4. Электрические цепи несинусоидального тока

Периодические несинусоидальные токи и напряжения в электрических цепях возникают в случае действия в них несинусоидальных ЭДС и/или наличия в них нелинейных элементов. Реальные ЭДС, напряжения и токи в электрических цепях синусоидального переменного тока по разным причинам отличаются от синусоиды. В энергетике появление несинусоидальных токов или напряжений нежелательно, т.к. вызывает дополнительные потери энергии. Однако существуют большие области техники (радиотехника, автоматика, вычислительная техника, полупроводниковая преобразовательная техника), где несинусоидальные величины являются основной формой ЭДС, токов и напряжений.

В этом разделе мы рассмотрим методы расчёта линейных электрических цепей при воздействии на них источников периодических несинусоидальных ЭДС.

4.1. Разложение периодической функции в тригонометрический ряд

Как известно, всякая периодическая функция, имеющая конечное число разрывов первого рода и конечное число максимумов и минимумов за период, может быть разложена в тригонометрический ряд (ряд Фурье):

$$f(\omega t) = A_0 + A_{1m}\sin(\omega t + \phi_1) + A_{2m}\sin(2\omega t + \phi_2) + \ldots = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km}\sin(k\omega t + \phi_k) \qquad (4.1)$$

где при $k = 0$ – $A_{km} = A_0$; $\phi_k = \phi_0 = \pi/2$.

Первый член ряда A_0 называется *постоянной составляющей*, второй член $A_{1m}\sin(\omega t + \phi_1)$ – *основной или первой гармоникой*. Остальные члены ряда называются *высшими гармониками*.

Если в выражении (4.1) раскрыть синусы суммы каждой из гармоник, то оно примет вид:

$$f(\omega t) = A_0 + B_{1m}\sin\omega t + B_{2m}\sin 2\omega t + \ldots + B_{km}\sin k\omega t + \ldots + \\ C_{1m}\cos\omega t + C_{2m}\cos 2\omega t + \ldots + C_{km}\cos k\omega t + \ldots = \qquad (4.2) \\ = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km}\sin k\omega t + \sum_{k=1}^{\infty} C_{km}\cos k\omega t$$

где $B_{km} = A_{km}\cos\phi_k$; $C_{km} = A_{km}\sin\phi_k$.

В случае аналитического задания функции $f(\omega t)$ коэффициенты ряда (4.2) могут быть вычислены с помощью следующих выражений:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\,d(\omega t);$$

$$B_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\sin(k\omega t)\,d(\omega t);\; C_{km} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos(k\omega t)\,d(\omega t)$$

после чего можно также перейти к форме (4.1)

$$A_{km} = \sqrt{B_{km}^2 + C_{km}^2};\ \phi_k = \operatorname{arctg}(C_{km} / B_m).$$

Коэффициенты ряда Фурье большей части периодических функций встречающихся в технике приводятся в справочных данных. Полезно, однако, запомнить ряд признаков, по которым можно сразу определить состав ряда.

