Аппроксимация неэкспоненциальных распределений по двум моментам

Экспоненциальное распределение обладает замечательным свойством «*отсутствия последействия*», благодаря которому оно широко используется при описании случайных процессов, протекающих в моделях массового обслуживания. Свойство отсутствия последействия заключается в следующем (рис.1). Если некоторый временной интервал $\tau = t_1 - t_0$ представляет собой случайную величину, распределенную по экспоненциальному закону, то интервал $\xi = t_1 - t^*$, начинающийся от случайного момента времени t_1 до завершения данного временного интервала, распределен по тому же экспоненциальному закону с тем же параметром α (средним значением $\bar{\tau} = 1/\alpha$). Другими словами, продолжительность интервала ξ не зависит от предыстории, то есть от того, сколько времени уже прошло до момента t^*.

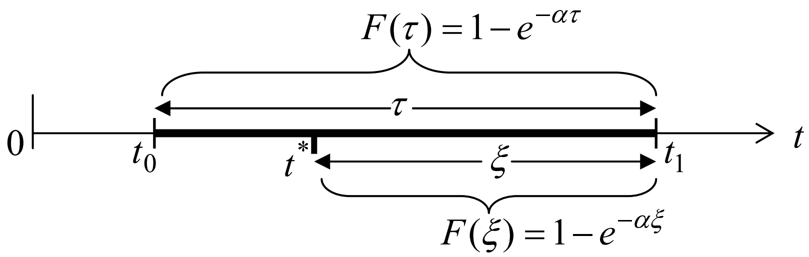

Рис. 1. Свойство отсутствия последействия

Это замечательное свойство экспоненциального распределения используется при построении моделей в терминах *марковских процессов*, представляющих собой особый класс случайных процессов, развитие которых не зависит от предыстории процесса. Благодаря этому для многих моделей массового обслуживания удается достаточно просто получить конечные результаты, в том числе, в виде аналитических зависимостей в явном виде для расчета характеристик исследуемой системы. Поэтому часто при исследовании систем, в которых временные процессы отличаются от экспоненциальных, стремятся свести эти процессы к экспоненциальному представлению.

Напомним, что для экспоненциального закона распределения случайных величин, определенных в области положительных значений $\tau \ge 0$, коэффициент вариации, описывающий разброс значений случайной величины, равен единице. Если реальные временные интервалы имеют значения коэффициента вариации, значительно отличающиеся от единицы, использование экспоненциального распределения может привести к большим погрешностям конечных результатов. В этих случаях в качестве аппроксимирующих функций законов распределений могут использоваться вероятностные законы, представляющие собой композицию экспоненциальных распределений, а именно:

- распределение Эрланга, когда коэффициент вариации временного интервала меньше единицы: $0 < \nu < 1$;
- гипреэкспоненциальное распределение, когда коэффициент вариации временного интервала больше единицы: $\nu > 1$.

При этом аппроксимация реального распределения, в простейшем случае, может выполняться по двум первым моментам распределения:

- математическому ожиданию;
- коэффициенту вариации.

1. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $0 < \nu < 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны t и ν, причем $0 < \nu < 1$.

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величины в теории массового обслуживания часто используют распределение Эрланга.

Случайная величина, распределенная по закону Эрланга k-го порядка, представляет собой сумму k экспоненциально распределенных случайных величин.

В общем случае распределение Эрланга E_k может быть представлено в виде последовательности k экспоненциально распределенных фаз с одинаковым параметром $\alpha_i = \alpha = 1/\mathrm{M}[\tau] \quad (i = \overline{1,k})$, где $\mathrm{M}[\tau]$ – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины в одной фазе (рис.2).

Такое представление позволяет трактовать формирование случайных величин, распределенных по закону Эрланга, следующим образом. Случайная величина, распределенная по закону Эрланга, представляет собой сумму k случайных величин, распределенных по одному и тому же экспоненциальному закону.

