Теоретическая часть

Введение в теорию вероятностей

1.1. Элементы комбинаторики

Рассмотрим некоторое множество *X*, состоящее из *n* элементов $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Будем выбирать из этого множества различные упорядоченные подмножества Y из *k* элементов.

Размещением из *n* элементов множества *X* по *k* элементам назовем любой упорядоченный набор $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$ элементов множества *X*.

Если выбор элементов множества Y из *X* происходит с возвращением, т.е. каждый элемент множества *X* может быть выбран несколько раз, то число размещений из *n* по *k* находится по формуле n^k (***размещения с повторениями***).

Если же выбор делается без возвращения, т.е. каждый элемент множества *X* можно выбирать только один раз, то количество размещений из *n* по *k* обозначается A_n^k и определяется равенством $A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ (***размещения без повторений***).

Пример. Пусть даны шесть цифр: 1; 2; 3; 4; 5; 6. Определить сколько трехзначных чисел можно составить из этих цифр.

Решение. Если цифры могут повторяться, то количество трехзначных чисел будет $m = n^k = 6^3 = 216$. Если цифры не повторяются, то $m = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Пример. Студенты института изучают в каждом семестре по десять дисциплин. В расписание занятий включаются каждый день по 3 дисциплины. Сколько различных расписаний может составить диспетчерская?

Решение. Расписание на каждый день может отличаться либо предметами, либо порядком расположения этих предметов, поэтому имеем размещения: $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Частный случай размещения при *n*=*k* называется ***перестановкой*** из *n* элементов. Число всех перестановок из *n* элементов равно $A_n^n = P_n = n!$.

Пример. 30 книг стоит на книжной полке, из них 27 различных книг и одного автора три книги. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

Решение. Будем считать три книги одного автора за одну книгу, тогда число перестановок будет P_{28}. А три книги можно переставлять между собой

P_3 способами, тогда по правилу произведения имеем, что искомое число способов равно: $P_3 * P_{28}$=3!*28!

Пусть теперь из множества *X* выбирается неупорядоченное подмножество Y (порядок элементов в подмножестве не имеет значения). ***Сочетаниями*** из *n* элементов по *k* называются подмножества из *k* элементов, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом. Общее число всех сочетаний из *n* по *k* обозначается C_n^k и равно $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

Справедливы равенства: $C_n^0 = \mathbf{1}$, $C_n^n = 1$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Пример. В группе из 27 студентов нужно выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно это сделать?

Решение. Так как порядок студентов не важен, используем формулу для числа сочетаний: $m = C_{27}^3 = \frac{27!}{3!24!} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2925$.

При решении задач комбинаторики используют следующие правила:

Правило суммы. Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект B может быть выбран n способами, то выбрать либо A, либо B можно m + n способами.

Правило произведения. Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана m*n способами.

Пример. Наряд студентки состоит из блузки, юбки и туфель. Девушка имеет в своем гардеробе четыре блузки, пять юбок и трое туфель. Сколько нарядов может иметь студентка?

Решение. Пусть сначала студентка выбирает блузку. Этот выбор может быть совершен четырьмя способами, так как студентка имеет четыре блузки, затем пятью способами произойдет выбор юбки и тремя способами выбор туфель. По принципу умножения получается 4*5*3=60 нарядов (комбинаций).

1.2. Классическое определение вероятности

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события. ***Случайным событием*** называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

Событие называется ***достоверным***, если в результате испытания оно обязательно происходит. ***Невозможным*** называется событие, которое в результате испытания произойти не может.

Случайные события называются ***несовместными*** в данном испытании, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Случайные события образуют ***полную группу***, если при каждом испытании может появиться любое из них и не может появиться какое-либо иное событие, несовместное с ними.

Рассмотрим полную группу равновозможных несовместных случайных событий. Такие события будем называть исходами. Исход называется ***благоприятствующим*** появлению события *А*, если появление этого события влечет за собой появление события *А*.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

Вероятностью события *А* называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу $P(A)=\frac{m}{n}$

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

Пример. В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

Решение. Пусть событие *А* = (Номер вынутого шара не превосходит 10). Число случаев благоприятствующих появлению события *А* равно числу всех возможных случаев *m*=*n*=10. Следовательно, *P*(*A*)=1. Событие *А достоверное*.

Пример. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность, что оба шара белые?

Решение. Вынуть два шара из десяти можно следующим числом способов: $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$.

Число случаев, когда среди этих двух шаров будут два белых, равно $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15$.

Искомая вероятность

$P = \frac{m}{n} = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Пример. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Решение. Так как синих шаров в урне нет, то m=0, n=15. Следовательно, искомая вероятность p=0. Событие, заключающееся в вынимании синего шара, *невозможное*.

Пример. Из колоды в 36 карт вынимается одна карта. Какова вероятность появления карты червовой масти?

Решение. Количество элементарных исходов (количество карт) n=36. Событие A = (Появление карты червовой масти). Число случаев, благоприятствующих появлению события A, m=9. Следовательно, $P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0,25$.

Пример. В кабинете работают 6 мужчин и 4 женщины. Для переезда наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц три женщины.

Решение. Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 7 человек из 10, т.е. $n = C_{10}^7 = C_{10}^3$.

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию: трех женщин можно выбрать из четырех C_4^3 способами; при этом остальные четыре человека должны быть мужчинами, их можно отобрать C_6^4 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_4^3 C_6^4 = C_4^1 C_6^2$.

Искомая вероятность $P = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{4 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3}} = \frac{1}{2}$.

Задача 1: Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает её наугад. Определить вероятность того, что ему придётся звонить не более чем в 3 места.

Решение: Вероятность набрать верную цифру из десяти равна по условию 1/10. Рассмотрим следующие случаи: 1. первый звонок оказался верным, вероятность равна 1/10 (сразу набрана нужная цифра).2. первый звонок оказался неверным, а второй - верным, вероятность равна 9/10*1/9=1/10 (первый раз набрана неверная цифра, а второй раз верная из оставшихся девяти цифр).3. первый и второй звонки оказались неверными, а третий - верным, вероятность равна 9/10*8/9*1/8=1/10 (аналогично пункту 2). Всего получаем P=1/10+1/10+1/10=3/10=0,3 - вероятность того, что ему придется звонить не более чем в три места.

Ответ: 0,3

Задача 2: Абонент забыл последние 2 цифры телефонного номера, но помнит, что они различны и образуют двузначное число, меньшее 30. С учетом этого он набирает наугад 2 цифры. Найти вероятность того, что это будут нужные цифры.

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события. m = 1, так как только одно число правильное. Подсчитаем количество всех возможных двузначных чисел с разными цифрами, меньшее 30, которые может набрать абонент:

10	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	23	24	25	26	27	28	29

Таких чисел n = 18 штук. Тогда искомая вероятность P=1/18.

