_{11} = \frac{E_1}{R_1 + \dfrac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}}; \quad I_{21} = I_{11}\frac{R_3}{R_2 + R_3}; \quad I_{31} = I_{11} - I_{21}.$$

Ток I_{21} получен в результате следующих выкладок

$$U_{23} = I_{11}R_{23} = I_{11}\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \;\Rightarrow\; I_{21} = \frac{U_{23}}{R_2} = I_{11}\frac{R_3}{R_2 + R_3},$$

которые можно успешно использовать при анализе других цепей и сформулировать на их основе правило распределения тока по двум параллельным ветвям: *ток в каждой из ветвей пропорционален отношению сопротивления другой ветви к суммарному сопротивлению обеих ветвей*.

Отключим теперь первый источник и аналогичным методом определим токи в цепи рис. 1.18, *в*:

$$I_{22} = \frac{E_2}{R_2 + \dfrac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}; \quad I_{12} = I_{22}\frac{R_3}{R_1 + R_3}; \quad I_{32} = I_{22} - I_{12}.$$

Складывая токи, создаваемые отдельными источниками с учётом их направлений, получим искомые токи:

$$I_1 = I_{11} + I_{12}; \quad I_2 = I_{21} + I_{22}; \quad I_3 = I_{31} - I_{32}.$$

1.7.6. Метод эквивалентного источника (генератора)

Метод эквивалентного источника является прямым следствием теоремы Тевенена гласящей, что ток в любой ветви сколь угодно сложной цепи можно найти, разделив напряжение, которое будет в точках подключения ветви в

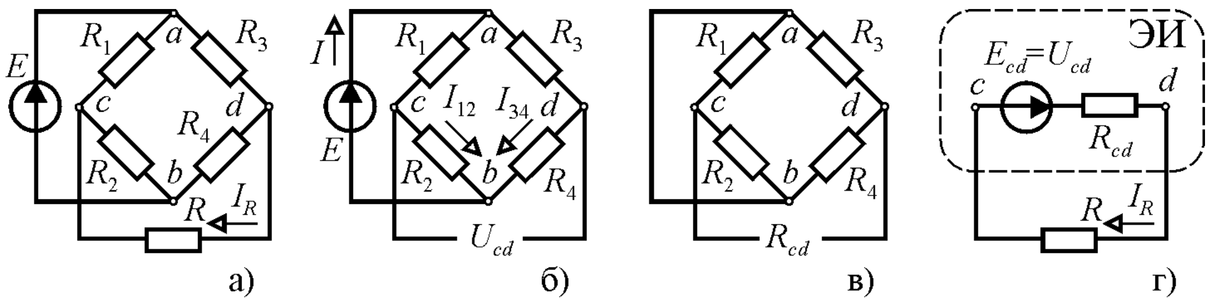


Рис. 1.19

разомкнутом состоянии, на сумму сопротивления ветви и эквивалентного сопротивления всей цепи относительно точек подключения. Из этой теоремы следует, что по отношению к выделенной ветви всю остальную цепь можно рассматривать как источник электрической энергии с ЭДС, равной напряжению в точках подключения ветви, и внутренним сопротивлением, равным эквивалентному сопротивлению цепи относительно точек подключения.

Рассмотрим в качестве примера задачу определения тока в резисторе *R*, включённом в диагональ неуравновешенного моста (рис. 1.19, а).

Отключим резистор и определим напряжение U_{cd} в точках его подключения (рис. 1.19, *б*). Для этого составим уравнение Кирхгофа для контура *cdbc*

$$U_{cd} + R_4 I_{34} - R_2 I_{12} = 0 \;\Rightarrow\; U_{cd} = R_2 I_{12} - R_4 I_{34}$$

Ветви *acb* и *adb* соединены параллельно, поэтому токи в них независимы и равны:

$$I_{12} = \frac{E}{R_1 + R_2}; \quad I_{34} = \frac{E}{R_3 + R_4}.$$

Отсюда

$$U_{cd} = E\left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4}\right).$$

Далее нужно исключить источник, заменив его внутренним сопротивлением ($r = 0$), и найти общее сопротивление цепи относительно точек *cd* (R_{cd} на рис. 1.19, *в*. После замены источника нулевым сопротивлением резисторы R_1, R_2 и R_3, R_4 образуют два параллельных соединения, включенных последовательно между точками *cd*. Поэтому

$$R_{cd} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Теперь внешнюю по отношению к резистору *R* цепь можно заменить эквивалентным источником (ЭИ на рис. 1.19, *г*) и найти искомый ток по закону Ома:

$$I_R = \frac{U_{cd}}{R_{cd} + R}.$$

Вопросы для самопроверки:

1. Сформулируйте правило выбора знака мощности источника в балансе мощностей электрической цепи.
2. Сформулируйте основной принцип, на котором основан метод контурных токов.
3. Сформулируйте основной принцип, на котором основан метод узловых потенциалов.
4. Сформулируйте правило выбора знаков ЭДС источников в методе двух узлов.
5. Сформулируйте основной принцип, на котором основан метод наложения.
6. Сформулируйте основной принцип, на котором основан метод эквивалентного источника.