

Университет ИТМО

Кафедра вычислительной техники

**Отчёт по Домашней работе №1**  
По дисциплине  
«Моделирование»

Студенты: *Прендота А.В*

*Гр.Р3301*

*Вариант 1/1*

Преподаватель: *Муравьева-Витковская Л.А*

Санкт-Петербург, 2015.

### Цель работы

Изучение метода марковских случайных процессов и его применение для исследования простейших моделей - систем массового обслуживания (СМО) с однородным потоком заявок.

### Постановка задачи

Требуется разработать и рассчитать марковские модели многоканальных СМО с однородным потоком заявок, а также осуществить выбор наилучшего варианта построения СМО в соответствии с заданным критерием эффективности.

### Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

СИСТЕМА_1		СИСТЕМА_2		Критерий эф-ти
П	ЕН	П	ЕН	
2	4/0	3	1/0/0	максимальная производительность системы

### Параметры нагрузки (в секундах)

Интенс. потока	Ср.длит обслуж.	Вероятности занятия прибора ...		
$\lambda$ (1/с)	b (с)	П1	П2	П3
0,1	25	1/3	1/3	1/3

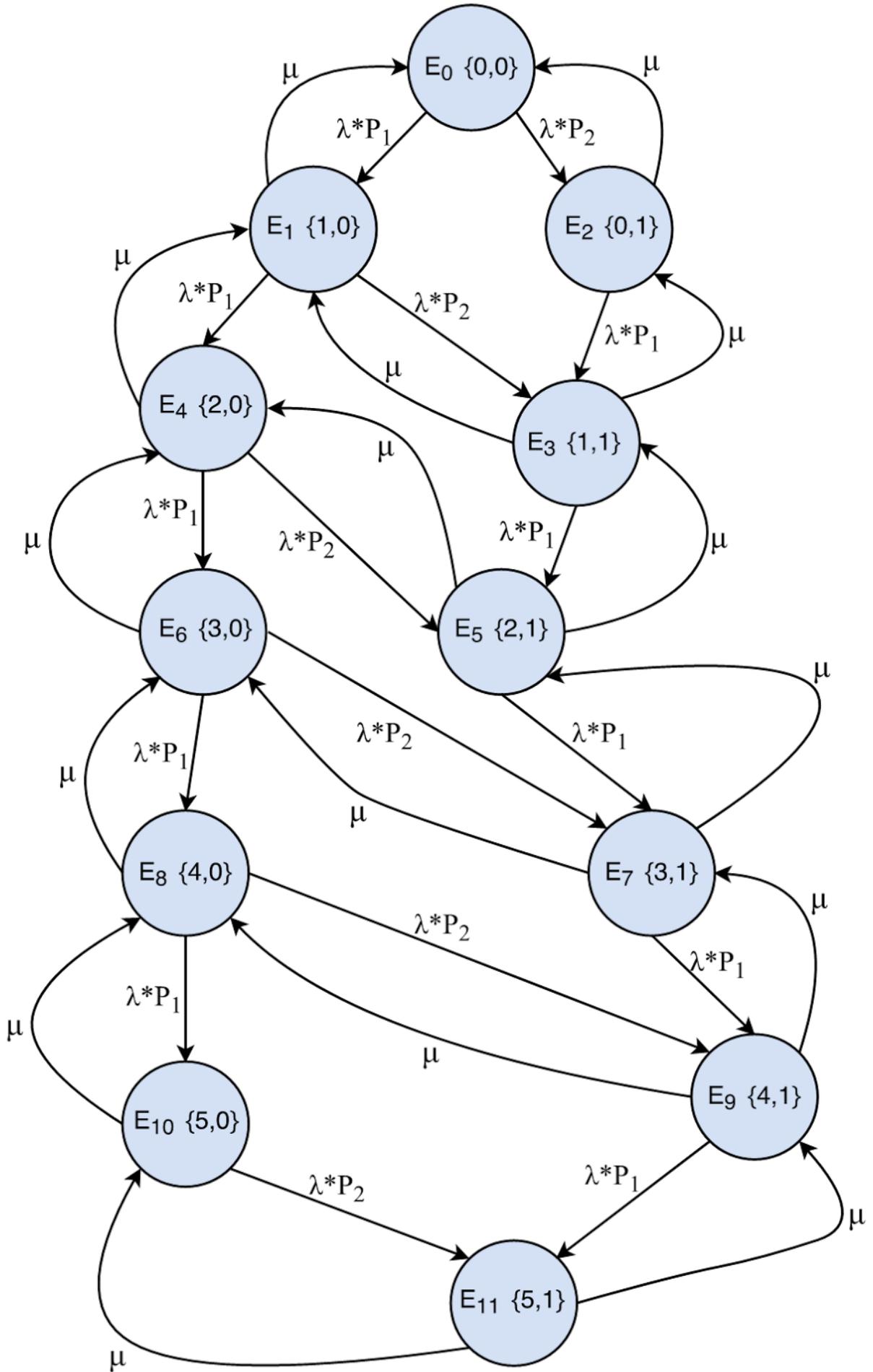
### Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы

$E_{numb}$  {заявки на 1 приборе, заявки на 2 приборе, ...}

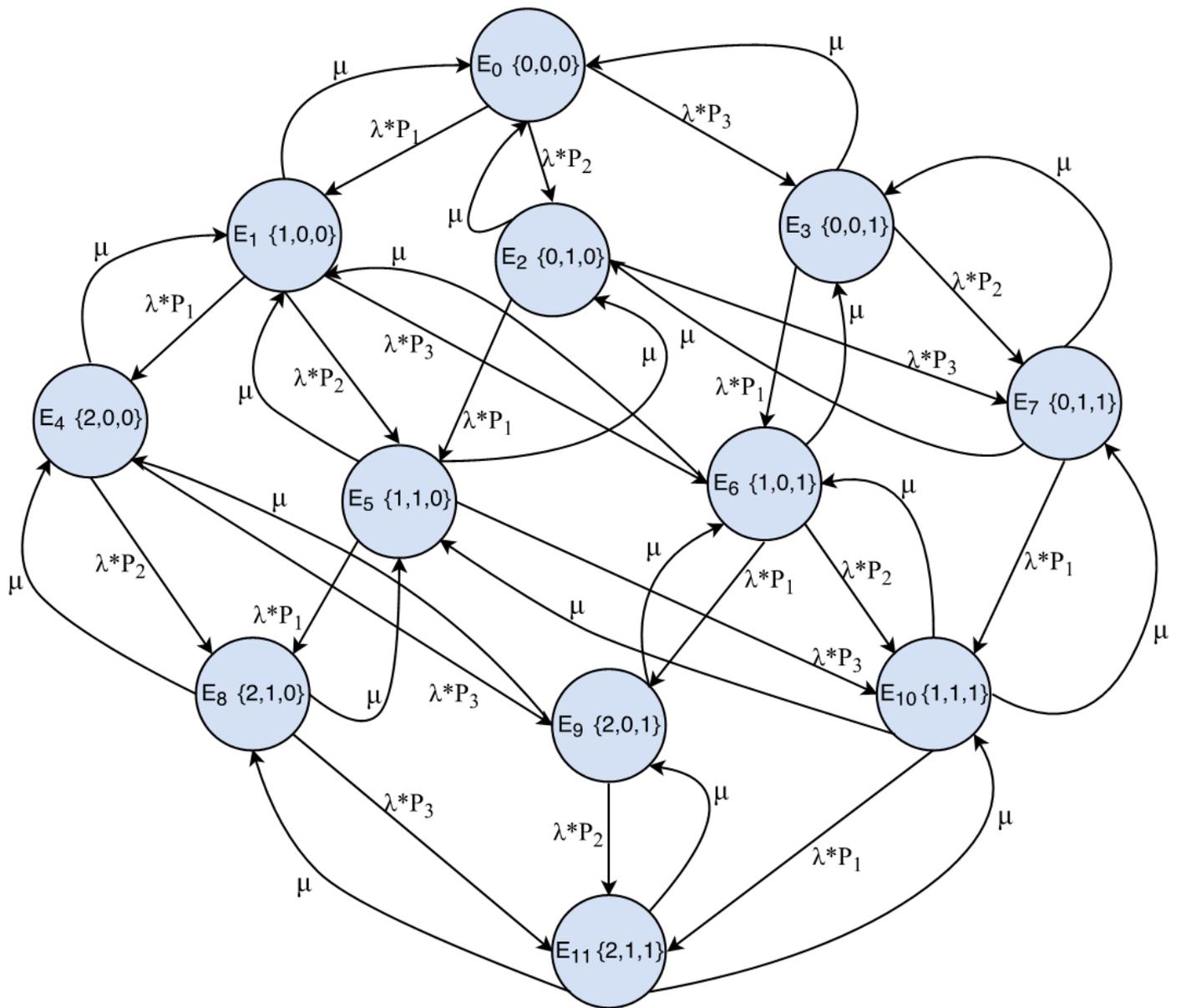
Система 1	Система 2
$E_0\{0,0\}$	$E_0\{0,0,0\}$
$E_1\{1,0\}$	$E_1\{1,0,0\}$
$E_2\{0,1\}$	$E_2\{0,1,0\}$
$E_3\{1,1\}$	$E_3\{0,0,1\}$
$E_4\{2,0\}$	$E_4\{2,0,0\}$
$E_5\{2,1\}$	$E_5\{1,1,0\}$
$E_6\{3,0\}$	$E_6\{1,0,1\}$
$E_7\{3,1\}$	$E_7\{0,1,1\}$
$E_8\{4,0\}$	$E_8\{2,1,0\}$
$E_9\{4,1\}$	$E_9\{2,0,1\}$
$E_{10}\{5,0\}$	$E_{10}\{1,1,1\}$
$E_{11}\{5,1\}$	$E_{11}\{2,1,1\}$