Ответ: 1/18.

Задача 3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в три ящика. Найти вероятность того, что во всех ящиках окажется разное число шаров, при условии, что все ящики не пустые.

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех возможных исходов.
m = 6, так как есть только три случая расположения 6 шаров по 3 ящикам, чтобы во всех ящиках оказалось разное число шаров: (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2). Всего случаев расположения 6 шаров по 3 ящикам, чтобы ни один ящик не остался пустым равно $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = 10$

Тогда искомая вероятность P=6/10.

Ответ: 0,6.

Задача 4: На шахматную доску случайным образом поставлены две ладьи. Какова вероятность, что они не будут бить одна другую?

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех возможных исходов.

Число всех способов расставить ладьи равно n = 64*63 (первую ладью ставим на любую из 64 клеток, а вторую - на любую из оставшихся 63 клеток). Число способов расставить ладьи так, что они не будут бить одна другую равно m = 64*(64-15) = 64*49.

Тогда искомая вероятность P=(64*49)/(64*63)=49/63.

Ответ: 49/63.

Задача 5. Шесть рукописей случайно раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что ровно одна папка останется пустой?

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех возможных исходов.

Подсчитаем $n = C^6_{6+5-1} = C^6_{10} = 210$ - число различных способов разложить 6 рукописей по 5 папкам, причем в каждой папке может быть любое количество рукописей. Теперь подсчитаем $m = 5*C^{4-1}_{6-1} = 5*C^3_5 = 50$ - число способов разложить 6 рукописей по 4 папкам, причем в каждой папке должно быть не менее одной рукописи. При этом нужно полученное число сочетаний умножить на 5, так как папку, которая останется пустой, можно выбрать 5 способами. Искомая вероятность P=50/210=5/21.

Ответ: 5/21.

Задача 6. Цифры 1, 2, 3, …, 9, выписанные на отдельные карточки складывают в ящик и тщательно перемешивают. Наугад вынимают одну карточку. Найти вероятность того, что число, написанное на этой карточке: а) четное; б) двузначное.

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Случай а). n = 9, так как всего 9 различных карточек. m = 4, так как всего на 4 карточках написаны четные числа (2, 4, 6, 8). Тогда P=4/9.

Случай б). n = 9, так как всего 9 различных карточек. m = 0, так как на всех карточках написаны однозначные числа. Тогда P=0/9=0.

Ответ: 4/9, 0.

Задача 7. На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номера слева направо, но не обязательно рядом.

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события (Тома стоят в порядке возвозрастания номера слева направо, но не обязательно рядом).

n = 40*39*38, так как первый том можно поставить на любое из 40 мест, второй - на любое из 39 мест и третий - на любое из оставшихся 38 мест. $m = C_{40}^{3} = \frac{40!}{37!3!} = \frac{40*39*38}{1*2*3}$

Тогда искомая вероятность $P = \frac{40*39*38}{40*39*38*1*2*3} = \frac{1}{6}$

Ответ: 1/6.

Задача 8. На каждой из пяти одинаковых карточек напечатана одна из следующих букв: "а", "м", "р", "т", "ю". Карточки тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что на четырех вынутых по одной карточке можно прочесть слово "юрта".

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех возможных исходов.

n = 5*4*3*2 = 120 способов, так как первую карточку (букву) можно вытянуть (выбрать) 5 способами (так как всего карточек пять), вторую - 4 (осталось к этому шагу четыре), третью - 3 и четвертую - 2 способами. m = 1, так как искомая последовательность карточек "ю", потом "р", потом "т", потом "а" только одна.

Получаем P = 1/120.

Ответ: 1/120.

Задача 9. Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение: Используем классическое определение вероятности: P=m/n, где n - число всех возможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок из букв А, К, К, Л, У равно $\frac{5!}{1!2!1!1!} = \frac{1*2*3*4*5}{1*2} = 60$, из них только одна соответствует слову "кукла" (m=1), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна P=1/60.

Ответ: 1/60.

1.3 Сложение и умножение вероятностей

Событие *A* называется ***частным случаем*** события *B*, если при наступлении *A* наступает и *B*. То, что *A* является частным случаем *B*, записываем $A \subset B$.

События *A* и *B* называются ***равными,*** если каждое из них является частным случаем другого. Равенство событий *A* и *B* записываем *A* = *B*.

Суммой событий *A* и *B* называется событие *A* + *B*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из событий: *A* или *B*.

Теорема о сложении вероятностей. Вероятность появления одного из двух ***несовместных*** событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Заметим, что сформулированная теорема справедлива для любого числа несовместных событий:

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Если случайные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то имеет место равенство

$$P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1.$$

Произведением событий *A* и *B* называется событие *AB*, которое наступает тогда и только тогда, когда наступают оба события: *A* и *B* одновременно. Случайные события *A* и *B* называются ***совместными***, если при данном испытании могут произойти оба эти события.

Теорема о сложении вероятностей 2. Вероятность суммы ***совместных*** событий вычисляется по формуле

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

События событий *A* и *B* называются ***независимыми***, если появление одного из них не меняет вероятности появления другого. Событие *A* называется ***зависимым*** от события *B*, если вероятность события *A* меняется в зависимости от того, произошло событие *B* или нет.

Теорема об умножении вероятностей. Вероятность произведения независимых событий *A* и *B* вычисляется по формуле:

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

Вероятность произведения зависимых событий вычисляется по формуле условной вероятности (см. следующий раздел).

Пример. В первом ящике 1 белый и 5 черных шаров, во втором 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Решение. Обозначим события: A – вынули белый шар из первого ящика, $P(A)=\frac{1}{6}$;

$\overline{A}$ - вынули черный шар из первого ящика, $P(\overline{A})=\frac{5}{6}$;

B – белый шар из второго ящика, $P(B)=\frac{2}{3}$;

$\overline{B}$ - черный шар из второго ящика, $P(\overline{B})=\frac{1}{3}$.

Нам нужно, чтобы произошло одно из событий $A\overline{B}$ или $\overline{A}B$. По теореме об умножении вероятностей $P(A\overline{B})=\frac{1}{18}$, $P(\overline{A}B)=\frac{10}{18}$. Тогда искомая вероятность по теореме сложения будет $P=P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=\frac{11}{18}$.

Пример. Вероятность попадания в цель у первого стрелка 0,8, у второго – 0,9. Стрелки делают по выстрелу. Найти вероятность: а) двойного попадания; б) хотя бы одного попадания; г) одного попадания.

Решение.