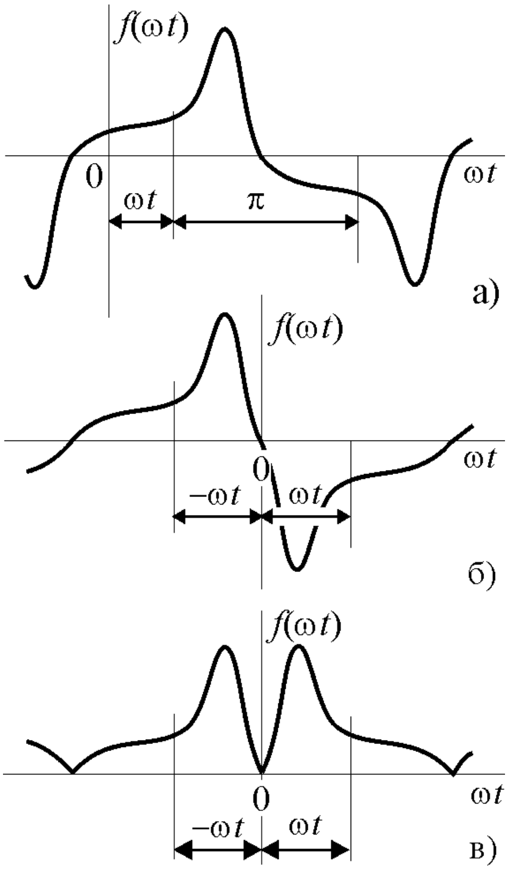

Рис. 4.1

Функции вида $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$ называются симметричными относительно оси абсцисс (рис. 4.1, *а*). В этом случае ряд не содержит постоянной составляющей и четных гармоник:

$$f(\omega t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{km} \sin\left[(2k+1)\omega t + \phi_k\right].$$

Если для функции выполняется условие $f(\omega t) = -f(-\omega t)$ (рис. 4.1, *б*), то такая функция называется симметричной относительно оси ординат и её ряд не содержит постоянной составляющей и четных функций (косинусов):

$$f(\omega t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \sin k\omega t .$$

Выпрямление сигнала, представленного функцией вида рис. 4.1, *б*, приведёт к функции вида рис. 4.1, *в*, для которой справедливо условие $f(\omega t) = f(-\omega t)$. Ряд этой функции не содержит нечетных функций (синусов):

$$f(\omega t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} \cos k\omega t .$$

Таким образом, в общем случае периодические несинусоидальные ЭДС, токи и напряжения можно представить тригонометрическими рядами вида:

$$e = E_0 + \sum_{k=1}^{\infty} E_{km} \sin(k\omega t + \phi_{ek});$$

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km} \sin(k\omega t + \phi_{uk}); \qquad (4.3)$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km} \sin(k\omega t + \phi_{ik}).$$

Вопросы для самопроверки

1. Отчего в электрических цепях возникают периодические несинусоидальные токи?
2. Дайте определение постоянной составляющей, основной и высшим гармоникам.
3. Какие гармоники присутствуют в спектре функций симметричных относительно оси абсцисс (ординат)?

4.2. Основные характеристики периодических несинусоидальных величин

Одной из основных характеристик периодических величин является их действующее или эффективное значение. Эта величина определяется по тепловому эквиваленту с постоянным током и рассчитывается как среднеквадратичное значение. Для периодической несинусоидальной величины $f(\omega t)$, представленной разложением в ряд Фурье (4.1), действующее значение равно:

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(\omega t)\,dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_{km}\sin(k\omega t + \phi_k)\right]^2 dt} = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} A_k^2}\,. \quad (4.4)$$

Таким образом, действующее значение несинусоидальной величины зависит только от действующих значений гармоник $A_k = \sqrt{2}A_{km}$ и не зависит от их начальных фаз.

Подставляя в (4.4) соответствующие величины, получим выражения для ЭДС, напряжений и токов:

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{E_0^2 + E_1^2 + E_2^2 + \ldots}; \\ U &= \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \ldots}; \\ I &= \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \ldots}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Действующее значение несинусоидальной величины можно измерить приборами электромагнитной, электродинамической, тепловой и др. систем.

Кроме действующего значения для характеристики несинусоидальных величин используют среднее, среднее за половину периода и среднее по модулю или среднее выпрямленное значения.

Среднее значение определяется как

$$A_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T f(\omega t)\,dt$$

и является постоянной составляющей несинусоидальной величины.

Среднее по модулю значение называется также средним выпрямленным значением, т.к. математическая операция определения модуля функции технически реализуется устройством, называемым выпрямителем. Для функции $f(\omega t)$ среднее по модулю значение равно:

$$A_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left| f(\omega t) \right| dt .$$

Если несинусоидальная величина симметрична относительно оси абсцисс и не меняет знака в течение полупериода, то её среднее значение за половину периода равно среднему выпрямленному значению.