Размеченный граф переходов марковского процесса

а) Система 1



б) Система 2



## Матрицы интенсивностей переходов.

а). Система №1.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	$-\lambda$	$\lambda^* p1$	$\lambda^* p2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\mu$	$-\mu - \lambda$	0	$\lambda^* p2$	$\lambda^* p1$	0	0	0	0	0	0	0
2	$\mu$	0	$-\mu - \lambda^* p1$	$\lambda^* p1$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$\mu$	$\mu$	$-2\mu - \lambda^* p1$	0	$\lambda^* p1$	0	0	0	0	0	0
4	0	$\mu$	0	0	$-\mu - \lambda$	$\lambda^* p2$	$\lambda^* p1$	0	0	0	0	0
5	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$-2\mu - \lambda p1$	0	$\lambda^* p1$	0	0	0	0
6	0	0	0	0	$\mu$	0	$-\mu - \lambda$	$\lambda^* p2$	$\lambda^* p1$	0	0	0
7	0	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$-2\mu - \lambda^* p1$	0	$\lambda^* p1$	0	0
8	0	0	0	0	0	0	$\mu$	0	$-\mu - \lambda$	$\lambda^* p2$	$\lambda^* p1$	0
9	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$-2\mu - \lambda p1$	0	$\lambda^* p1$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	0	$-\mu - \lambda p2$	$\lambda^* p2$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$-2\mu$

$$E0 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2) - \mu \cdot (E1 + E2) = 0$$

$$E1 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E4 + E3) + \lambda \cdot p1 \cdot E0] = 0$$

$$E2 \cdot (\lambda \cdot p1 + \mu) - [\mu \cdot (E3) + \lambda \cdot p2 \cdot E0] = 0$$

$$E3 \cdot (\lambda \cdot p1 + 2\mu) - [\mu \cdot (E5) + \lambda \cdot p1 \cdot E2 + \lambda \cdot p2 \cdot E1] = 0$$

$$E4 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E5 + E6) + \lambda \cdot p1 \cdot E1] = 0$$

$$E5 \cdot (\lambda \cdot p1 + 2\mu) - [\mu \cdot (E7) + \lambda \cdot p1 \cdot E3 + \lambda \cdot p2 \cdot E4] = 0$$

$$E6 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E7 + E8) + \lambda \cdot p1 \cdot E4] = 0$$

$$E7 \cdot (\lambda \cdot p1 + 2\mu) - [\mu \cdot (E9) + \lambda \cdot p1 \cdot E5 + \lambda \cdot p2 \cdot E6] = 0$$