Пусть A – попадание первого стрелка, $P(A)=0,8$;

B – попадание второго стрелка, $P(B)=0,9$.

Тогда $\overline{A}$- промах первого, $P(\overline{A})=1-0,8=0,2$;

$\overline{B}$- промах второго, $P(\overline{B})=1-0,9=0,1$.

Найдем нужные вероятности.

а) AB – двойное попадание, $P(AB)=P(A)P(B)=0,8\cdot 0,9=0,72$

б) $\overline{A}\,\overline{B}$– двойной промах, $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=0,2\cdot 0,1=0,02$.

в) $A+B$ – хотя бы одно попадание,

$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,8+0,9-0,72=0,98$.

г) $A\overline{B}+\overline{A}B$– одно попадание,

$P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,9=0,26$.

Пример. Студент разыскивает нужную ему формулу в трех справочниках. Вероятности того, что формула содержится в первом, втором и третьем справочниках равны 0,6; 0,7 и 0,8. Найти вероятности того, что формула содержится 1) только в одном справочнике; 2) только в двух справочниках; 3) во всех трех справочниках.

Решение.

A – формула содержится в первом справочнике;

B – формула содержится во втором справочнике;

C – формула содержится в третьем справочнике.

Воспользуемся теоремами сложения и умножения вероятностей.

1. $P(A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C)=P(A\overline{B}\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\overline{B}C)= =0,6\cdot 0,3\cdot 0,2+0,4\cdot 0,7\cdot 0,2+0,4\cdot 0,3\cdot 0,8=0,188$

2. $P(AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,2+0,6\cdot 0,3\cdot 0,8+0,4\cdot 0,7\cdot 0,8=0,452$.

3. $P(ABC)=0,6\cdot 0,7\cdot 0,8=0,336$

Пусть в результате испытания могут появиться n событий, независимых в совокупности, либо некоторые из них (в частности, только одно или ни одного), причем вероятности появления каждого из событий известны. Как найти вероятность того, что наступит хотя бы одно из этих событий? Например, если в результате испытания могут появиться три события, то появление хотя бы одного из этих событий означает наступление либо одного, либо двух, либо трех событий. Ответ на поставленный вопрос дает следующая теорема.

Теорема. Вероятность ***появления хотя бы одного из событий*** $A_1, A_2, \dots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий

$$P(A)=1-P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot\ldots\cdot P(\overline{A_n})=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$$

Если события $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеют одинаковую вероятность p, то формула принимает простой вид:

$$P(A)=1-(1-p)^n=1-q^n.$$

Пример. Вероятности попадания в цель при стрельбе из трех орудий таковы: *p*1 = 0,8; *p*2 = 0,7; *p*3 = 0,9. Найти вероятность хотя бы одного попадания (событие А) при одном залпе из всех орудий.

Решение. Вероятность попадания в цель каждым из орудий не зависит от результатов стрельбы из других орудий, поэтому рассматриваемые события A_1

(попадание первого орудия), A_2 (попадание второго орудия) и A_3 (попадание третьего орудия) независимы в совокупности.

Вероятности событий, противоположных событиям A_1, A_2 и A_3 (т. е. вероятности промахов), соответственно равны:

$q_1 = 1 - p_1 = 0,2$, $q_2 = 1 - p_2 = 0,3$, $q_3 = 1 - p_3 = 0,1$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,1 = 0,994$.

Пример. В типографии имеется 4 плоскопечатных машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,9. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина (событие А).

Решение. События "машина работает" и "машина не работает" (в данный момент) — противоположные, поэтому сумма их вероятностей равна единице: $p + q = 1$

Отсюда вероятность того, что машина в данный момент не работает, равна $q = 1 - p = 0,1$

Искомая вероятность $P(A) = 1 - q^4 = 1 - 0,1^4 = 0,9999$

Так как полученная вероятность весьма близка к единице, то на основании следствия из принципа практической невозможности маловероятных событий мы вправе заключить, что в данный момент работает хотя бы одна из машин.

Пример. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в цель, равна 0,4. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?

Решение. Обозначим через А событие "при n выстрелах стрелок попадает в цель хотя бы один раз". События, состоящие в попадании в цель при первом, втором выстрелах и т. д., независимы в совокупности, поэтому применима формула $P(A) = 1 - q^n$.

Приняв во внимание, что, по условию, $P(A) \ge 0,9,\ p = 0,4$ (следовательно, $q = 1 - p = 0,6$), получим

$$1 - 0,6^n \ge 0,9,$$
$$0,6^n \le 0,1.$$

Прологарифмируем это неравенство по основанию 10:

$$n \lg 0,6 \le \lg 0,1,$$
$$n \ge \frac{\lg 0,1}{\lg 0,6} \approx 4,5.$$

Итак, $n \geq 5$, т.е. стрелок должен произвести не менее 5 выстрелов.

Задача 1: Экспедиция издательства отправила газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,95, во второе - 0,9, в третье - 0,8. Найти вероятность следующих событий: а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

Решение: Введем события А1 = (газеты доставлены своевременно в первое отделение),А2 = (газеты доставлены своевременно во второе отделение), А3 = (газеты доставлены своевременно в третье отделение), по условию Р(А1)=0,95; Р(А2) = 0,9; Р(А3)=0,8. Найдем вероятность события Х = (только одно отделение получит газеты вовремя). Событие Х произойдет, если или газеты доставлены своевременно в 1 отделение, и доставлены не вовремя во 2 и 3, или газеты доставлены своевременно в 2 отделение, и доставлены не вовремя во 1 и 3, или газеты доставлены своевременно в 3 отделение, и доставлены не вовремя во 2 и 1. Таким образом, $X = A1 \cdot \overline{A2} \cdot \overline{A3} + \overline{A1} \cdot A2 \cdot \overline{A3} + \overline{A1} \cdot \overline{A2} \cdot A3$ Так как события А1, А2, А3 - независимые, по теоремам сложения и умножения получаем

$$P(X) = P(A1 \cdot \overline{A2} \cdot \overline{A3} + \overline{A1} \cdot A2 \cdot \overline{A3} + \overline{A1} \cdot \overline{A2} \cdot A3) =$$

$$= P(A1) \cdot P(\overline{A2}) \cdot P(\overline{A3}) + P(\overline{A1}) \cdot P(A2) \cdot P(\overline{A3}) + P(\overline{A1}) \cdot P(\overline{A2}) \cdot P(A3) =$$

$$= 0,95 * 0,1 * 0,2 + 0,05 * 0,9 * 0,2 + 0,05 * 0,1 * 0,8 = 0,032$$

Найдем вероятность события У=(хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием). Введем противоположное событие $\overline{У}$=(все отделения получат газеты вовремя). Вероятность этого события $P(\overline{У}) = P(A1 \cdot A2 \cdot A3) = P(A1) \cdot P(A2) \cdot P(A3) = 0,95 * 0,9 * 0,8 = 0,684$. Тогда вероятность события У: $P(У) = 1 - P(\overline{У}) = 1 - 0,684 = 0,316$

Ответ: 0,032; 0,316.

