## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

# Потоки в сетях

Рассмотрим задачу максимизации потока некоторого продукта по сети. Подобного рода задачи возникают при организации перекачки нефти или газа по трубопроводам, железнодорожного или автомобильного движения, передачи информации по сетям и т.д.

Приведём необходимые определения, формализующие соответствующие предметные области.

**Сетью** называется ориентированный граф без циклов с помеченными вершинами и дугами. Числа, которыми помечаются дуги сети, называются **пропускными способностями** дуг.

Примеры вершин сети: перекрёстки дорог, телефонные узлы, железнодорожные узлы, аэропорты, склады и т.д.

Примеры дуг сети: дороги, трубы, телефонные и железнодорожные линии и т.д.

Сеть, у которой существует ровно один **исток**[[1]](#footnote-1) и один **сток**[[2]](#footnote-2), называется **транспортной сетью**.

Пример транспортной сети:



**Потоком** в транспортной сети называется неотрицательная функция, определённая на множестве дуг сети, удовлетворяющая двум условиям:

1. величина потока по каждой дуге не превосходит её пропускной способности;
2. сумма потоков, входящих в каждую вершину сети, за исключением истока и стока, равна сумме потоков, выходящих из вершины.

**Величина потока** есть сумма потоков, выходящих из истока, или сумма потоков, входящих в сток сети.

Пример потока в транспортной сети:



Для любой транспортной сети величина потока имеет максимальное значение, которое определяется теоремой Форда – Фалкерсона, которая утверждает, что величина максимального потока в сети равна величине минимального разреза, где

**разрезом транспортной сети** называется такое множество дуг, удаление которых отделяет исток от стока.

**минимальным разрезом транспортной сети** называется разрез с минимальной пропускной способностью.

Пример. Транспортная сеть



имеет два разреза  и . Пропускная способность первого разреза равна 11 (7+4), а второго – 9 (4+5), поэтому максимальный поток в этой транспортной сети равен 9 = min(11, 9). Этот максимальный поток указан в круглых скобках.

## 4.1. Алгоритм построения максимального потока в транспортной сети

**Цепью, соединяющей исток** A0 **со стоком** An, (или просто **цепью**) в транспортной сети называется последовательность дуг A0A1, …, An‑1An, в которой вершина Ai является началом i-ой дуги, а вершина Ai+1 – её концом (или, наоборот, Ai является концом i-ой дуги, а вершина Ai+1 – её началом).

Например, в следующей сети с заданным в скобках потоком



цепями являются последовательности AB, BC, CD и AC, CB, BD, причём в первой цепи направление дуги BC совпадает с направлением потока, а во второй цепи направление дуги CB противоположно направлению потока.

Определение. Дуга цепи называется **допустимой дугой**, если:

1. направление дуги совпадает с направлением потока и поток по этой дуге меньше её пропускной способности;
2. направление дуги противоположно направлению потока и поток по этой дуге больше нуля.

**Цепь**, соединяющая исток сети со стоком, называется **увеличивающей**, если все её дуги являются допустимыми.

**Алгоритм построения максимального потока в сети**

1. Если поток в сети не задан,

то считать поток нулевым.

2. Пока в сети есть увеличивающие цепи повторять:

* взять любую увеличивающую цепь,
* вычислить наименьшую разность δ между пропускными способностями дуг этой цепи и потоками по этим дугам,
* потоки по дугам, направление которых совпадает с направлением потока, увеличить на δ,
* потоки по дугам, направление которых противоположно направлению потока, уменьшить на δ,

3. Если в сети нет увеличивающих цепей,

то максимальный поток построен.

**Пример 1** (Поток в сети не задан). Построить максимальный поток для заданной транспортной цепи.

|  |  |
| --- | --- |
| Данная сеть: | Сеть с нулевым потоком: |
|  |  |

Решение.

1. Поток в сети не задан, считаем его нулевым.

