5. Переходные процессы в электрических цепях

Переходные процессы в электрической цепи, это электромагнитные процессы, происходящие при изменении её состояния в течение некоторого промежутка времени.

Причиной того, что состояние цепи не может измениться мгновенно, является наличие энергии в электрических и магнитных полях, запас которой в переходном процессе должен перераспределиться между полями или быть преобразованным в неэлектрические виды энергии. Невозможность скачкообразного изменения состояния полей следует из необходимости использования для решения этой задачи источника электрической энергии бесконечной мощности, т.к. в этом случае $p = dw/dt = \infty$

В отличие от установившихся режимов, в которых состояние цепи определяется постоянными параметрами величин ЭДС, напряжения и тока, в переходных процессах эти параметры изменяются во времени. Поэтому переходные процессы описываются дифференциальными уравнениями. Однородными, если в цепи отсутствуют источники электрической энергии, или неоднородными, если такие источники есть.

В дальнейшем мы будем рассматривать переходные процессы, происходящие в линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами при быстром (скачкообразном) изменении схемы соединений.

5.1. Коммутация. Законы коммутации. Начальные условия

Мгновенное изменение схемы соединения или параметров элементов электрической цепи называется *коммутацией*. Для описания коммутации используют понятие идеального ключа или просто ключа. *Идеальный ключ* это элемент электрической цепи, который может находиться в двух состояниях – нулевого и бесконечно большого активного сопротивления, и мгновенно менять своё состояние в заданный момент времени. Сопротивление реального технического устройства не может измениться мгновенно, но если время его изменения существенно меньше длительности последующего процесса, то можно считать коммутацию мгновенной. На схемах замещения ключ изображают в виде механического замыкающего, размыкающего или переключающего контакта (рис. 5.1, *а*, *б*, *в*). Иногда стрелкой показывают направление его движения при коммутации.

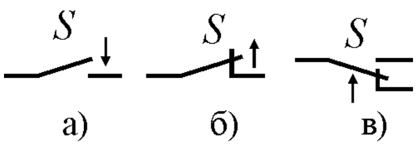

Рис. 5.1

При анализе переходных процессов отсчёт времени производят от момента коммутации $t = 0$ и вводят понятия момента времени, непосредственно предшествующего коммутации $t = 0_-$, и момента времени, непосредственно следующего за коммутацией $t = 0_+$.

Из выражения для мощности индуктивного элемента цепи $p_L = u_L i_L = L\dfrac{di_L}{dt}i_L$ следует, что для скачкообразного изменения тока $di_L / dt = \infty \Rightarrow p_L = \infty$ требуется бесконечно большая мощность, поэтому ток в ветви с индуктивным элементом не может измениться скачкообразно и после коммутации сохраняет значение, которое было до коммутации. Этот вывод называется *первым законом коммутации* и математически записывается в виде:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) \qquad (5.1)$$

Аналогично можно заключить, что напряжение на ёмкостном элементе не может измениться скачкообразно, т.к. в этом случае мощность ёмкостного элемента $p_C = u_C i_C = u_C C\dfrac{du_C}{dt} = \infty\Big|_{du_C/dt=\infty}$ будет бесконечно большой и в такой цепи не может быть обеспечен баланс мощностей. Этот вывод называется *вторым законом коммутации* и математически записывается в виде:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) \qquad (5.2)$$

Значения токов в индуктивных элементах цепи $i_L(0_-)$ и напряжений на ёмкостных элементах $u_C(0_-)$ непосредственно перед коммутацией называются *начальными условиями* переходного процесса. Если эти значения равны нулю, то такие условия называются *нулевыми начальными условиями*. В противном случае начальные условия *ненулевые*.

Вопросы для самопроверки

1. Почему состояние электрической цепи не может измениться мгновенно?
2. Что такое коммутация?
3. Что такое идеальный ключ?
4. Почему ток в индуктивном элементе не может измениться скачкообразно?
5. Почему напряжение на ёмкостном элементе не может измениться скачкообразно?
6. Что такое начальные условия?

5.2. Классический метод расчёта переходных процессов

Переходные процессы в электрических цепях описываются системой дифференциальных уравнений, составленных на основе законов Ома, Кирхгофа, электромагнитной индукции и др. для состояния цепи после коммутации. Для простых цепей эту систему уравнений можно исключением переменных свести к одному в общем случае неоднородному дифференциальному уравнению относительно какой-либо величины:

$$B_0\frac{d^n a}{dt^n} + B_1\frac{d^{n-1}a}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1}\frac{da}{dt} + B_n a = C \qquad (5.3)$$

В качестве искомой величины выбирают либо ток в индуктивном элементе, либо напряжение на ёмкостном. Порядок уравнения *n* не превышает числа накопителей энергии в цепи (индуктивных и ёмкостных элементов).

Далее решение уравнения ищут в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного дифференциального уравнения

$$a = a_{\text{уст}} + a_{\text{св}}.$$

В качестве частного решения выбирают решение для установившегося режима после коммутации, которое можно найти обычными методами расчёта цепей в установившемся режиме.

Общее решение однородного уравнения

$$B_0 \frac{d^n a}{dt^n} + B_1 \frac{d^{n-1} a}{dt^{n-1}} + \ldots + B_{n-1} \frac{da}{dt} + B_n a = 0 \qquad (5.4)$$

$a_{\text{св}}$ называется *свободной составляющей*, так как это решение соответствует процессам в цепи при отсутствии воздействия на неё источников электрической энергии. Если свободную составляющую представить экспонентой $a_{\text{св}} = Ae^{pt}$ и подставить в уравнение (5.4), то получим:

$$\left(B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + \ldots + B_{n-1} p + B_n\right) Ae^{pt} = 0$$

$$\Downarrow \qquad (5.5)$$

$$B_0 p^n + B_1 p^{n-1} + \ldots + B_{n-1} p + B_n = 0$$

Последнее выражение (5.5) называется *характеристическим уравнением*. Оно получается формальной заменой производных в (5.4) на p^k, где k – порядок соответствующей производной.

Свободная составляющая решения представляет собой сумму *n* линейно независимых слагаемых вида $a_k = A_k e^{p_k t}$,

$$a_{\text{св}} = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{p_k t}. \qquad (5.6)$$

где p_k – корень характеристического уравнения (5.5).

Если в решении уравнения (5.5) есть корни кратности *m*, то соответствующие слагаемые в (5.6) имеют вид

$$a_l = A_l e^{p_l t};\;\; a_{l+1} = tA_{l+1} e^{p_l t};\;\; \ldots\;\; a_{l+m-1} = t^{m-1} A_{l+m-1} e^{p_l t}$$

При получении в решении уравнения (5.5) комплексно сопряженных пар корней, каждой паре корней $p_{q,q+1} = -\delta_q \pm j\omega_q$ в (5.6) будет соответствовать слагаемое вида

$$a_q + a_{q+1} = A_q e^{-\delta_q t} \sin(\omega_q + \psi_q).$$

На последнем этапе решения из начальных условий находят постоянные интегрирования A_k, ψ_q. Для этого определяют значение $a_{\text{св}}(0_+)$ и *n*-1 её производных в начальный момент времени $a'_{\text{св}}(0_+)$, $a''_{\text{св}}(0_+),\ldots a^{(n-1)}_{\text{св}}(0_+)$. Дифференцируя n-1 раз (5.6) и приравнивая полученные выражения начальным значениям, получим систему линейных алгебраических уравнений для определения постоянных интегрирования

$$
\begin{aligned}
&a_{\text{св}}(0_+) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \\
&a'_{\text{св}}(0_+) = p_1A_1 + p_2A_2 + \ldots + p_nA_n \\
&\vdots \\
&a^{(n-1)}_{\text{св}}(0_+) = p_1^{n-1}A_1 + p_2^{n-1}A_2 + \ldots + p_n^{n-1}A_n
\end{aligned}
$$

Вопросы для самопроверки

1. В какой форме ищут решение дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс в цепи?
2. Что такое свободная составляющая решения?
3. Как получить характеристическое уравнение?
4. Какой вид имеют слагаемые свободной составляющей решения при различных корнях характеристического уравнения?
5. Как определяют постоянные интегрирования?