Задача 2: Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сигнализатор сработает, равна 0,95 для первого сигнализатора и 0,9 для второго. Найти вероятность того, что при аварии сработает только один сигнализатор.

Решение: Введем независимые события: А1 = (при аварии сработает первый сигнализатор); А2 = (при аварии сработает второй сигнализатор); по условию задачи Р(А1)=0,95, Р(А2)=0,9.

Введем событие Х = (при аварии сработает только один сигнализатор). Это событие произойдет, если при аварии сработает первый сигнализатор и не сработает второй, или если при аварии сработает второй сигнализатор и не сработает первый, то есть $X = A1 \cdot \overline{A2} + \overline{A1} \cdot A2$

Тогда вероятность события X по теоремам сложения и умножения вероятностей равна $P(X) = P(A1 \cdot \overline{A2} + \overline{A1} \cdot A2) = P(A1)P(\overline{A2}) + P(\overline{A1})P(A2) = 0,95 * 0,1 + 0,05 * 0,9 = 0,14$

Ответ: 0,14.

Задача 3: Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

Решение: Пусть p - вероятность попадания в цель при одном выстреле. Введем событие X = {при четырех выстрелах есть хотя бы одно попадание} и противоположное ему событие $\overline{X}$= {при четырех выстрелах нет ни одного попадания}.

Вероятность события $\overline{X}$ равна $P(\overline{X}) = (1-p)^4$, тогда вероятность события X равна $P(X) = 1-(1-p)^4$. По условию эта вероятность равна 0,9984, откуда получаем уравнение относительно p $1-(1-p)^4 = 0,9984$ $(1-p)^4 = 0,0016$ $(1-p) = 0,2$ $p = 0,8$

Ответ: 0,8.

1.4 Условная вероятность

Случайное событие определено как событие, которое при осуществлении совокупности условий эксперимента может произойти или не произойти. Если при вычислении вероятности события никаких других ограничений, кроме условий эксперимента, не налагается, то такую вероятность называют ***безусловной***; если же налагаются и другие дополнительные условия, то вероятность события называют ***условной***. Например, часто вычисляют вероятность события *B* при дополнительном условии, что произошло событие *A*.

Условной вероятностью $P_A(B) = P(B|A)$ (два обозначения) называют вероятность события *B*, вычисленную в предположении, что событие *A* уже наступило.

Вероятность ***совместного появления двух зависимых событий*** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е.

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

В частности, отсюда получаем $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$.

Пример. В урне находятся 3 белых шара и 2 черных. Из урны вынимается один шар, а затем второй. Событие *B* – появление белого шара при первом вынимании. Событие *A* – появление белого шара при втором вынимании.

Решение. Очевидно, что вероятность события A, если событие B произошло, будет $P(A\,|\,B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Вероятность события A при условии, что событие B не произошло, будет $P(A\,|\,\overline{B})=\frac{3}{4}$.

Пример. В урне 3 белых и 3 черных шара. Из урны дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

Решение. После первого испытания в урне осталось 5 шаров, из них 3 белых. Искомая условная вероятность $P(B\,|\,A)=\frac{3}{5}$.

Этот же результат можно получить по формуле $P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$.

Действительно, вероятность появления белого шара при первом испытании $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

Найдем вероятность $P(AB)$ того, что в первом испытании появится черный шар, а во втором — белый. Общее число исходов — совместного появления двух шаров, безразлично какого цвета, равно числу размещений $A_6^2=6\cdot 5=30$. Из этого числа исходов событию AB благоприятствуют $3\cdot 3=9$ исходов. Следовательно, $P(AB)=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$.

Искомая условная вероятность $P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/10}{1/2}=\frac{3}{5}$

Результаты совпали.

Пример. В трамвайном парке имеются 15 трамваев маршрута №1 и 10 трамваев маршрута №2. Какова вероятность того, что вторым по счету на линию выйдет трамвай маршрута №1?

Решение. Пусть A - событие, состоящее в том, что на линию вышел трамвай маршрута №1, B - маршрута №2.

Рассмотрим все события, которые могут при этом быть (в условиях нашей задачи): $AA,\ AB,\ BA,\ BB$. Из них нас будут интересовать только первое и третье, когда вторым выйдет трамвай маршрута №1.

Так как все эти события совместны, то:

$P(AA)=P(A)\cdot P(A\mid A)=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}$;

$P(BA)=P(B)P(A\mid B)=\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}$;

отсюда искомая вероятность $P=P(AA)+P(BA)=\frac{15}{25}\cdot\frac{14}{24}+\frac{10}{25}\cdot\frac{15}{24}=0,6$

Пример. Какова вероятность того, что 2 карты, вынутые из колоды в 36 карт, окажутся одной масти?

Решение. Сначала подсчитаем вероятность того, что две карты окажутся одной определенной масти (например «пики»). Пусть *A* - появление первой карты такой масти, *B* - появление второй карты той же масти. Событие *B* зависит от события *A*, т.к. его вероятность меняется от того, произошло или нет событие *A*. Поэтому придется воспользоваться теоремой умножения в ее общей форме:

$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$, где $P(A)=\frac{1}{4},\ P(B\mid A)=\frac{8}{35}$ (после вынимания первой карты осталось 35 карт, из них той же масти, что и первая - 8).

Получаем $P(AB)=P(A)P(B\mid A)=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{35}=\frac{2}{35}$.

События, состоящие в том, что будут вынуты две карты масти «пики», масти «треф» и т.д., несовместны друг с другом. Следовательно, для нахождения вероятности их объединения воспользуемся теоремой сложения: $P=\frac{2}{35}+\frac{2}{35}+\frac{2}{35}+\frac{2}{35}=\frac{8}{35}$.

1.6. Формула полной вероятности и формула Байеса

Если событие *A* может произойти только при выполнении одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые образуют ***полную группу несовместных событий***, то вероятность события *A* вычисляется по формуле

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\ldots+P(B_n)P(A\mid B_n).$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***.

Вновь рассмотрим полную группу несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятности появления которых $P(B_1), P(B_2), \ldots, P(B_n)$. Событие *A* может произойти только вместе с каким-либо из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, которые будем называть ***гипотезами***. Тогда по формуле полной вероятности

$$P(A)=P(B_1)P(A\mid B_1)+P(B_2)P(A\mid B_2)+\ldots+P(B_n)P(A\mid B_n)$$

Если событие A произошло, то это может изменить вероятности гипотез $P(B_1), P(B_2), \dots, P(B_n)$.