2. Пока в сети есть увеличивающие цепи, повторяем:

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AB, BD, DF;направление дуг совпадает с направлением потока,δ = min(9 – 0, 6 – 0, 10 – 0) = 6. | Новые потоки по дугам цепи:AB: 0+6=6, BD: 0+6 = 6,DF: 0+6=6: |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AB, BE, EF;направление дуг совпадает с направлением потока,δ = min(9 – 6, 3 – 0, 7 – 0) = 3. | Новые потоки по дугам цепи:AB: 6 + 3 = 9, BE: 0 + 3 = 3,EF: 0 + 3 = 3: |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AC, CE, ED, DF;направление дуг совпадает с направлением потока,δ = min(8 – 0, 4 – 0, 4 – 0, 10 – 6) = 4. | Новые потоки по дугам цепи:AC: 0 + 4 = 4, CE: 0 + 4 = 4,ED: 0 + 4 = 4, DF: 6 +4 = 10: |
|  |  |

Увеличивающих цепей в сети нет, поэтому максимальный поток построен и он равен 13 = 9 + 4 = 10 + 3.

**Пример 2** (Поток в сети задан). Построить максимальный поток для заданной транспортной цепи.

|  |
| --- |
| Сеть с заданным потоком: |
|  |

Решение.

1. Поток в сети задан.

2. Пока в сети есть увеличивающие цепи, повторяем:

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AB, BD, DE, EF;направление дуги DE противоположно потоку, направление остальных дуг совпадает с направлением потока,δ = min(9 – 6, 6 – 3, 4 – 2, 7 – 4) = 2. | Новые потоки по дугам цепи:AB: 6 + 2 = 8, BD: 3 + 2 = 5,DE: 2 – 2 = 0, EF: 4 + 2 = 6: |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AB, BD, DF;направление дуг совпадает с направлением потока,δ = min(9 – 8, 6 – 5, 10 – 5) = 1. | Новые потоки по дугам цепи:AB: 8 + 1 = 9, BD: 5 + 1 = 6,DF: 5 + 1 = 6: |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Увеличивающая цепь: AC, CE, EF;направление дуг совпадает с направлением потока,δ = min(8 – 3, 4 – 3, 7 – 6) = 1. | Новые потоки по дугам цепи:AC: 3+ 1 = 4, CE 3+ 1 = 4,EF: 6 + 1 = 7: |
|  |  |

Увеличивающих цепей в сети нет, поэтому максимальный поток построен и он равен 13 = 9 + 4 = 10 + 3.

Примечание. Обратите внимание на то, что сети в примерах 1 и 2 и максимальные потоки по ним совпадают, а потоки по некоторым дугам различаются, например, в примере 1 поток по дуге DF равен 10, а в примере 2 по этой же дуге равен 6.

## 4.2. Построение максимального потока в сетях с неориентированными дугами

Для построения максимального в сетях с неориентированными дугами поступают следующим образом:

* каждую неориентированную дугу (ребро) сети, не выходящую из источника и не входящую в сток, заменяют парой противоположно направленных дуг с той же пропускной способностью, что и заменяемое ребро;
* каждую неориентированную дугу с началом в источнике заменяют на ориентированную, выходящую из источника;
* каждую неориентированную дугу с концом в стоке заменяют на ориентированную, входящую в сток;
* применяют алгоритм построения максимального потока в сетях, изложенный в разделе 4.1.

Пример сети с неориентированными дугами (BD и EF) и соответствующей ей сети с ориентированными дугами:

 

## Индивидуальные задания

Задание.

1. Самостоятельно задать пропускные способности дуг и построить максимальный поток в транспортной сети.

2. Найти минимальный разрез сети и проверить справедливость теоремы Форда – Фалкерсона.

 

 

 

 

 

 

 

 

1. Истоком орграфа называется вершина, в которую не входит ни одна дуга. [↑](#footnote-ref-1)
2. Стоком орграфа называется вершина, из которой не выходит ни одна дуга. [↑](#footnote-ref-2)