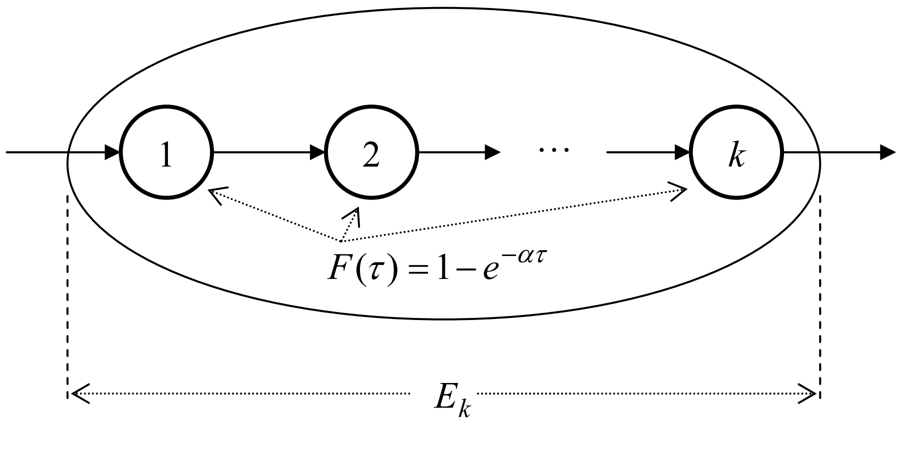

Рис.2. Многофазное представление распределения Эрланга

Распределение Эрланга предполагает, что закон распределения случайных величин во всех фазах одинаковый – экспоненциальный с одним и тем же параметром $\alpha_i = \alpha = 1/\mathrm{M}[\tau] \quad (i = \overline{1,k})$, где $\mathrm{M}[\tau]$ – математическое ожидание экспоненциально распределенной случайной величины в одной фазе. Тогда математическое ожидание и коэффициент вариации случайной величины, распределенной по закону Эрланга k-го порядка, будут равны:

$$\mathrm{M}_{E_k} = k\mathrm{M}[\tau]; \qquad \nu_{E_k} = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

где $k = 1, 2, \ldots$ – параметр распределения Эрланга, принимающий только целочисленные значения.

Отсюда, для заданных реальных (измеренных) значений математического ожидания t и коэффициента вариации $\nu \; (0 < \nu < 1)$ некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, параметры аппроксимирующего распределения Эрланга будут определяться следующим образом:

$$k = \left]\frac{1}{\nu^2}\right[; \qquad \mathrm{M}[\tau] = \frac{t}{k}, \qquad (1)$$

где $]x[$ означает *ближайшее целое, большее* x, поскольку параметр k может принимать только целочисленные значения.

Пример. Пусть $\nu = 0{,}25$ и t=50, тогда в соответствии с (1):

$$k = \left]\frac{1}{\nu^2}\right[= \left]\frac{1}{0{,}25}\right[= 4; \qquad \mathrm{M}[\tau] = \frac{t}{k} = \frac{50}{4} = 12{,}5.$$

2. Аппроксимация распределения с коэффициентом вариации $\nu > 1$

Положим, что математическое ожидание и коэффициент вариации некоторой случайной величины τ, определенной в положительной области действительных чисел, соответственно равны t и ν, причем $\nu > 1$.

Для аппроксимации закона распределения такой случайной величины в теории массового обслуживания часто используют гиперэкспоненциальное распределение, представляющее собой композицию экспоненциальных распределений.

В простейшем случае гиперэкспоненциальное распределение может быть представлено в виде двух экспоненциальных распределений (рис.3).