$$E8 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E9 + E10) + \lambda \cdot p1 \cdot E6] = 0$$

$$E9 \cdot (\lambda \cdot p1 + 2\mu) - [\mu \cdot (E11) + \lambda \cdot p1 \cdot E7 + \lambda \cdot p2 \cdot E8] = 0$$

$$E10 \cdot (\lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E11) + \lambda \cdot p1 \cdot E8] = 0$$

$$E0 + E1 + E2 + E3 + E4 + E5 + E6 + E7 + E8 + E9 + E10 + E11 - 1 = 0$$

б). Система №2.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	$-\lambda$	$\lambda * p1$	$\lambda * p2$	$\lambda * p3$	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\mu$	$-\mu - \lambda$	0	0	$\lambda * p1$	$\lambda * p2$	$\lambda * p3$	0	0	0	0	0
2	$\mu$	0	$-\mu - \lambda$ ( $p1+p3$ )	0	0	$\lambda * p1$	0	$\lambda * p1$	0	0	0	0
3	$\mu$	0	0	$-\mu - \lambda$ ( $p1+p2$ )	0	0	$\lambda * p1$	$\lambda * p1$	0	0	0	0
4	0	$\mu$	0	0	$-\mu - \lambda$ ( $p2+p3$ )	0	0	0	$\lambda * p2$	$\lambda * p3$	0	0
5	0	$\mu$	$\mu$	0	0	$-2\mu - \lambda$ ( $p1+p3$ )	0	0	$\lambda * p1$	0	$\lambda * p3$	0
6	0	$\mu$	0	$\mu$	0	0	$-2\mu - \lambda$ ( $p1+p2$ )	0	0	$\lambda * p1$	$\lambda * p2$	0
7	0	0	$\mu$	$\mu$	0	0	0	$-2\mu - \lambda$ $p1$	0	0	$\lambda * p1$	0
8	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	0	0	$-2\mu - \lambda$ $p3$	0	0	$\lambda * p3$
9	0	0	0	0	$\mu$	0	$\mu$	0	0	$-2\mu - \lambda$ $p2$	0	$\lambda * p2$
10	0	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$\mu$	0	0	$-3\mu - \lambda$ $p1$	$\lambda * p1$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu$	$\mu$	$\mu$	$-3\mu$

$$E0 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \lambda \cdot p3) - \mu \cdot (E1 + E2 + E3) = 0$$

$$E1 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \lambda \cdot p3 + \mu) - [\mu \cdot (E4 + E5 + E6) + E0 \cdot \lambda \cdot p1] = 0$$

$$E2 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p3 + \mu) - [\mu \cdot (E5 + E7) + E0 \cdot \lambda \cdot p2] = 0$$

$$E3 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + \mu) - [\mu \cdot (E7 + E6) + E0 \cdot \lambda \cdot p3] = 0$$

$$E4 \cdot (\lambda \cdot p2 + \lambda \cdot p3 + \mu) - [\mu \cdot (E8 + E9) + E1 \cdot \lambda \cdot p1] = 0$$

$$E5 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p3 + 2 \cdot \mu) - [\mu \cdot (E8 + E10) + E2 \cdot \lambda \cdot p1 + E1 \cdot \lambda \cdot p2] = 0$$

$$E6 \cdot (\lambda \cdot p1 + \lambda \cdot p2 + 2 \cdot \mu) - [\mu \cdot (E9 + E10) + E3 \cdot \lambda \cdot p1 + E1 \cdot \lambda \cdot p3] = 0$$

$$E7 \cdot (\lambda \cdot p1 + 2 \cdot \mu) - [\mu \cdot (E10) + E3 \cdot \lambda \cdot p2 + E2 \cdot \lambda \cdot p3] = 0$$

$$E8 \cdot (\lambda \cdot p3 + 2\mu) - [\mu \cdot (E11) + E5 \cdot \lambda \cdot p1 + E4 \cdot \lambda \cdot p2] = 0$$

$$E9 \cdot (\lambda \cdot p2 + 2\mu) - [\mu \cdot (E11) + E6 \cdot \lambda \cdot p1 + E4 \cdot \lambda \cdot p3] = 0$$