Среднее значение величин измеряют приборами магнитоэлектрической системы, а среднее по модулю – приборами магнитоэлектрической системы с выпрямителем.

Кривые несинусоидальных периодических величин отличаются бесконечным разнообразием. При этом часто требуется произвести оценку их гармонического состава и формы, не прибегая к точным расчётам. Для этого используют коэффициенты формы, амплитуды и искажений.

Коэффициент формы определяют как отношение действующего значения к среднему по модулю значению:

$$k_{ф} = A / A_{ср} .$$

Для синусоиды это значение равно $k_{ф} = \pi / \left(2\sqrt{2}\right) \approx 1{,}11$.

Коэффициент амплитуды определяют как отношение максимального $a_{\max}$ к действующему значению периодической функции:

$$k_{а} = a_{\max} / A .$$

Для синусоиды это значение равно $k_{а} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Коэффициент искажений определяют как отношение действующего значения основной гармоники к действующему значению всей функции:

$$k_{и} = A_1 / A .$$

Для синусоиды это значение равно $k_{и} = 1{,}0$.

Вопросы для самопроверки

1. Как определяются действующие значения периодических несинусоидальных величин?
2. Какими приборами можно измерить действующие значения несинусоидальных величин?
3. Что такое среднее значение несинусоидальной величины?
4. Почему среднее по модулю значение называется также средним выпрямленным значением?
5. В каком случае среднее значение величины равно её среднему выпрямленному значению?
6. Какими приборами измеряют среднее и среднее выпрямленное значения?
7. Дайте определения коэффициентам формы, амплитуды и искажений.

8. Чему равны значения коэффициентов формы, амплитуды и искажений для синусоидальной функции?

4.3. Мощность цепи несинусоидального тока

Активная мощность цепи несинусоидального тока определяется так же, как для цепи синусоидального тока, т.е. как среднее значение мгновенной мощности за период:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt \tag{4.6}$$

Подставляя в (4.6) выражения для напряжения и тока из (4.3), получим:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T \left[U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_{km}\sin(k\omega t + \phi_{uk})\right] \times \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{km}\sin(k\omega t + \phi_{uk} - \varphi_k)\right] dt =$$

$$= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k = \sum_{k=0}^{\infty} P_k$$

Таким образом, активная мощность при несинусоидальном токе равна сумме активных мощностей отдельных гармоник, включая постоянную составляющую, как гармонику с нулевой частотой ($\omega_0 = 0;\ \varphi_0 = 0$).

По аналогии с синусоидальным током можно ввести понятие *реактивной мощности*, как суммы реактивных мощностей гармонических составляющих, т.е.

$$Q = \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \sin\varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k\,.$$

Также по аналогии вводится понятие *полной или кажущейся мощности*, как произведение действующих значений напряжения и тока

$$S = UI\,.$$

Активная мощность любой электрической цепи меньше полной, за исключением цепи, состоящей из идеальных резистивных элементов, для которой $P = S$. Отношение активной мощности к полной называется коэффициентом мощности и его можно приравнять косинусу некоторого угла φ, т.е.

$$P/S = \cos\varphi\,.$$

Такое же соотношение между активной и полной мощностью будет у двухполюсника в цепи синусоидального тока, если действующие значения напряжения и тока на его входе будут равны действующим значениям несинусоидального напряжения и тока, а сдвиг фазы синусоиды тока относительно напряжения будет равен φ. Такие синусоидальные величины называются *эквивалентными синусоидами* и используются для оценочных расчётов в цепях несинусоидального тока.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равна активная (реактивная) мощность при несинусоидальном токе и/или напряжении в цепи?

2. Как определяется коэффициент мощности при несинусоидальном токе и/или напряжении в цепи?
3. Что такое эквивалентная(ые) синусоида(ы)?