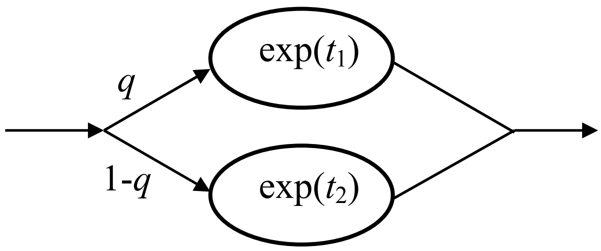

Рис.3.Двухфазное представление гиперэкспоненциального распределения

Параметрами такого распределения являются: t_1 и t_2 – математические ожидания первого и второго экспоненциального распределения соответственно, q – вероятность формирования случайной величины по первой экспоненте. Полученное таким образом распределение является трехпараметрическим. Это означает, что аппроксимация таким распределением может выполняться по трем числовым моментам. Выбор значений параметров гиперэкспоненциального распределения только по двум моментам (математическому ожиданию и коэффициенту вариации) предполагает наличие некоторого произвола.

Таким образом, задача аппроксимации гиперэкспоненциальным распределением сводится к определению значений параметров t_1, t_2 и q в зависимости от известных значений математического ожидания t и коэффициента вариации ν аппроксимируемого закона распределения случайной величины τ.

Математическое ожидание и второй начальный момент гиперэкспоненциального распределения соответственно равны:

$$t = q\,t_1 + (1-q)\,t_2;$$

$$t^{(2)} = 2[q\,t_1^2 + (1-q)\,t_2^2].$$

Тогда коэффициент вариации гиперэкспоненциального распределения:

$$\nu^2 = \frac{2[q t_1^2 + (1-q) t_2^2]}{t^2} - 1.$$

Параметры q, t_1, t_2 гиперэкспоненциального распределения выбираются на основе следующих выражений:

$$q \le \frac{2}{1+\nu^2}; \tag{2}$$

$$t_1 = \left[1 + \sqrt{\frac{1-q}{2q}(\nu^2 - 1)}\right] t; \tag{3}$$

$$t_2 = \left[1 - \sqrt{\frac{q}{2(1-q)}(\nu^2 - 1)}\right] t. \tag{4}$$

Выражения (1) - (3) можно использовать для аппроксимации любого закона распределения с коэффициентом вариации $\nu > 1$ двухфазным (см. рис.3) гиперэкспоненциальным распределением, для чего достаточно выбрать значение вероятности q из условия (1) и рассчитать значения t_1 и t_2 в соответствии с (2) и (3).

Рассмотрим частный случай, когда $q = \frac{2}{1+\nu^2}$. Подставляя это выражение в (2) и (3), получим:

$$t_1 = \frac{\nu^2 + 1}{2} t; \quad t_2 = 0. \tag{5}$$

Последние выражения соответствуют однофазному представлению гиперэкспоненциального распределения (рис.4), которое является частным случаем так называемого ***распределения Кокса***.

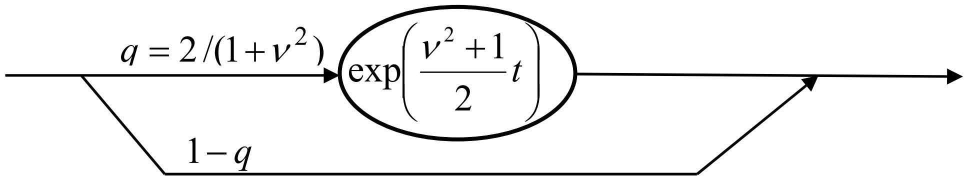

Рис.4. Однофазное распределение Кокса

Пример. Пусть $\nu = 3$, тогда в соответствии с (2) $q \le \frac{2}{1+3^2} = 0{,}2$.

1) Выберем $q = 0{,}1$, тогда в соответствии с (3) и (4):

$$t_1 = 7t; \qquad t_2 = \frac{1}{3} t.$$

2) Выберем $q = 0{,}2$, тогда в соответствии с (5):

$$t_1 = \frac{3^2 + 1}{2} t = 5t; \qquad t_2 = 0.$$