5.3. Переходные процессы в цепи с индуктивным и резистивным элементами

Рассмотрим переходные процессы в цепи с последовательным включением индуктивного и резистивного элементов (рис. 5.2, *а*). Состояние цепи после замыкания ключа S описывается дифференциальным уравнением

$$u_L + u_R = L\frac{di}{dt} + Ri = e \tag{5.7}$$

Общее решение этого уравнения для тока в цепи

$$i = i_{\text{уст}} + i_{\text{св}}. \tag{5.8}$$

Найдём общее решение однородного уравнения

$$L\frac{di_{\text{св}}}{dt} + Ri_{\text{св}} = 0. \tag{5.9}$$

Для этого составим характеристическое уравнение – $Lp + R = 0$ и решим его относительно p – $p = -R/L$. Отсюда свободная составляющая тока – $i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{R}{L}t}$.

Свободная составляющая тока представляет собой экспоненциальную функцию вида $i_{\text{св}} = Ae^{-t/\tau}$, которая изменяется от значения A до нуля за бесконечно большой промежуток времени. Скорость изменения функции определяется величиной $\tau = |1/p| = L/R$, называемой *постоянной времени*. Чем меньше τ, тем быстрее экспонента стремится к нулю. Постоянную времени можно определить также как время, в течение которого функция изменяется

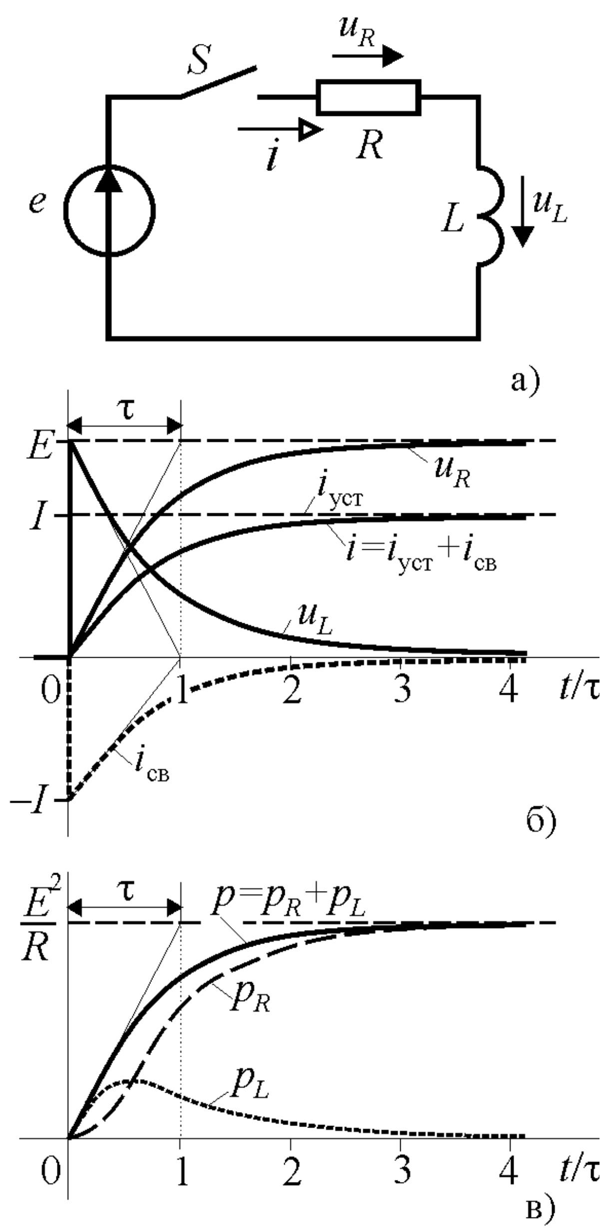

Рис. 5.2

в *e* раз. На графике это отрезок, отсекаемый на оси времени касательной в начальной точке кривой (рис. 5.2, *б*). Теоретически конечное значение экспоненты является асимптотой, поэтому переходный процесс должен продолжаться бесконечно. На самом деле через 3τ, 4τ и 5τ значение тока будет отличаться от нуля на 5,0%, 2% и 0,67%. В технике принято считать *длительностью переходного процесса* время, в течение которого экспоненциальная функция достигает значения, отличающегося от установившегося значения не более чем на 5%, т.е. 3τ. Всеми свойствами функции $e^{-t/\tau}$ обладает также функция вида $1 - e^{-t/\tau}$, с той лишь разницей, что установившимся значением для неё является единица, а не нуль.

В рассматриваемой цепи $\tau = \frac{L}{R} = \frac{2Li^2}{2Ri^2} = 2\frac{w_м}{p}$, т.е. постоянная времени определяет неизменное соотношение между энергией в магнитном поле катушки индуктивности и скоростью её преобразования в активном сопротивлении. Чем больше запас энергии (*L*) и чем медленнее она преобразуется (меньше *R*), тем длительнее переходный процесс в цепи.

Установившееся значение тока $i_{уст}$ определяется в результате расчёта цепи после окончания переходного процесса при заданном значении ЭДС *e*.

Искомый ток протекает в цепи с индуктивным элементом, поэтому для него должен выполняться первый закон коммутации $i(0_-) = i(0_+)$. Определив начальное значение тока $i(0_-)$, мы можем найти постоянную интегрирования *A* из уравнения (5.8) для момента коммутации.

$$i(0_-) = i(0_+) = i_{уст}(0_+) + i_{св}(0_+) = i_{уст}(0_+) + A$$

$$\Downarrow \qquad (5.10)$$

$$A = i(0_-) - i_{уст}(0_+)$$

5.3.1. Подключение цепи к источнику постоянной ЭДС.

В установившемся режиме ток в цепи с постоянной ЭДС не меняется, поэтому $di_{\text{уст}}/dt=0$ и уравнение (5.7) имеет вид $Ri_{\text{уст}}=E$. Отсюда $i_{\text{уст}}=E/R$ и общее решение для тока

$$i=i_{\text{уст}}+i_{\text{св}}=\frac{E}{R}+Ae^{-\frac{R}{L}t}. \tag{5.11}$$

В выражении (5.11) единственной неизвестной величиной является A. Для её определения нужно знать начальное значение тока $i(0_-)$. До коммутации цепь была разомкнута, поэтому $i(0_-)=i(0_+)=0$. Подставляя это значение в (5.10), получим постоянную интегрирования $A=-E/R$ и окончательное выражение для тока

$$i=\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)=I\left(1-e^{-t/\tau}\right). \tag{5.12}$$

Отсюда нетрудно найти напряжения на индуктивном и резистивном элементах

$$u_L=L\frac{di}{dt}=Ee^{-t/\tau};\quad u_R=Ri=E\left(1-e^{-t/\tau}\right). \tag{5.13}$$

На рис. 5.2, *б* приведены графики функций (5.12)-(5.13). После коммутации ток и все напряжения в цепи изменяются по экспонентам с одинаковыми постоянными времени. Напряжение на индуктивном элементе в момент коммутации скачкообразно увеличивается до напряжения источника питания, а затем уменьшается до нуля в конце переходного процесса.