4.4. Расчёт цепи несинусоидального тока

Расчёт цепи несинусоидального тока выполняется методом наложения для каждой гармоники ЭДС действующей в цепи. При расчёте можно пользоваться комплексным методом, учитывая, что индуктивное сопротивление для k-й гармоники равно $X_{kL} = \omega_k L = k\omega_1 L$, а ёмкостное – $X_{kC} = 1/(\omega_k C) = 1/(k\omega_1 C)$. Расчёт цепи для постоянной составляющей соответствует расчёту на постоянном токе, но его можно вести также как на переменном токе, полагая для реактивных сопротивлений $k = 0$. Тогда $X_{0L} = 0$, а $X_{0C} = \infty$. Следовательно, индуктивный элемент будет эквивалентен замыканию, а ёмкостный – разрыву цепи между точками включения.

Выполним в качестве примера расчёт входного тока, напряжения на активном сопротивлении и мощности для схемы замещения на рис. 4.2, *а* при двух значениях индуктивности. Активное сопротивление в данном случае является нагрузкой цепи, состоящей из индуктивного и ёмкостного элементов. Пусть входное напряжение равно $u(t) = 10{,}0 + 28{,}2\sin(1000t - \pi/6) + 7{,}07\sin(3000t + \pi/4)$ В. Параметры элементов цепи: R=20 Ом; C= 125 мкФ; L_1=2 мГн и L_2=20 мГн.

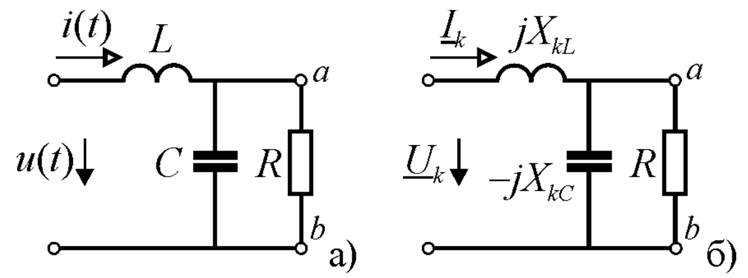

Рис. 4.2

Спектр входного напряжения содержит постоянную составляющую, первую и третью гармоники. Представим отдельные гармоники входного напряжения в комплексной форме:

$$\underline{U}_0 = 10\ B;\ \ \underline{U}_1 = 20e^{-j\pi/6};\ \underline{U}_3 = 5e^{j\pi/4}$$

Реактивные сопротивления цепи для k-й гармоники можно представить в виде:

$$X_{kL} = k\omega_1 L = kX_{1L};\ \ X_{kC} = \frac{1}{k\omega_1 C} = \frac{X_{1C}}{k},$$

где $X_{1L} = \omega_1 L$ и $X_{1C} = 1/(\omega_1 C)$ – индуктивное и ёмкостное сопротивления на частоте основной гармоники. Тогда $X_{1L_1} = \omega_1 L_1 = 2$ Ом, $X_{1L_2} = \omega_1 L_2 = 20$ Ом и $X_{1C} = 1/(\omega_1 C) = 8$ Ом.

Комплексное сопротивление участка *ab* рис. 4.2, *б* на частоте k-й гармоники равно:

$$\underline{Z}_{k\ ab} = -j\frac{R \cdot X_{1C}/k}{R - jX_{1C}/k} = -j\frac{R \cdot X_{1C}}{k \cdot R - jX_{1C}}, \tag{4.7}$$

а общее комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_k = jkX_{1L} + \underline{Z}_{k\ ab}. \tag{4.8}$$

Комплексные значения гармоник токов и напряжения на активном сопротивлении определим по закону Ома:

$$\underline{I}_k = \underline{U}_k / \underline{Z}_k; \quad \underline{U}_{kR} = \underline{U}_{kab} = \underline{Z}_{k\ ab}\underline{I}_k \tag{4.9}$$

Подставляя в (4.7)-(4.9) k=0, 1, 3 при двух значениях X_{1L}, получим искомые величины и рассчитаем действующие значения напряжения и тока и активную мощность:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_1^2 + U_3^2} = 22{,}9 \text{ В}; \quad I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2}; \\ P = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_3 I_3 \cos\varphi_3. \tag{4.10}$$