$$E10 \cdot (\lambda \cdot p1 + 3\mu) - [\mu \cdot (E11) + E7 \cdot \lambda \cdot p1 + E6 \cdot \lambda \cdot p2 + E5 \cdot \lambda \cdot p3] = 0$$

$$E0 + E1 + E2 + E3 + E4 + E5 + E6 + E7 + E8 + E9 + E10 + E11 - 1 = 0$$

### Стационарные вероятности состояний.

Номер состояния	Система №1		Система №2	
	Обозначение	Вероятность	Обозначение	Вероятность.
0	E <sub>0</sub>	0.0940	E <sub>0</sub>	0.1177
1	E <sub>1</sub>	0.0783	E <sub>1</sub>	0.0981
2	E <sub>2</sub>	0.1566	E <sub>2</sub>	0.0981
3	E <sub>2</sub>	0.1305	E <sub>2</sub>	0.0981
4	E <sub>4</sub>	0.0653	E <sub>4</sub>	0.0817
5	E <sub>5</sub>	0.1088	E <sub>5</sub>	0.0817
6	E <sub>6</sub>	0.0544	E <sub>6</sub>	0.0817
7	E <sub>7</sub>	0.0906	E <sub>7</sub>	0.0817
8	E <sub>8</sub>	0.0453	E <sub>8</sub>	0.0681
9	E <sub>9</sub>	0.0755	E <sub>9</sub>	0.0681
10	E <sub>10</sub>	0.0378	E <sub>10</sub>	0.0681
11	E <sub>11</sub>	0.0629	E <sub>11</sub>	0.0568

### Расчет характеристик СМО.

#### а) Система №1

Характеристика	Прибор	Расчетная формула	Результат	Данные	
Нагрузка	П1	$\gamma_1 = \lambda * q_1 / \mu$	0,8333	$\lambda$	0,1
	П2	$\gamma_2 = \lambda * q_2 / \mu$	1,6665	$\mu$	0,04
	Сумм.	$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$	2,4998	$q_1$	0,3333
Загрузка	П1	$\rho_1 = p_1 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11}$	0,7494	$q_2$	0,6666
	П2	$\rho_2 = p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 + p_{11}$	0,6249		
	Сумм.	$\rho = (\rho_1 + \rho_2) / 2$	0,6872	$p_0$	0,094
Длина очереди	П1	$l_1 = p_4 + p_5 + 2 * p_6 + 2 * p_7 + 3 * p_8 + 3 * p_9 + 4 * p_{10} + 4 * p_{11}$	1,2293	$p_1$	0,0783
	П2	$l_2 = 0$	0,0000	$p_2$	0,1566
	Сумм.	$l = l_1 + l_2$	1,2293	$p_3$	0,1305
Число заявок	П1	$m_1 = p_1 + p_3 + 2 * p_4 + 2 * p_5 + 3 * p_6 + 3 * p_7 + 4 * p_8 + 4 * p_9 + 5 * p_{10} + 5 * p_{11}$	1,9787	$p_4$	0,0653
	П2	$m_2 = p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 + p_{11}$	0,6249	$p_5$	0,1088
	Сумм.	$M = m_1 + m_2$	2,6036	$p_6$	0,0544
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1 / \lambda'$	41,0127	$p_7$	0,0906
	П2	$w_2 = l_2 / \lambda'^2$	0,0000	$p_8$	0,0453
	Сумм.	$w = \lambda' * w_1 / \lambda' + \lambda'^2 * w_2 / \lambda' = l / \lambda'$	22,3599	$p_9$	0,0755
Время пребывания	П1	$u_1 = m_1 / \lambda'$	66,0146	$p_{10}$	0,0378
	П2	$u_2 = m_2 / \lambda'^2$	24,9918	$p_{11}$	0,0629
	Сумм.	$u = M / \lambda'$	47,3573		
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_{10} + p_{11}$	0,1007		
	П2	$\pi_2 = p_2 + p_3 + p_5 + p_7 + p_9 + p_{11}$	0,6249		
	Сумм.	$\pi = q_1 * \pi_1 + q_2 * \pi_2$	0,4501		
Производительность	П1	$\lambda'1 = \lambda * q_1 (1 - \pi_1)$	0,0300		
	П2	$\lambda'2 = \lambda * q_2 (1 - \pi_2)$	0,0250		
	Сумм.	$\lambda' = \lambda'1 + \lambda'2$	0,0550		