Физический смысл переходного процесса при подключении цепи к источнику электрической энергии заключается в накоплении энергии в магнитном поле катушки. Действительно, энергия магнитного поля $w_{\text{м}}=Li^2/2$ изменяется в ходе процесса в соответствии с изменением тока от нулевого значения до конечной величины $W_{\text{м}}=LI^2/2$, после чего остаётся постоянной.

Мощность, потребляемая от источника ЭДС, и рассеиваемая резистивным элементом в виде тепла равна

$$p_R=Ri^2=\frac{E^2}{R}\left(1-2e^{-t/\tau}+e^{-2t/\tau}\right),$$

а мощность, расходуемая на формирование магнитного поля –

$$p_L=u_Li=\frac{E^2}{R}\left(e^{-t/\tau}-e^{-2t/\tau}\right).$$

В начале процесса (рис. 5.2, *в*) практически вся энергия, потребляемая цепью от источника, накапливается в магнитном поле. Затем всё большая часть её начинает рассеиваться резистивным элементом, а процесс накопления замедляется ($p_L\to 0$), и в установившемся режиме наступает состояние, когда вся энергия источника преобразуется в тепло в резистивном элементе.

5.3.2. Отключение цепи от источника постоянной ЭДС.

Рассмотрим процесс отключения цепи от источника постоянной ЭДС. Пусть идеальный ключ *S* длительное время находился в состоянии 1 так, что переходный процесс, связанный с накоплением энергии индуктивным элементом *L* завершился, а затем переключился в положение 2 (рис. 5.3, а).

После переключения в цепи отсутствует источник электрической энергии, и она описывается однородным дифференциальным уравнением

$$u_L + u_R + u_r = L\frac{di_{\text{св}}}{dt} + (R+r)i_{\text{св}} = 0\,, \tag{5.14}$$

и, следовательно, ток содержит только свободную составляющую $i_{\text{св}} = Ae^{pt}$.

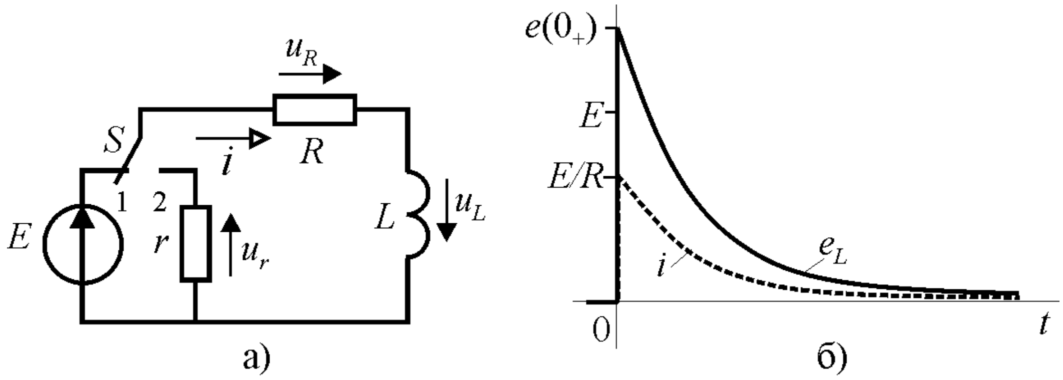

Рис. 5.3

Корнем характеристического уравнения $Lp + (R+r) = 0$ является $p = -(R+r)/L$. Отсюда постоянная времени – $\tau = L/(R+r)$.

Установившееся значение тока в цепи в положении 1 ключа *S* (см. предыдущий раздел) равно начальному значению до и после коммутации $i(0_-) = i(0_+) = E/R$. Из выражения (5.10) с учётом того, что $i_{\text{уст}} = 0$, постоянная интегрирования определится как $A = i(0_-) = E/R$. Отсюда окончательно ток в цепи

$$i = \frac{E}{R}e^{-\frac{R+r}{L}t} = Ie^{-t/\tau}\,. \tag{5.15}$$

После размыкания ключа *S* в цепи начинается переходный процесс, связанный с преобразованием энергии $W_{\text{м}} = LI^2/2$, накопленной в магнитном поле катушки, в тепло, рассеиваемое резистивными элементами *R* и *r*. Процесс преобразования заканчивается при снижении тока до нуля, т.е. при полном рассеянии накопленной энергии.

Определим ЭДС самоиндукции в цепи

$$e = -L\frac{di}{dt} = \frac{R+r}{R}Ee^{-t/\tau}\,. \tag{5.16}$$

Из выражения (5.16) следует, что в момент коммутации на индуктивном элементе возникает ЭДС самоиндукции $e(0_+) = (R + r)E / R$, превосходящая ЭДС источника в $(1 + r / R)$ раз, а на сопротивлении r – падение напряжения $u_r(0_+) = ri(0_+) = Er / R$. Отключение цепи с индуктивным элементом без замыкания на сопротивление эквивалентно условию $r = \infty$, где r – сопротивление разомкнутых контактов ключа. В результате на катушке и на ключе должно возникать бесконечно большое напряжение. На самом деле этого не происходит, т.к. уже при напряжении в несколько киловольт в зазоре контактов выключателя возникает электрическая дуга, которая имеет конечное электрическое сопротивление, снижающее перенапряжения. Тем не менее, это явление представляет большую опасность для оборудования и требует учёта и принятия мер для уменьшения вредных последствий. Самыми распространёнными способами снижения перенапряжений в цепях постоянного тока являются включение конденсатора и резистора параллельно контактам ключа или диода и резистора параллельно катушке индуктивности (рис. 5.4). При размыкании ключа S конденсатор начинает заряжаться (рис. 5.4, *а*), создавая контур для протекания тока параллельно контактам ключа. Эту же функцию выполняет диод на рис. 5.4, *б*. При замкнутом ключе S ЭДС источника смещает диод в отрицательном направлении, в котором он обладает высоким сопротивлением. При размыкании ключа диод смещается в положительном направлении за счёт ЭДС самоиндукции и открывает путь для протекания тока минуя ключ.

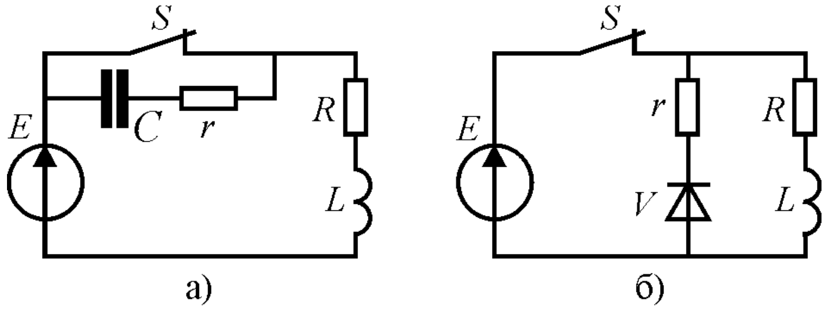

Рис. 5.4

5.3.3. Переходные процессы при периодической коммутации.