По теореме умножения вероятностей

$$P(AB_1) = P(B_1)P(A \mid B_1) = P(A)P(B \mid A),$$

откуда

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(B_1)P(A \mid B_1)}{P(A)}.$$

Аналогично, для остальных гипотез

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}, \ i = 1, \dots, n.$$

Полученная формула называется ***формулой Байеса*** (***формулой Бейеса***). Вероятности гипотез $P(B_i \mid A)$ называются ***апостериорными вероятностями***, тогда как $P(B_i)$ - ***априорными вероятностями***.

Пример. В магазин поступила новая продукция с трех предприятий. Процентный состав этой продукции следующий: 20% - продукция первого предприятия, 30% - продукция второго предприятия, 50% - продукция третьего предприятия; далее, 10% продукции первого предприятия высшего сорта, на втором предприятии - 5% и на третьем - 20% продукции высшего сорта. Найти вероятность того, что случайно купленная новая продукция окажется высшего сорта.

Решение. Обозначим через B событие, заключающееся в том, что будет куплена продукция высшего сорта, через A_1, A_2, A_3 обозначим события, заключающиеся в покупке продукции, принадлежащей соответственно первому, второму и третьему предприятиям.

Можно применить формулу полной вероятности, причем в наших обозначениях:

$$P(A_1) = 0{,}2 \quad P(B \mid A_1) = 0{,}1$$
$$P(A_2) = 0{,}3 \quad P(B \mid A_2) = 0{,}05$$
$$P(A_3) = 0{,}5 \quad P(B \mid A_3) = 0{,}2$$

Подставляя эти значения в формулу полной вероятности, получим искомую вероятность:

$$P(B) = 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}135.$$

Пример. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго - 0,5; для третьего - 0,8. Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

Решение. Возможны три гипотезы:

A_1- на линию огня вызван первый стрелок,

A_2 - на линию огня вызван второй стрелок,

A_3 - на линию огня вызван третий стрелок.

Так как вызов на линию огня любого стрелка равновозможен, то $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}$.

В результате опыта наблюдалось событие B - после произведенных выстрелов мишень не поражена. Условные вероятности этого события при сделанных гипотезах равны:

$$P(B \mid A_1) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49;$$
$$P(B \mid A_2) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25;$$
$$P(B \mid A_3) = 0,2 \cdot 0,2 = 0,04.$$

по формуле Байеса находим вероятность гипотезы A_1 после опыта:

$$P(A_1 | B) = \frac{0,49 \cdot 1/3}{1/3 \cdot 0,49 + 1/3 \cdot 0,25 + 1/3 \cdot 0,04} = \frac{0,49}{0,78} = 0,628.$$

Пример. На трех станках-автоматах обрабатываются однотипные детали, поступающие после обработки на общий конвейер. Первый станок дает 2% брака, второй – 7%, третий – 10%. Производительность первого станка в 3 раза больше производительности второго, а третьего – в 2 раза меньше, чем второго.

а) Каков процент брака на конвейере?

б) Каковы доли деталей каждого станка среди бракованных деталей на конвейере?

Решение. Возьмем с конвейера наудачу одну деталь и рассмотрим событие А – деталь бракованная. Оно связано с гипотезами относительно того, где была обработана эта деталь: H_k– взятая наудачу деталь обработана на k-ом станке, $k = 1, 2, 3$.

Условные вероятности (в условии задачи они даны в форме процентов):

$$P(A | H_1) = 0,02, \; P(A | H_2) = 0,07, \; P(A | H_3) = 0,1.$$

Зависимости между производительностями станков означают следующее:

$$P(H_1) = 3P(H_2), \; P(H_3) = 0,5P(H_2).$$

А так как гипотезы образуют полную группу, то $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$.

Решив полученную систему уравнений, найдем: $P(H_1)=6/9,\ P(H_2)=2/9,\ P(H_3)=1/9$.

а) Полная вероятность того, что взятая наудачу с конвейера деталь – бракованная:

$$P(A)=\sum P(A|H_i)P(H_i)=\frac{6}{9}0,02+\frac{2}{9}0,07+\frac{1}{9}0,1=0,04.$$

Другими словами, в массе деталей, сходящих с конвейера, брак составляет 4%.

б) Пусть известно, что взятая наудачу деталь – бракованная. Пользуясь формулой Байеса, найдем условные вероятности гипотез:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)P(H_1)}{P(A)}=\frac{6/9\cdot 0,02}{0,04}=0,33,$$

$$P(H_2|A)=\frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)}=\frac{2/9\cdot 0,07}{0,04}=0,39,$$

$$P(H_3|A)=\frac{P(A|H_3)P(H_3)}{P(A)}=\frac{1/9\cdot 0,1}{0,04}=0,28.$$

Таким образом, в общей массе бракованных деталей на конвейере доля первого станка составляет 33%, второго – 39%, третьего – 28%.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

Решение задач по основным разделам теории вероятности

Цель - получение практических навыков в решении задач по разделам теории вероятностей

Подготовка к выполнению практического задания

Ознакомиться с теоретическим материалом по данной тематике, изучить содержание теоретического, а также соответствующие разделы в литературных источниках

Порядок выполнения задания

Решить 5 задач согласно номеру варианта задания, приведенного в таблице 1.

Варианты исходных данных
Таблица 1

Вар-нт	номер задачи				
1	1	48	49	96	97
2	2	47	50	95	98
3	3	46	51	94	99
4	4	45	52	93	100
5	5	44	53	92	101
6	6	43	54	91	102
7	7	42	55	90	103
8	8	41	56	89	104
9	10	40	57	88	105
10	11	39	58	87	106
11	12	38	59	86	107
12	13	37	60	85	108
13	14	36	61	84	109
14	15	35	62	83	110
15	16	34	63	82	111
16	17	33	64	81	112
17	18	32	65	80	113
18	19	31	66	79	114
19	9	30	67	78	115
20	20	29	68	77	116
21	21	28	69	76	117
22	22	27	70	75	118
23	23	26	71	74	119
24	24	25	72	73	120

Состав отчета по заданию 1

5 решенных задач согласно номеру варианта.

Задачи для самостоятельного решения

1.. Являются ли случаями следующие группы событий: а) опыт — бросание монеты; события: *A1* — появление герба; *A2* — появление цифры; б) опыт — бросание двух монет; события: *B1* — появление двух гербов; *B2* — появление двух цифр; *B3* — появление одного герба и одной цифры; в) опыт — бросание игральной кости; события: *C1* — появление не более двух очков; *C2* — появление трех или четырех очков; *C3* —появление не менее пяти очков; г) опыт — выстрел по мишени; события: *D1* — попадание; *D2* —промах; д) опыт — два выстрела по мишени;

события: $E0$ — ни одного попадания; $E1$ — одно попадание; $E2$ — два попадания; е) опыт — вынимание двух карт из колоды; события: $F1$ — появление двух красных карт; $F2$ — появление двух черных карт?

2. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар — белый.

3. В урне А белых и B черных шаров. Из урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет белым.

4. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынули один шар и, не глядя, отложили в сторону. После этого из урны взяли еще один шар. Он оказался белым. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, — тоже белый.

5. Из урны, содержащей А белых и В черных шаров, вынимают один за другим все шары, кроме одного. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет белым.

6. Из урны, в которой А белых шаров и В черных, вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что вторым по порядку будет вынут белый шар.

7. В урне А белых и В черных шаров $(A > 2)$. Из урны вынимают сразу два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.

8. В урне А белых и В черных шаров (А > 2, В > 3). Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность p того, что два из них будут белыми, а три черными.

9. В партии, состоящей из X изделий, имеется I дефектных. Из партии выбирается для контроля I изделий. Найти вероятность p того, что из них ровно J изделий будут дефектными.

10. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A — появление четного числа очков; B — появление не менее 5 очков; C— появление не более 5 очков.

11. Игральная кость бросается два раза. Найти вероятность p того, что оба раза появится одинаковое число очков.

12. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: A — сумма выпавших очков равна 8; B — произведение выпавших очков равно 8;C— сумма выпавших очков больше, чем их произведение.

13. Бросаются две монеты. Какое из событий является более вероятным: A — монеты лягут одинаковыми сторонами; B — монеты лягут разными сторонами?

14. В урне А белых и В черных шаров $(A > 2$; В > 2). Из урны вынимают одновременно два шара. Какое событие более вероятно: A — шары одного цвета; B — шары разных цветов?

15. Трое игроков играют в карты. Каждому из них сдано по 10 карт и две карты оставлены в прикупе. Один из игроков видит, что у него на руках 6 карт бубновой масти и 4 — не бубновой. Он сбрасывает две карты из этих четырех и берет себе прикуп. Найти вероятность того, что он прикупит две бубновые карты.

16. Из урны, содержащей n перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2,..., n.

17. Та же урна, что и в предыдущей задаче, но каждый шар после вынимания вкладывается обратно и перемешивается с другими, а его номер записывается. Найти вероятность того, что будет записана естественная последовательность номеров: 1, 2,..., п.
18. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на две равные пачки по 26 листов. Найти вероятности следующих событий: *А* — в каждой из пачек окажется по два туза; *В* — в одной из пачек не будет ни одного туза, а в другой — все четыре; *С—в* одной из пачек будет один туз, а в другой — три.
19. В розыгрыше первенства по баскетболу участвуют 18 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 9 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд
экстра-класса. Найти вероятности следующих событий: *А* —все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу; *В* — две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три — в другую.
20. На девяти карточках написаны цифры: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Две из них вынимаются наугад и укладываются на стол в порядке появления, затем читается полученное число, например 07(семь), 14 (четырнадцать) и т. п. Найти вероятность того, что число будет четным.
21. На пяти карточках написаны цифры: 1, 2, 3, 4, 5. Две из них, одна за другой, вынимаются. Найти вероятность того, что число на второй карточке будет больше, чем на первой.
22. Тот же вопрос, что в задаче 21, но первая карточка после вынимания кладется обратно и перемешивается с остальными, а стоящее на ней число записывается.
23. В урне А белых, В черных и С красных шаров. Из урны вынимают один за другим все находящиеся в ней шары и записывают их цвета. Найти вероятность того, что в этом списке белый цвет появится раньше черного.
24. Имеется две урны: в первой А белых и В черных шаров; во второй С белых и D черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
25. В условиях задачи 24 найти вероятность того, что вынутые шары будут разных цветов.
26. В барабане револьвера семь гнезд, из них в пяти заложены патроны, а два оставлены пустыми. Барабан приводится во вращение, в результате чего против ствола случайным образом оказывается одно из гнезд. После этого нажимается спусковой крючок; если ячейка была пустая, выстрела не происходит. Найти вероятность *р* того, что, повторив такой опыт два раза подряд, мы оба раза не выстрелим.
27. В тех же условиях (см. задачу 26)найти вероятность того, что оба раза выстрел произойдет.
28. В урне имеется А; шаров, помеченных номерами 1, 2, ..., *к* Из урны *I* раз вынимается по одному шару *(I <к),* номер шара записывается и шар кладется обратно в урну. Найти вероятность *р* того, что все записанные номера будут различны.

29. Из пяти букв разрезной азбуки составлено слово «книга». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова получилось слово «книга».

30. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Ребенок, не умеющий читать, рассыпал эти буквы и затем собрал в произвольном порядке. Найти вероятность p того, что у него снова слово «ананас

31. Из полной колоды карт (52 листа, 4 масти) вынимается сразу несколько карт. Сколько карт нужно вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей чем 0,50, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

32. N человек случайным образом рассаживаются за круглым столом $(N > 2)$. Найти вероятность p того, что два фиксированных лица A и B окажутся рядом.

33. Та же задача (см 32), но стол прямоугольный, и N человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

34. На бочонках лото написаны числа от 1 до N. Из этих N бочонков случайно выбираются два. Найти вероятность того что на обоих бочонках написаны числа, меньшие чем k $(2<k<N)$-

35. На бочонках лото написаны числа от 1 до N. Из этих N бочонков случайно выбираются два. Найти вероятность того что на одном из бочонков написано число, большее чем k, а на другом — меньшее чем k. $(2<k<N)$

36. Батарея из M орудий ведет огонь по группе, состоящей из N целей $(M < N)$. Орудия выбирают себе цели последовательно, случайным образом, при условии, что никакие два орудия стрелять по одной цели не могут. Найти вероятность p того, что будут обстреляны цели с номерами 1, 2,..., M.

37.. Батарея, состоящая из $к$ орудий, ведет огонь по группе, состоящей из I самолетов $(к < 2)$. Каждое орудие выбирает себе цель случайно и независимо от других. Найти вероятность того, что все $к$ орудий будут стрелять по одной и той же цели.

38. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что все орудия будут стрелять по разным целям.

39. Четыре шарика случайным образом разбрасываются по четырем лункам; каждый шарик попадает в ту или другую лунку с одинаковой вероятностью и независимо от других (препятствий к попаданию в одну и ту же лунку нескольких шариков нет). Найти вероятность того, что в одной из лунок окажется три шарика, в другой — один, а в двух остальных лунках шариков не будет.

40. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 отправляется 5 автобусов. Не успевший на эти автобусы опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института на разных автобусах и не опоздать на лекцию?

41. В информационно-технологическом управлении банка работает 3 аналитика, 10 программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколькими способами это можно сделать?

42. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять 10 охранников по 10 постам. Сколькими способами это можно сделать?

43. Новый президент банка должен назначить 2 новых вице президентов из числа 10 директоров. Сколькими способами это можно сделать?
44. Одна из воюющих сторон захватил 12, а другая – 15 пленных. Сколькими способами можно обменять 7 военнопленных?
45. Петя и Маша коллекционируют видеодиски. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши – 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться 3 комедиями, 2 боевиками и 1 мелодрамой?
46. В условиях задачи 45 сколькими способами Петя и Маша могут обменяться 3 мелодрамами и 5 комедиями?
47. В условиях задачи 45 сколькими способами Петя и Маша могут обменяться 2 боевиками и 7 комедиями.
48. Одна из воюющих сторон захватил 15, а другая – 16 пленных. Сколькими способами можно обменять 5 военнопленных?
49. Сколько автомобилей можно зарегистрировать в 1 городе, если номер имеет 3 цифры и 3 буквы (только те чьё написание совпадает с латинскими – А,В,Е,К,М,Н,О,Р,С,Т,У,Х)?
50. Одна из воюющих сторон захватил 14, а другая – 17 пленных. Сколькими способами можно обменять 6 военнопленных?
51. Сколько различных слов можно составить переставляя буквы в слове «мама»?
52. В корзине 3 красных и 7 зеленых яблок. Из нее вынимают одно яблоко. Найти вероятность того, что оно будет красным.
53. В корзине 3 красных и 7 зеленых яблок. Из нее вынули и отложили в сторону одно зеленое яблоко. После чего из корзины вынимают еще 1 яблоко. Какова вероятность того, что это яблоко будет зеленым?
54. В партии, состоящей из 1000 изделий, 4 имеют дефекты. Для контроля выбирают партию из 100 изделий. Какова вероятность ТОО, что в контрольной партии не окажется бракованных?
56.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 5 из 36». Играющий отмечал на карточке 5 чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок не угадал ни одного числа.
57.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 5 из 36». Играющий отмечал на карточке 5 чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок угадал одно число.
58.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 5 из 36». Играющий отмечал на карточке 5 чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок угадал 3 числа.
59.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 5 из 36». Играющий отмечал на карточке 5 чисел от 1 до 36 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок не угадал все 5 чисел.

60.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 6 из 49». Играющий отмечал на карточке 6 чисел от 1 до 49 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок угадал 2 числа.
61. В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 6 из 49». Играющий отмечал на карточке 6 чисел от 1 до 49 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок не угадал ни одного числа.
62.В 80-е годы в СССР была популярна игра «спортлото 6 из 49». Играющий отмечал на карточке 6 чисел от 1 до 49 и получал призы различного достоинства если он угадывал разное число чисел, объявленных тиражной комиссией. Найти вероятность того, что игрок угадал все 6 чисел.
63. В партии, состоящей из 1000 изделий, 4 имеют дефекты. Для контроля выбирают партию из 100 изделий. Какова вероятность ТОО, что в контрольной партии окажется только 1 бракованная?
64. Сколько различных слов можно составить переставляя буквы в слове «книга»?
65. Сколько различных слов можно составить переставляя буквы в слове «ананас»?
66. В лифт вошло 6 человек, а общежитие имеет 7 этажей. Какова вероятность того что все 6 человек выйдут на одном этаже?
67. В лифт вошло 6 человек, здание имеет 7 этажей. Какова вероятность того что все 6 человек выйдут на разных этажах?
68. Во время грозы на участке между 40 и 79 км линии электропередачи произошел обрыв провода. Считая что обрыв одинаково возможен в любой точке, найти вероятность того что обрыв произошел между 40-м и 45-м километрами.
69. На 200 километровом участке газопровода происходит утечка газа между компрессорными станциями А и В, которая одинаково возможна в любой точке трубопровода. какова вероятность того что утечка происходит не далее 20 км от А
70. На 200 километровом участке газопровода происходит утечка газа между компрессорными станциями А и В, которая одинаково возможна в любой точке трубопровода. какова вероятность того что утечка происходит ближе к А, чем к В
71. Радар инспектора ДПС имеет точность 10 км\час и округляет в ближайшую сторону. Что происходит чаще – округление в пользу водителя или инспектора?
72. Маша тратит на дорогу в институт от 40 до 50 минут, причем любое время в этом промежутке является равновероятным. Какова вероятность того что она потратит на дорогу от 45 до 50 минут.
73. Петя и Маша договорились встретиться у памятника Пушкину с 12 до 13 часов, однако никто не смог указать точно время прихода. Они договорились ждать друг друга 15 минут. Какова вероятность их встречи?
74. Рыбаки поймали в пруду 120 рыб, из них 10 оказались окольцованными. Какова вероятность поймать окольцованную рыбу?
75. Из корзины содержащей 3 красных и 7 зеленых яблок вынимают все яблоки по очереди. какова вероятность того что 2-е яблоко окажется красным?
76. Из корзины содержащей 3 красных и 7 зеленых яблок вынимают все яблоки по очереди. какова вероятность того что последнее яблоко окажется зеленым?

77. Студенты считают что из 50 билетов   10 являются «хорошими». Петя и Маша по очереди тянут по одному билету. Какова вероятность того, что Маше достался «хороший» билет?
78. Студенты считают что из 50 билетов 10 являются «хорошими». Петя и Маша по очереди тянут по одному билету. Какова вероятность того, что им обоим достался «хороший» билет?
79. Маша пришла на экзамен зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задает 3 вопроса. Какова вероятность того что Маша ответит на 3 вопроса?
80. Маша пришла на экзамен зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задает 3 вопроса. Какова вероятность того что Маша не ответит ни на один вопрос?
81. Маша пришла на экзамен зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задает 3 вопроса. Какова вероятность того что Маша ответит на 1 вопрос?
82. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - гос. органы, 20% - другие банки, остальное – физические лица. Вероятность невозвращения кредитов соответственно 0.01, 0.05 и 0.2. Какая доля кредитов не возвращается?
83. вероятность того что недельный оборот торговца мороженым превысит 2000 руб. составляет 80% при ясной погоде, 50 % при переменной облачности и 10% при дождливой погоде. Какова вероятность что оборот превысит 2000 руб. если вероятность ясной погоды – 20%, а переменной облачности и дождей – по 40%.
84. В урне А белых (б) и В черных (ч) шаров. Из урны вынимают (одновременно или последовательно) два шара. Найти вероятность того, что оба шара будут белыми.
85. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.
86. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.
87. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.
88. Имеется коробка с девятью новыми теннисными мячами. Для игры берут три мяча; после игры их кладут обратно. При выборе мячей игранные от неигранных не отличают. Какова вероятность того, что после трех игр в коробке не останется неигранных мячей?
89. Уходя из квартиры, N гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятность того что каждый гость наденет свои калоши;
90. Уходя из квартиры, N гостей, имеющих одинаковые размеры обуви, надевают калоши в темноте. Каждый из них может отличить правую калошу от левой, но не может отличить свою от чужой. Найти вероятность того что каждый гость, наденет калоши, относящиеся к одной паре (может быть и не свои).