б). Система №2

Характеристика	Прибор	Расчетная формула	Результат	Данные	
Нагрузка	П1	$y_1 = \lambda * q_1 / \mu$	0,83325	$\lambda$	0,1000
	П2	$y_2 = \lambda * q_2 / \mu$	0,83325	$\mu$	0,0400
	П3	$y_3 = \lambda * q_3 / \mu$	0,83325	$q_1$	0,3333
	Сумм.	$y = y_1 + y_2 + y_3$	2,49975	$q_2$	0,3333
Загрузка	П1	$\rho_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_6 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11}$	0,6043	$q_3$	0,3333
	П2	$\rho_2 = p_2 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{11}$	0,4545		
	П3	$\rho_3 = p_3 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{11}$	0,4545	$\rho_0$	0,1177
	Сумм.	$\rho = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) / 3$	0,5044	$\rho_1$	0,0981
Длина очереди	П1	$l_1 = p_4 + p_8 + p_9 + p_{11}$	0,2747	$\rho_2$	0,0981
	П2	$l_2 = 0$	0,0000	$\rho_3$	0,0981
	П3	$l_3 = 0$	0,0000	$\rho_4$	0,0817
	Сумм.	$L = l_1 + l_2 + l_3$	0,2747	$\rho_5$	0,0817
Число заявок	П1	$m_1 = p_1 + 2p_4 + p_5 + p_6 + 2p_8 + 2p_9 + p_{10} + 2p_{11}$	0,879	$\rho_6$	0,0817
	П2	$m_2 = p_2 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{11}$	0,4545	$\rho_7$	0,0817
	П3	$m_3 = p_3 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{11}$	0,4545	$\rho_8$	0,0681
	Сумм.	$M = m_1 + m_2 + m_3$	1,788	$\rho_9$	0,0681
Время ожидания	П1	$w_1 = l_1 / \lambda'_1$	11,3633	$\rho_{10}$	0,0681
	П2	$w_2 = l_2 / \lambda'_2$	0,0000	$\rho_{11}$	0,0568
	П3	$w_3 = l_3 / \lambda'_3$	0,0000		
	Сумм.	$w = \lambda'_1 * w_1 / \lambda' + \lambda'_2 * w_2 / \lambda' + \lambda'_3 * w_3 / \lambda'$	4,5377		
Время пребывания	П1	$u_1 = m_1 / \lambda'_1$	36,3610		
	П2	$u_2 = m_2 / \lambda'_2$	24,9979		
	П3	$u_3 = m_3 / \lambda'_3$	24,9979		
	Сумм.	$u = M / \lambda'$	29,5355		
Вероятность потери	П1	$\pi_1 = p_4 + p_8 + p_9 + p_{11}$	0,2747		
	П2	$\pi_2 = p_2 + p_5 + p_7 + p_8 + p_{10} + p_{11}$	0,4545		
	П3	$\pi_3 = p_3 + p_6 + p_7 + p_9 + p_{10} + p_{11}$	0,4545		
	Сумм.	$\pi = q_1 * \pi_1 + q_2 * \pi_2 + q_3 * \pi_3$	0,3945		
Производительность	П1	$\lambda'_1 = \lambda * q_1 (1 - \pi_1)$	0,0242		
	П2	$\lambda'_2 = \lambda * q_2 (1 - \pi_2)$	0,0182		
	П3	$\lambda'_3 = \lambda * q_3 (1 - \pi_3)$	0,0182		
	Сумм.	$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3$	0,0606		

Для проверки средней длины очереди и среднего числа заявок в системе воспользуемся формулами Литтла.