Переключения ключа S на схеме рис. 5.3, *а* могут происходить периодически (рис. 5.5) так, что в течение времени t_1 он находится в положении 1, а в течение остальной части периода $T - t_1$ – в положении 2. Отношение $0 \le \gamma = t_1 / T \le 1{,}0$ называется *скважностью*.

На первом интервале происходит подключение цепи к источнику ЭДС и переходный процесс будет аналогичен рассмотренному в разделе 5.3.1. На втором интервале RL цепь отключается от источника электрической энергии и замыкается на сопротивление r. Переходный процесс при этом аналогичен рассмотренному в разделе 5.3.2. Постоянная времени цепи на первом интервале равна $\tau_1 = L / R$, а на втором – $\tau_2 = L / (R + r)$. Отличие переходных процессов при периодической коммутации заключается только в том, что начальные условия в них могут быть ненулевыми.

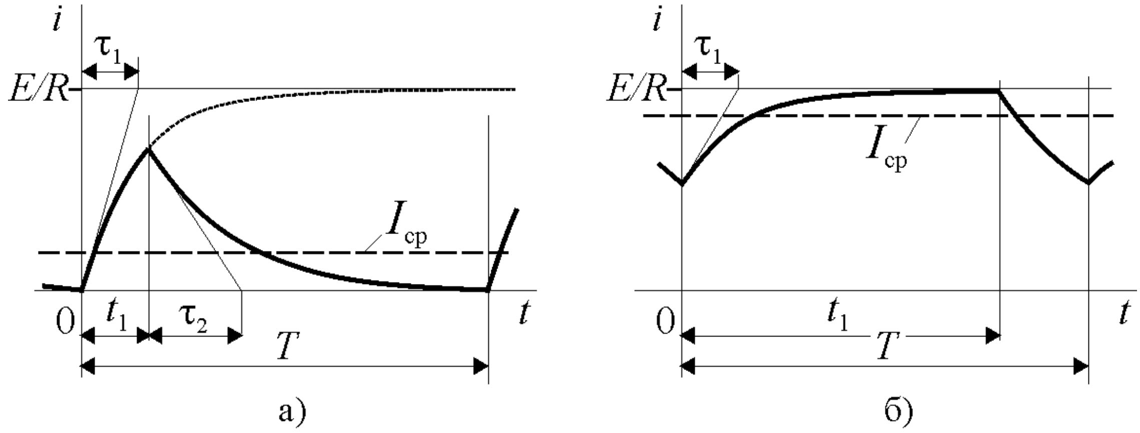

Рис. 5.5

При малой длительности первого интервала ($t_1 < 3\tau_1$) ключ S переключится с положение 2 до того как ток в цепи достигнет установившегося значения E/R (рис. 5.5, *а*). После этого начнется процесс рассеяния энергии накопленной в магнитном поле к моменту переключения $w_{\text{м}} = Li_1(t_1)^2/2$, где $i_1(t_1)$ – значение тока в цепи на границе первого интервала. Если $T - t_1 > 3\tau_2$, то к концу периода ток в цепи снизится практически до нуля. Такой режим коммутации называется *режимом прерывистого тока*. В случае $T - t_1 < 3\tau_2$ (рис. 5.5, *б*) накопленная в магнитном поле энергия не сможет рассеяться на втором интервале. Тогда начальные условия для первого интервала будут ненулевыми $0 < i_1(0_+) = i_2(T - t_1) < E/R$ и ток в цепи на всём периоде не будет снижаться до нуля. Этот режим коммутации называется *режимом непрерывного тока*.

На рис. 5.5 штриховой линией показаны средние значения тока в цепи. При изменении скважности в пределах $0 \le \gamma \le 1{,}0$ среднее значение тока изменяется от нуля до E/R. Таким образом, в цепи с индуктивным элементом можно регулировать ток с помощью ключа, изменяя значение γ. Этот способ регулирования тока называется *широтно-импульсным*, а устройство, реализующее его, – *широтно-импульсным регулятором тока*.

5.3.4. Подключение цепи к источнику синусоидальной ЭДС.

Для анализа переходного процесса, возникающего при подключении RL цепи к источнику синусоидальной ЭДС, в правую часть уравнения (5.7) нужно подставить соответствующую функцию. Пусть действующая в цепи ЭДС равна $e = E_m \sin \omega t$. Тогда установившееся значение тока можно найти по закону Ома как

$$i_{уст} = I_m \sin(\omega t - \varphi), \tag{5.17}$$

где: $I_m = E_m / Z$, а $-Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$; $\varphi = \operatorname{arctg}(\omega L / R)$

Свободная составляющая тока не зависит от вида источника энергии воздействующего на цепь и равна $i_{\text{св}} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-t/\tau}$.

До замыкания ключа S ток в цепи был нулевым, поэтому, в соответствии с первым законом коммутации – $i(0_-) = i(0_+) = 0$.

Пусть коммутация произошла в момент времени $t_\alpha = \alpha/\omega$, соответствующий фазовому углу α (рис. 5.6). Тогда установившееся значение в момент коммутации равно $i_{уст}(t_\alpha) = i_{уст}(0_+) = I_m \sin(\omega t_\alpha - \varphi) = I_m \sin(\alpha - \varphi)$. Подставляя это значение в (5.10), получим постоянную интегрирования $A = -I_m \sin(\alpha - \varphi)$ и окончательное выражение для тока в переходном процессе:

$$i = i_{уст} + i_{\text{св}} = I_m \sin(\omega t - \varphi) - I_m \sin(\alpha - \varphi)e^{-t/\tau}. \qquad (5.18)$$

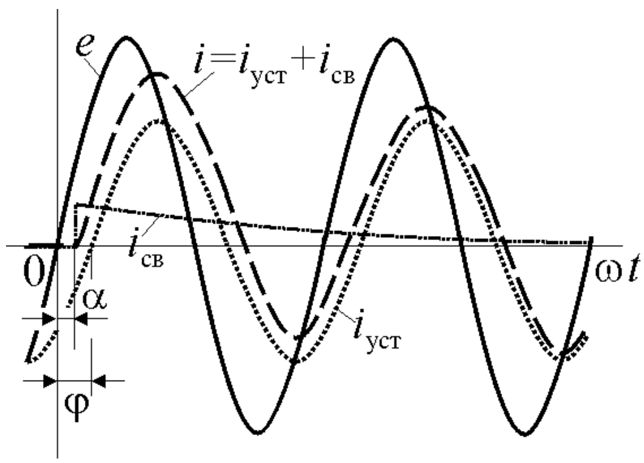

Рис. 5.6

Из выражения (5.18) следует, что ток в цепи при переходном процессе в общем случае представляет собой затухающие колебания с частотой ЭДС ω (рис. 5.6). Однако в случае подключения цепи в момент времени $t_\alpha = \varphi/\omega$, т.е. в момент, когда угол включения $\alpha = \varphi$ и значение установившегося тока равно нулю, переходного процесса в цепи не будет и сразу наступит установившийся режим. Наихудшие условия переходного процесса возникают в цепи при подключении её в момент $t_\alpha = (\varphi \pm \pi/2)/\omega$, т.е. когда угол включения $\alpha = \varphi \pm \pi/2$. В этом случае при условии $\tau > T$ ток примерно через половину периода достигает почти двукратного амплитудного значения установившегося режима. Этот ток называется *сверхтоком* и может вызывать опасные перенапряжения. Сверхтоки возникают при включении трансформаторов, двигателей переменного тока, реле, контакторов и других устройств с большой индуктивностью и требуют принятия мер по снижению их влияния на работу оборудования.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равна постоянная времени RL цепи?
2. Как определяют длительность переходного процесса?
3. Как влияет увеличение (уменьшение) величины индуктивности (сопротивления) на длительность переходного процесса?
4. Поясните физический смысл постоянной времени.