Таблица 4.1

Результаты расчёта электрической цепи

L	k	$\underline{Z}_{k\ ab}$ [Ом]	$\underline{Z}_k$ [Ом]	$\underline{I}_k$ [А]	$\underline{U}_{k\ ab}$ [В]	$\underline{U}$ [В]	I [А]	P [Вт]
L_1	0	20	20	0,5	10,0	10,0	7,3	71,2
	1	$7{,}4 \cdot e^{-j68{,}2°}$	$5{,}6 \cdot e^{-j60{,}6°}$	$3{,}5 \cdot e^{j30{,}6°}$	$26{,}4 \cdot e^{-j37{,}6°}$	$20{,}0 \cdot e^{-j30{,}0°}$		
	3	$3{,}9 \cdot e^{-j78{,}7°}$	$0{,}78 \cdot e^{j11{,}3°}$	$6{,}3 \cdot e^{j33{,}7°}$	$25{,}0 \cdot e^{-j45{,}0°}$	$5{,}0 \cdot e^{j45{,}0°}$		
L_2	0	20	20	0,5	10,0	10,0	1,6	11,2
	1	$7{,}4 \cdot e^{-j68{,}2°}$	$13{,}4 \cdot e^{j78{,}1°}$	$1{,}5 \cdot e^{-j108{,}1°}$	$11{,}1 \cdot e^{-j176{,}3°}$	$20{,}0 \cdot e^{-j30{,}0°}$		
	3	$3{,}9 \cdot e^{-j78{,}7°}$	$36{,}2 \cdot e^{j88{,}8°}$	$0{,}14 \cdot e^{-j43{,}8°}$	$0{,}54 \cdot e^{-j122{,}5°}$	$5{,}0 \cdot e^{j45{,}0°}$		

Из расчётных значений видно, что на частоте третьей гармоники при индуктивности 2 мГн возникает режим близкий к резонансу напряжений ($\varphi_3 = 11{,}3°$) и напряжение на активном сопротивлении в пять раз превосходит входное напряжение на этой частоте. При этом модуль входного сопротивления составляет только 0,78 ома, поэтому действующее значение тока третьей гармоники достигает величины в 6,3 ампера и является основной составляющей действующего значения входного тока (I=7,3 А). На частоте первой гармоники напряжение на активном сопротивлении при этих параметрах также превосходит входное в 1,3 раза.

Увеличение индуктивности до 20 мГн приводит к тому, что напряжение первой гармоники на активном сопротивлении ослабляется приблизительно в 1,8 раза, а третьей – почти в 10 раз. Из выражения (4.7) следует, что с увеличением k модуль сопротивления $\underline{Z}_{k\ ab}$ уменьшается и в пределе стремится к нулю. Это значит, что при отсутствии резонанса высшие гармоники в спектре напряжения на активном сопротивлении будут подавляться.

В данных таблицы 4.1 следует обратить внимание на то, что для постоянной составляющей все величины вещественные и не зависят от параметров реактивных элементов, в частности, от индуктивности. Если в схеме рис. 4.2, *б* реактивные элементы заменить их сопротивлениями при нулевой частоте, то она будет состоять из активного сопротивления, подключённого к источнику с напряжением 10 В.

Таким образом, зависимость от частоты реактивных сопротивлений электрической цепи позволяет при определённом построении схемы и выборе параметров формировать в ней режимы, при которых будут усиливаться или ослабляться токи или напряжения заданной частоты или диапазона частот. Усиление или ослабление токов или напряжений определённой частоты называется *электрической фильтрацией*, а устройства, реализующие эту функцию – *электрическими фильтрами*.

Вопросы для самопроверки

1. Каков алгоритм расчёта цепи при действии на неё несинусоидальной ЭДС?
2. Что такое электрическая фильтрация и электрические фильтры? Для чего они используются?