$$l = \lambda' * w$$

$$m = \lambda' * u$$

а) Система 1

$$l = \lambda' * w = 0,0550 * 22,3599 = 1,2293$$

$$m = \lambda' * u = 0,0550 * 47,3573 = 2,6036$$

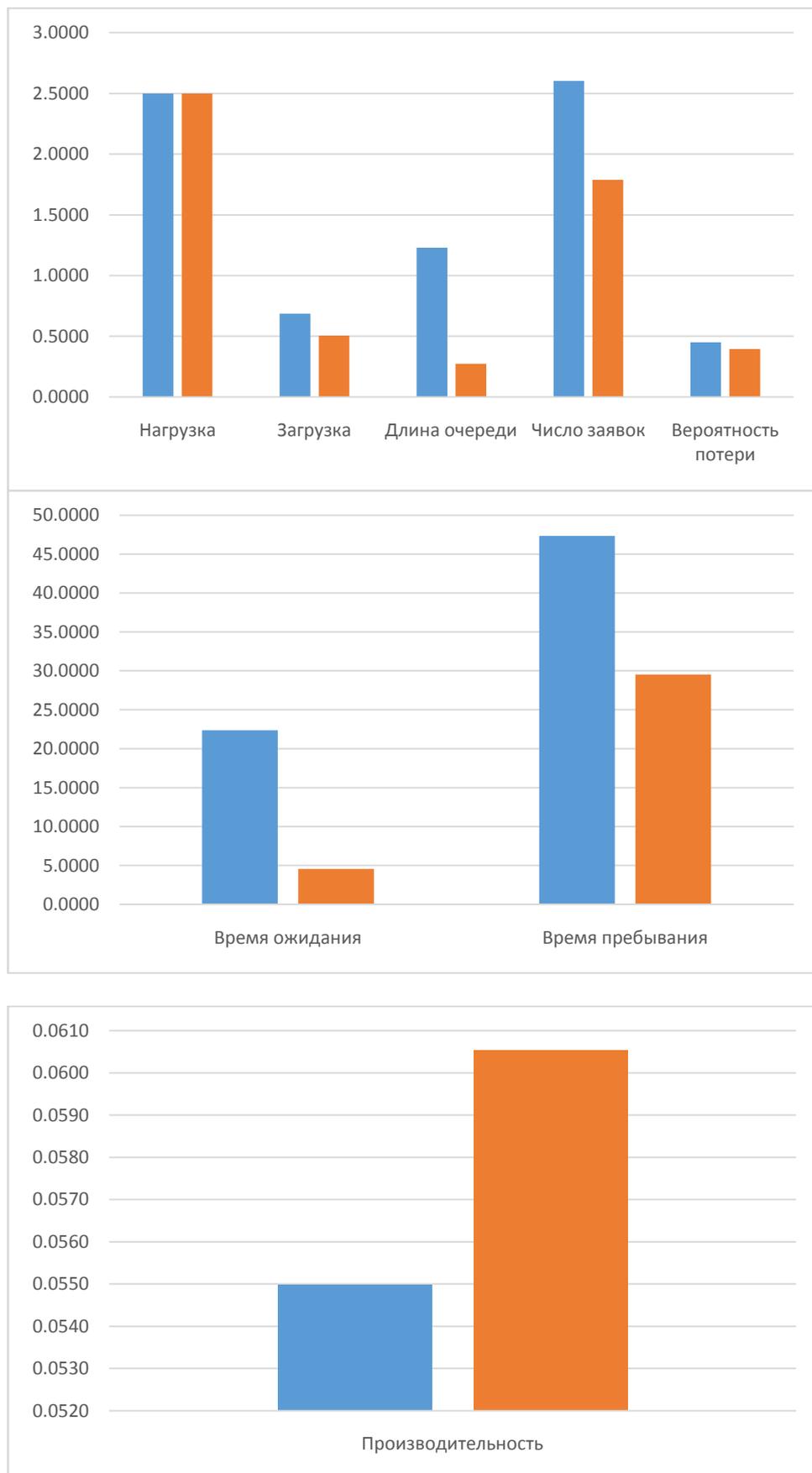
б) Система 2

$$l = \lambda' * w = 0,0606 * 4,5377 = 0,2747$$

$$m = \lambda' * u = 0,0606 * 29,5355 = 1,788$$

Рассчитанные величины совпадают с полученными в ходе лабораторной работы.

## Сравнительная характеристика



**Вывод:** согласно заданному в варианте критерию эффективности – максимальной производительности системы – лучшая организация системы под номером 2 (1/0/0) т.к. соответствующая характеристика у нее выше.