5. Чему равно установившееся значение тока в (напряжения на) индуктивности при подключении цепи к источнику ЭДС?
6. Что происходит с энергией магнитного поля при отключении цепи от источника?
7. Какие проблемы возникают при отключении цепи и как они решаются?
8. Как протекают переходные процессы при периодической коммутации?
9. При каком условии ток в цепи при периодической коммутации будет непрерывным?
10. Что такое широтно-импульсный регулятор тока?
11. При каком условии переходный процесс при подключении *RL* цепи к источнику синусоидальной ЭДС будет отсутствовать?
12. Что такое сверхток и при каком условии он возникает?

5.4. Переходные процессы в цепи с ёмкостным и резистивным элементами

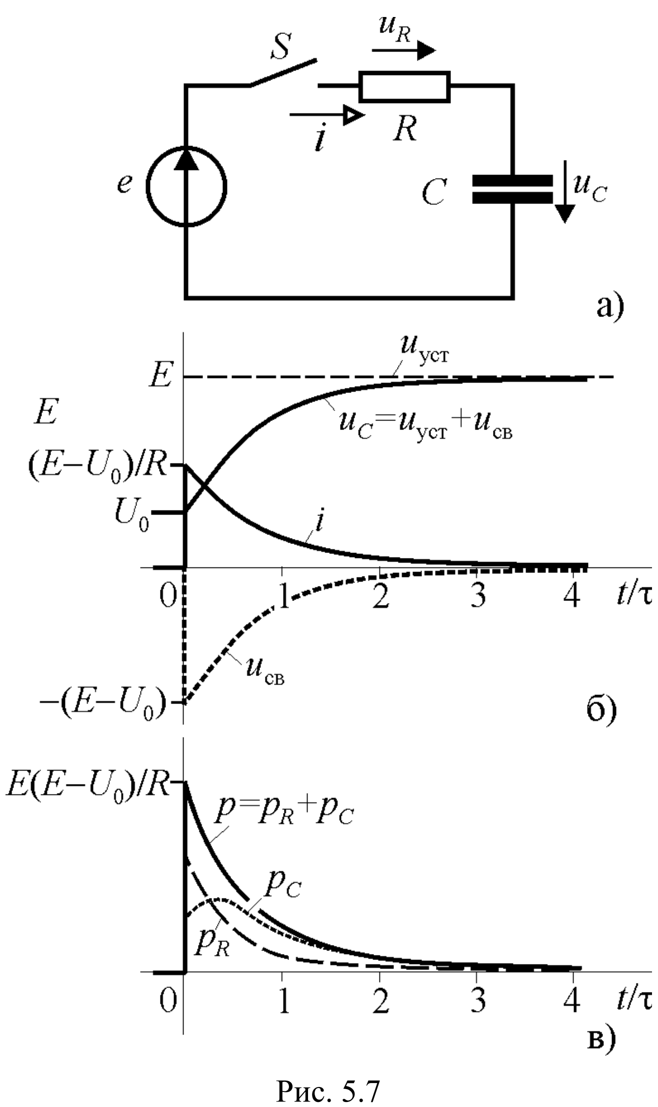

Рис. 5.7

Переходные процессы в цепи с последовательным включением ёмкостного и резистивного элементов (рис. 5.7, *а*) после замыкания ключа *S* описываются дифференциальным уравнением

$$u_R + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e \tag{5.19}$$

Общее решение этого уравнения для напряжения на ёмкости

$$u_C = u_{уст} + u_{св}. \tag{5.20}$$

Найдём общее решение однородного уравнения

$$RC\frac{du_{св}}{dt} + u_{св} = 0. \tag{5.21}$$

Для этого составим характеристическое уравнение – $RCp + 1 = 0$ и решим его относительно p – $p = -1/(RC)$. Отсюда свободная составляющая напряжения –

$$u_{\text{св}} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-t/\tau}. \qquad (5.22)$$

Постоянная времени цепи $\tau = RC = 2\dfrac{R}{u_C^2} \cdot \dfrac{Cu_C^2}{2} = 2\dfrac{w_{\text{э}}}{p}$, определяет соотношение между энергией электрического поля конденсатора $w_{\text{э}}$ и скоростью её преобразования в активном сопротивлении при его разряде *p*. Чем больше запас энергии (*C*) и чем медленнее она преобразуется (больше *R*), тем длительнее переходный процесс в цепи.

Установившееся значение напряжения на ёмкостном элементе $u_{\text{уст}}$ определяется в результате расчёта цепи после окончания переходного процесса при заданном значении ЭДС *e*.

Для искомого напряжения должен выполняться второй закон коммутации $u_C(0_-) = u_C(0_+)$. Определив начальное значение напряжения $u_C(0_-)$, мы можем найти постоянную интегрирования *A* из уравнения (5.20) для момента коммутации.

$$\begin{gathered} u_C(0_-) = u_C(0_+) = u_{\text{уст}}(0_+) + u_{\text{св}}(0_+) = u_{\text{уст}}(0_+) + A \\ \Downarrow \\ A = u_C(0_-) - u_{\text{уст}}(0_+) \end{gathered} \qquad (5.23)$$

<u>5.4.1. Подключение цепи к источнику постоянной ЭДС.</u>

Для цепи с источником постоянной ЭДС $e = E = \text{const}$ уравнение (5.19) имеет вид $RC\dfrac{du_C}{dt} + u_C = E$. Но в установившемся режиме в цепи с постоянной ЭДС напряжение на ёмкости не меняется, поэтому $du_{\text{уст}}/dt = 0$ и $u_{\text{уст}} = E$. Отсюда с учётом (5.22) общее решение для напряжения

$$u_C = u_{\text{уст}} + u_{\text{св}} = E + Ae^{-t/\tau}. \qquad (5.24)$$

Для определения постоянной интегрирования *A* нужно знать начальное значение напряжения $u_C(0_-)$. До коммутации цепь была разомкнута, но ёмкость могла быть заряжена до некоторого напряжения $u_C(0_-) = U_0$, а т.к. ёмкостный элемент в схеме замещения идеальный, то его заряд при разомкнутой цепи может сохраняться сколь угодно долго. Подставляя начальное значение напряжения в (5.23), получим постоянную интегрирования $A = U_0 - E$ и окончательное выражение для напряжения

$$u_C = E - (E - U_0)e^{-t/\tau} = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) + U_0 e^{-t/\tau}. \qquad (5.25)$$

Отсюда нетрудно найти ток в цепи

$$i = C\frac{du_C}{dt} = \frac{E - U_0}{R}e^{-t/\tau}. \qquad (5.26)$$

На рис. 5.7, *б* приведены графики функций (5.22), (5.25)-(5.26). После коммутации ток в цепи скачкообразно увеличивается до значения, определяемого сопротивлением цепи и разностью потенциалов источника и начального напряжения на ёмкости, а затем уменьшается до нуля в конце переходного процесса.