91. В условиях задачи 90найти вероятность того что каждый уйдет в своих калошах если гости не могут отличить правой калоши от левой и просто берут первые попавшиеся две калоши.
92. Ведется стрельба по самолету, уязвимыми частями которого являются два двигателя и кабина пилота. Для того чтобы поразить (вывести из строя) самолет, достаточно поразить оба двигателя вместе или кабину пилота. При данных условиях стрельбы вероятность поражения первого двигателя равна $p1$ второго двигателя $p2,$ кабины пилота $p3.$ Части самолета поражаются независимо друг от друга. Найти вероятность того, что самолет будет поражен.
93. Два стрелка, независимо один от другого, делают по два выстрела (каждый по своей мишени). Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка $p1$ для второго $p2.$ Выигравшим соревнование считается тот стрелок, в мишени которого будет больше пробоин. Найти вероятность Px того, что выиграет первый стрелок.
94. за космическим объектом, объект обнаруживается с вероятностью $p.$ Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Найти вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен.
95. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».
96. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.
97. Производится стрельба по самолету зажигательными снарядами. Горючее на самолете сосредоточено в четырех баках, расположенных в фюзеляже один за другим. Площади баков одинаковы. Для того чтобы зажечь самолет, достаточно попасть двумя снарядами либо в один и тот же бак, либо в соседние баки. Известно, что в область баков попало два снаряда. Найти вероятность того, что самолет загорится.
98. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей.
99. Из полной колоды карт (52 листа) вынимаются сразу четыре карты, но каждая карта после вынимания возвращается в колоду. Найти вероятность того, что все эти четыре карты будут разных мастей..
100. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью $p.$ Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания;
101. Прибор может работать в двух режимах: 1) нормальном и 2) ненормальном. Нормальный режим наблюдается в 80 % всех случаев работы прибора; ненормальный — в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время t в нормальном режиме равна 0,1; в ненормальном — 0,7. Найти полную вероятность p выхода прибора из строя.

102. Магазин получает товар от 3 поставщиков: 55% от 1-го, 20 от 2-го и 25% от 3-го. Доля брака составляет 5, 6 и 8 процентов соответственно. Какова вероятность того что купленный бракованный товар поступил от второго поставщика.

103.Поток автомобилей мимо АЗС состоит на 60% из грузовых и на 40% из легковых автомобилей. Какова вероятность нахождения на АЗС грузового автомобиля, если вероятность его заправки 0.1, а легкового – 0.3

104. Поток автомобилей мимо АЗС состоит на 60% из грузовых и на 40% из легковых автомобилей. Какова вероятность нахождения на АЗС грузового автомобиля, если вероятность его заправки 0.1, а легкового – 0.3

105. Магазин получает товар от 3 поставщиков: 55% от 1-го, 20 от 2-го и 25% от 3-го. Доля брака составляет 5, 6 и 8 процентов соответственно. Какова вероятность того что купленный бракованный товар поступил от 1-го поставщика.

106. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «книга».

107. Магазин получает товар от 3 поставщиков: 55% от 1-го, 20 от 2-го и 25% от 3-го. Доля брака составляет 5, 6 и 8 процентов соответственно. Какова вероятность того что купленный бракованный товар поступил от 1-го поставщика.

108. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что 2 шарика попадут в одну ячейку

109. При включении зажигания двигатель начинает работать с вероятностью p. Найти вероятность того, что двигатель начнет работать при втором включении зажигания;

110. Производится стрельба по самолету зажигательными снарядами. Горючее на самолете сосредоточено в четырех баках, расположенных в фюзеляже один за другим. Площади баков одинаковы. Для того чтобы зажечь самолет, достаточно попасть двумя снарядами в один и тот же бак. Известно, что в область баков попало два снаряда. Найти вероятность того, что самолет загорится

111. Производится стрельба по самолету зажигательными снарядами. Горючее на самолете сосредоточено в четырех баках, расположенных в фюзеляже один за другим. Площади баков одинаковы. Для того чтобы зажечь самолет, достаточно попасть двумя снарядами в соседние баки. Известно, что в область баков попало два снаряда. Найти вероятность того, что самолет загорится

112.В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимается один шар, отмечается его цвет и шар возвращается в урну. После этого из урны берется еще один шар. Найти вероятность того, что оба вынутые шара будут белыми.

113. В урне А белых и В черных шаров. Из урны вынимаются сразу два шара. Найти вероятность того, что эти шары будут разных цветов.

114. Два шарика разбрасываются случайно и независимо друг от друга по четырем ячейкам, расположенным одна за другой по прямой линии. Каждый шарик с одинаковой вероятностью 1/4 попадает в каждую ячейку. Найти вероятность того, что шарики попадут в соседние ячейки.

115. Маша пришла на экзамен зная ответы на 20 вопросов программы из 25. Профессор задает 3 вопроса. Какова вероятность того что Маша ответит на 2 вопроса?
116. Студенты считают что из 50 билетов 10 являются «хорошими». Петя и Маша по очереди тянут по одному билету. Какова вероятность того, что им обоим достался «хороший» билет?
117. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - гос. органы, 20% - другие банки, остальное – физические лица. Вероятность невозвращения кредитов соответственно 0.01, 0.05 и 0.2. Какая доля кредитов не возвращается?
118. 32 буквы русского алфавита написаны на карточках разрезной азбуки. Пять карточек вынимаются наугад одна за другой и укладываются на стол в порядке появления. Найти вероятность того, что получится слово «конец».
119 Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - гос. органы, 20% - другие банки, остальное – физические лица. Вероятность невозвращения кредитов соответственно 0.01, 0.05 и 0.2. Какая доля кредитов не возвращается?
120. вероятность того что недельный оборот торговца мороженым превысит 2000 руб. составляет 80% при ясной погоде, 50 % при переменной облачности и 10% при дождливой погоде. Какова вероятность что оборот превысит 2000 руб. если вероятность ясной погоды – 20%, а переменной облачности и дождей – по 40%.