Физический смысл переходного процесса при подключении цепи к источнику электрической энергии заключается в накоплении заряда на обкладках и энергии в электрическом поле конденсатора. Из выражения (5.25) для $t=0$ и $t=\infty$ следует, что в переходном процессе энергия электрического поля $w_э = Cu_C^2/2$ изменяется от $W_{э1} = CU_0^2/2$ до величины $W_{э1} = CE^2/2$. После чего остаётся постоянной.

Мощность, потребляемая от источника ЭДС, и рассеиваемая резистивным элементом в виде тепла равна

$$p_R = Ri^2 = \frac{\left(E-U_0\right)^2}{R} e^{-2t/\tau},$$

а мощность, расходуемая на формирование электрического поля –

$$p_C = u_C i = \frac{E-U_0}{R}\left[Ee^{-t/\tau} - \left(E-U_0\right)e^{-2t/\tau}\right].$$

После коммутации (рис. 5.7, *в*) значительная часть энергии, потребляемой цепью от источника, рассеивается в виде тепла в резистивном элементе. Но т.к. постоянная времени этого процесса в два раза меньше, чем $\tau = RC$, то он быстро затухает ($p_R \to 0$) и основная часть мощности далее расходуется на изменение состояния электрического поля, пока ёмкость по окончании переходного процесса не будет заряжена до величины ЭДС ($u_C(\infty) = E$).

<u>5.4.2. Разрядка конденсатора через резистор.</u>

Рассмотрим процесс разрядки предварительно заряженного конденсатора. Пусть идеальный ключ *S* длительное время находился в состоянии 1 так, что переходный процесс, связанный с накоплением заряда ёмкостным элементом *C* завершился, а затем переключился в положение 2 (рис. 5.8, а). К моменту коммутации ключа *S* напряжение конденсатора будет равно

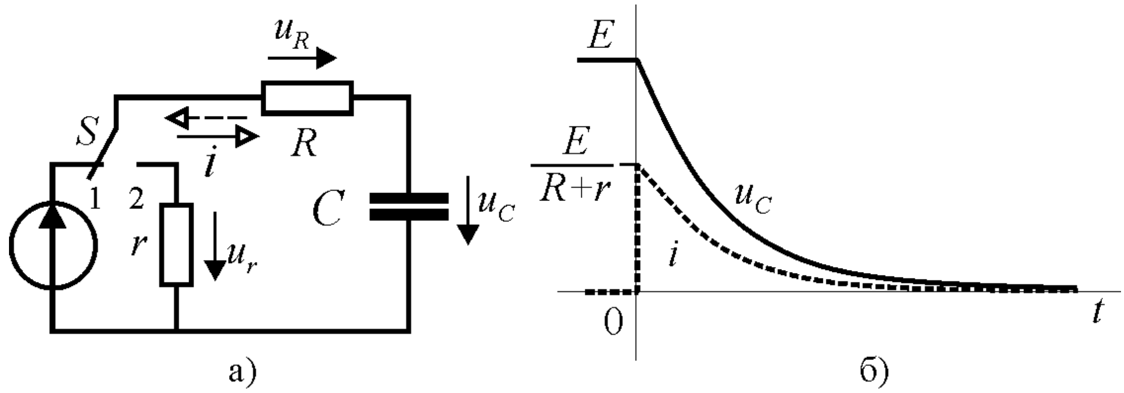

Рис. 5.8

$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E$ (см. предыдущий раздел).

После переключения конденсатор оказывается замкнутым последовательно соединёнными резистивными элементами R и r и через них протекает ток разрядки. Направление протекания тока при разрядке противоположно направлению тока при зарядке и показано на рис. 5.8, *а* штриховой стрелкой. В цепи отсутствует источник электрической энергии, поэтому переходный процесс закончится после того, как вся энергия электрического поля конденсатора $W_э = CE^2/2$ будет преобразована в тепло в резистивных элементах цепи. В этом состоянии ток в цепи прекратится, и напряжение на конденсаторе будет нулевым $W_э = 0 \Rightarrow u_C = 0$. Следовательно, установившееся значение напряжения будет нулевым $u_{уст} = 0$, и напряжение будет содержать только свободную составляющую $u_{св} = Ae^{pt}$.

Свободную составляющую напряжения найдём в результате решения однородного дифференциального уравнения для состояния цепи после коммутации

$$(R+r)C\frac{du_{св}}{dt} + u_{св} = 0. \qquad (5.27)$$

Характеристическое уравнение для (5.27) – $(R+r)Cp + 1 = 0$. Оно имеет корень $p = -1/\left[(R+r)C\right]$. Отсюда постоянная времени – $\tau = (R+r)C$.

Подставляя начальное и установившееся значения в (5.23) получим постоянную интегрирования $A = E$. Отсюда окончательно напряжение на ёмкостном элементе

$$u_C = Ee^{-\frac{t}{(R+r)C}} = Ee^{-t/\tau}. \qquad (5.28)$$

Теперь можно определить ток в цепи

$$i = -C\frac{du_C}{dt} = \frac{E}{R+r}e^{-t/\tau}. \qquad (5.29)$$

Из выражений (5.28)-(5.29) следует, что напряжение на ёмкостном элементе при переходном процессе монотонно изменяется от ЭДС источника до нуля, а ток в цепи в момент коммутации скачкообразно возрастает до значения $i(0_+) = E/(R+r)$, а затем также монотонно снижается до нуля (рис. 5.8, *б*).

5.4.3. Переходные процессы при периодической коммутации.

Режим периодической коммутации, аналогичный рассмотренному для *RL* цепи, возможен в схеме рис. 5.8, *а*. На первом интервале происходит подключение цепи к источнику ЭДС и зарядка конденсатора с постоянной времени $\tau_1 = RC$ (см. раздел 5.4.1). На втором интервале *RC* цепь отключается от источника электрической энергии и происходит разрядка конденсатора с постоянной времени $\tau_2 = (R+r)C$ (см. раздел 5.4.2).

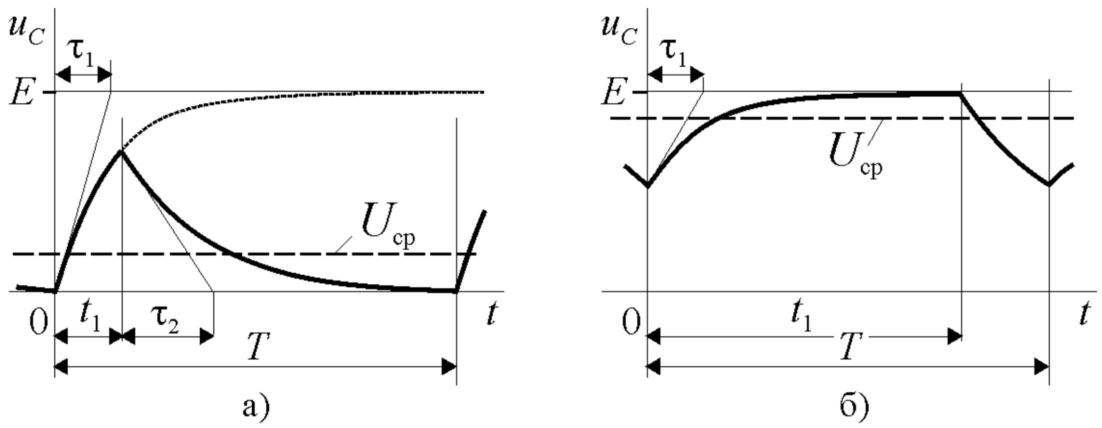

Рис. 5.9

При малой длительности первого интервала ($t_1 < 3\tau_1$) ключ S переключится с положение 2 до того как напряжение на ёмкостном элементе достигнет значения E (рис. 5.9, *а*). После переключения начнется процесс рассеяния энергии накопленной в электрическом поле к этому моменту $w_э = Cu_{C1}(t_1)^2/2$, где $u_{C1}(t_1)$ – напряжение на ёмкости на границе первого интервала. Если $T - t_1 > 3\tau_2$, то к концу периода напряжение u_{C2} снизится практически до нуля (рис. 5.9, *а*). В случае $T - t_1 < 3\tau_2$ (рис. 5.9, *б*) накопленная в конденсаторе энергия не сможет рассеяться на втором интервале. Тогда начальные условия для первого интервала будут ненулевыми $0 < u_{C1}(0_+) = u_{C2}(T - t_1) < E$.

На рис. 5.9 штриховой линией показаны средние значения напряжения u_C. При изменении скважности в пределах $0 \le \gamma \le 1{,}0$ среднее значение напряжения изменяется от нуля до E. Если параллельно конденсатору подключить некоторую нагрузку, то напряжение на ней можно регулировать изменением значения γ, т.е. *широтно-импульсным способом*, и рассмотренное устройство будет простейшим *широтно-импульсным регулятором напряжения*.

Вопросы для самопроверки

1. Чему равна постоянная времени *RC* цепи?
2. Как влияет увеличение (уменьшение) величины ёмкости (сопротивления) на длительность переходного процесса?
3. Чему равно установившееся значение напряжения на (тока в) ёмкости при подключении цепи к источнику ЭДС?
4. Что происходит с энергией электрического поля при разрядке конденсатора через резистор?
5. Чем ограничивается ток в первый момент времени при разрядке конденсатора через резистор?

6. Как протекают переходные процессы при периодической коммутации?
7. При каком условии напряжение на конденсаторе при периодической коммутации не будет спадать до нуля?
8. Что такое широтно-импульсный регулятор напряжения?

5.5. Разрядка конденсатора через катушку индуктивности

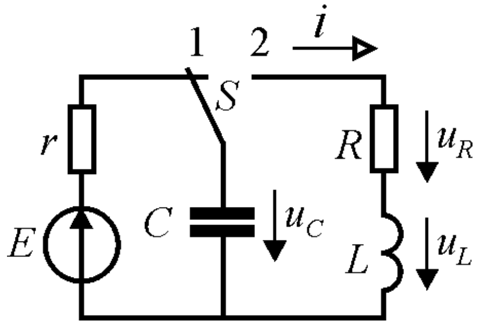

Рис. 5.10

Для получения импульсов напряжения в различных устройствах часто используется процесс разрядки конденсатора через катушку индуктивности. Если потери в конденсаторе незначительны, то его можно представить на схеме замещения идеальным ёмкостным элементом. Тогда схема цепи с катушкой индуктивности, потери в которой учитываются резистивным элементом, будет иметь вид рис. 5.10.

Пусть конденсатор C был предварительно заряжен до напряжения E источника, а затем ключ S переведён в положение 2.

После коммутации ёмкостный элемент оказывается подключённым к последовательной RL цепи и начинается процесс разрядки, в ходе которого энергия, накопленная в ёмкостном элементе, частично преобразуется в энергию магнитного поля индуктивного элемента, а частично рассеивается в виде тепла в резистивном элементе. Процесс обмена энергией между электрическим полем ёмкостного элемента и магнитным полем индуктивного элемента продолжается до тех пор, пока вся энергия этих полей не будет рассеяна резистивным элементом. В результате в цепи установится нулевой ток при нулевом напряжении на ёмкостном элементе.

Уравнение Кирхгофа для контура цепи после коммутации с учётом направлений тока и напряжений на элементах имеет вид:

$$u_R + u_L - u_C = Ri + L\frac{di}{dt} - u_C = 0\,. \tag{5.30}$$

Направления тока и напряжения на ёмкостном элементе противоположны, т.к. ток в цепи это ток разрядки конденсатора, поэтому $i = -C\dfrac{du_C}{dt}$. Подставляя это выражение в (5.30), получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$L\frac{d^2u_C}{dt^2} + R\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{C} = 0\,. \tag{5.31}$$

Характеристическим уравнением для (5.31) будет уравнение:

$$Lp^2 + Rp + 1/C = 0\,, \tag{5.32}$$

имеющее два корня –

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \\ = \delta\left[-1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2\rho}{R}\right)^2}\right], \qquad (5.33)$$

где $\delta = \dfrac{R}{2L}$ – коэффициент затухания; $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ и $\rho = \sqrt{L/C}$ – резонансная частота и характеристическое сопротивление контура разрядки.

Общее решение уравнения (5.31) для напряжения на емкостном элементе имеет вид:

$$u_C = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}. \qquad (5.34)$$

Отсюда решение для тока в цепи

$$i = -C\frac{du_C}{dt} = -C\left(p_1 A_1 e^{p_1 t} + p_2 A_2 e^{p_2 t}\right). \qquad (5.35)$$

В зависимости от параметров элементов цепи переходный процесс может иметь различный характер.

Если $R > 2\rho$, то подкоренное выражение в (5.33) вещественное, оба корня также вещественные отрицательные и переходный процесс имеет апериодический характер, т.е. функции (5.34) и (5.35) представляют собой сумму двух экспонент с различными постоянными времени $\tau_1 = |1/p_1| > \tau_2 = |1/p_2|$.

Если $R < 2\rho$ – корни характеристического уравнения комплексные сопряжённые:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_c,$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$. (5.36)

Решением дифференциального уравнения при комплексных сопряжённых корнях являются периодические синусоидальные функции, поэтому переходный процесс в этом случае имеет колебательный характер.

Подставляя корни характеристического уравнения в (5.34), а затем, дифференцируя полученное выражение, получим общий вид решения для напряжения и тока:

$$u_C = e^{-\delta t}\left(A_1 e^{j\omega_c t} + A_2 e^{-j\omega_c t}\right); \\ i = -Ce^{-\delta t}\left[-\delta\left(A_1 e^{j\omega_c t} + A_2 e^{-j\omega_c t}\right) + j\omega_c\left(A_1 e^{j\omega_c t} - A_2 e^{-j\omega_c t}\right)\right]. \qquad (5.37)$$

В случае $R = 2\rho$ корни кратные и переходный процесс будет также апериодическим.

5.5.1. Апериодический переходный процесс.

Для получения решения дифференциального уравнения (5.31) нужно определить постоянные интегрирования A_1 и A_2. Для этого нужно знать начальные условия, т.е. ток в индуктивном элементе и напряжение на ёмкостном элементе в момент коммутации. При общем описании процесса было установлено, что до перевода ключа в положение 2 ёмкость была заряжена до значения ЭДС источника, т.е. $u_C(0_-) = u_C(0+) = E$, и ток в индуктивном элементе отсутствовал $i(0_-) = i(0+) = 0$, т.к. его цепь была разомкнута.

Подставляя начальные условия в уравнения (5.34) и (5.35) при $t = 0$, получим систему уравнений для определения постоянных интегрирования:

$$u_C(0_-) = E = u_C(0+) = A_1 + A_2$$

$$i(0_-) = 0 = i(0+) = -C(p_1 A_1 + p_2 A_2)$$

$$\Downarrow$$

$$A_1 + A_2 = E$$

$$p_1 A_1 + p_2 A_2 = 0$$

Отсюда

$$A_1 = -\frac{p_2 E}{p_1 - p_2}; \quad A_2 = \frac{p_1 E}{p_1 - p_2},$$

и окончательное решение для напряжения и тока:

$$u_C = \frac{E}{p_1 - p_2}\left(p_1 e^{p_2 t} - p_2 e^{p_1 t}\right);$$
$$i = \frac{E}{L(p_1 - p_2)}\left(e^{p_1 t} - e^{p_2 t}\right). \tag{5.38}$$

Из выражения (5.38) для тока можно найти напряжение на индуктивном элементе:

$$u_L = \frac{E}{p_1 - p_2}\left(p_2 e^{p_2 t} - p_1 e^{p_1 t}\right). \tag{5.39}$$

Функции (5.38)-(5.39) представляют собой разности двух экспонент с различными постоянными времени. На рисунке 5.11, *а* показаны эти кривые, а для тока приведены также составляющие его экспоненты i_1 и i_2. После быстрого затухания второй экспоненты характер переходного процесса и его длительность опреде-

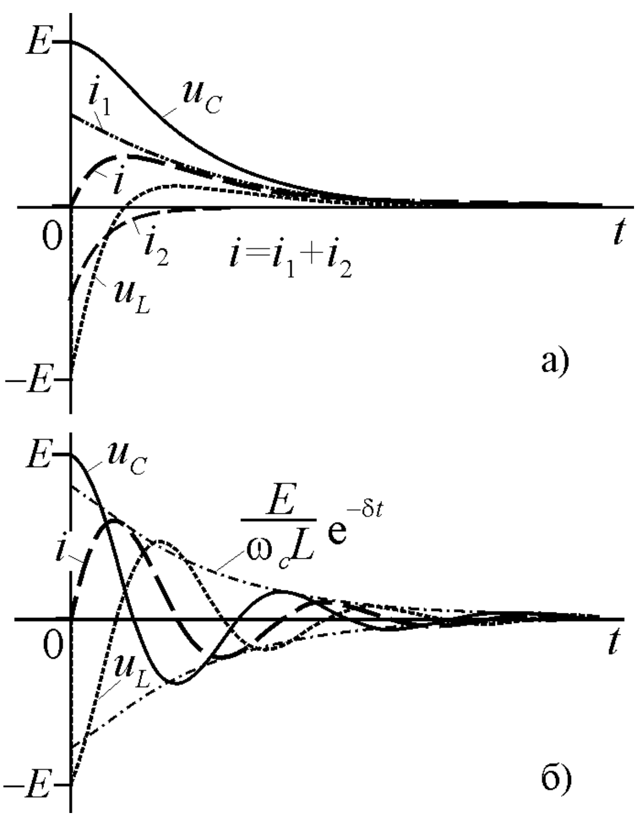

Рис. 5.11

ляются практически первой экспонентой. Ток и напряжение на емкостном элементе в течение всего переходного процесса остаются положительными, а напряжение на индуктивном элементе меняет знак, но все функции имеют апериодический (непериодический) характер.

Ток в цепи вначале возрастает и имеет максимум, а затем уменьшается до нуля. Такой же характер имеет и количество энергии в магнитном поле катушки. Это значит, что в начале процесса разрядки энергия электрического поля конденсатора частично преобразуется в энергию магнитного поля катушки, а затем после максимума тока происходит монотонное рассеяние энергии обоих полей в резистивном элементе.

5.5.2. Колебательный переходный процесс.

Для определения постоянных интегрирования при колебательном процессе используем те же начальные условия $u_C(0\_) = u_C(0+) = E$ и $i(0\_) = i(0+) = 0$. Подставляя их в (5.37), получим

$$A_1 + A_2 = E$$

$$\delta\left(A_1 + A_2\right) - j\omega_c\left(A_1 - A_2\right) = 0$$

Отсюда

$$A_1 = \frac{E}{2\omega_c}(\omega_c - j\delta); \quad A_2 = \frac{E}{2\omega_c}(\omega_c + j\delta),$$

и далее из (5.37), используя формулу Эйлера, –

$$u_C = \frac{E}{\omega_c} e^{-\delta t}\left(\omega_c \cos\omega_c t + \delta \sin\omega_c t\right);$$

$$i = \frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t} \sin\omega_c t. \qquad (5.40)$$

Дифференцируя выражение для тока, получим напряжение на индуктивном элементе

$$u_L = \frac{E}{\omega_c} e^{-\delta t}\left(\omega_c \cos\omega_c t - \delta \sin\omega_c t\right). \qquad (5.41)$$

Частота собственных затухающих колебаний цепи ω_c, коэффициент затухания δ и резонансная частота ω_0 связаны между собой соотношениями прямоугольного треугольника (5.36). Поэтому если принять $\mathrm{tg}\beta = \delta/\omega_c$, то $\omega_c = \omega_0 \cos\beta$; $\delta = \omega_0 \sin\beta$ и выражения для напряжений на реактивных элементах можно представить в виде:

$$u_C = E\frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \cos(\omega_c t - \beta);$$

$$u_L = -E\frac{\omega_0}{\omega_c} e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \beta). \qquad (5.42)$$

Функции (5.42) и кривая тока показаны на рис. 5.11, *б*. Они представляют собой затухающие синусоидальные колебания. Скорость затухания определяется коэффициентом δ. На рисунке показаны также огибающие амплитуд тока $\frac{E}{\omega_c L} e^{-\delta t}$.

Переход к колебательному переходному процессу от апериодического происходит при уменьшении сопротивления контура R как следствие замедления рассеяния энергии резистивным элементом цепи. В результате в контуре возникает периодический обмен энергией между полями аналогичный обмену при резонансе, но, в отличие от резонанса, где потери энергии в цепи восполнялись внешним источником, здесь процесс обмена сопровождается необратимым рассеянием и постепенным затуханием колебаний. Помимо затухания колебаний рассеяние энергии проявляется в их частоте ω_c, которая меньше резонансной частоты цепи ω_0 и приближается к ней по мере уменьшения δ. Теоретически частота колебаний будет равна резонансной при нулевом сопротивлении контура. В этом случае в цепи установится режим незатухающих колебаний при отсутствии внешнего источника энергии.

Вопросы для самопроверки

1. Какие параметры определяют характер переходного процесса при разрядке?
2. Как протекает переходный процесс при апериодической разрядке конденсатора?
3. Как происходит преобразование энергии, накопленной в электрическом поле конденсатора, при апериодической разрядке через катушку индуктивности?
4. Как протекает переходный процесс при колебательном характере переходного процесса разрядки конденсатора?
5. Как происходит преобразование энергии, накопленной в электрическом поле конденсатора, при колебательном характере переходного процесса разрядки конденсатора?
6. В каком случае частота колебаний тока при разрядке конденсатора будет равна резонансной частоте контура разрядки?