

Университет ИТМО

Кафедра вычислительной техники

**Отчёт по Домашней работе №2**

По дисциплине  
«Моделирование»

Студенты: *Прендота А.В*

*Гр.Р3301*

*Вариант 1/1*

Преподаватель: *Муравьева-Витковская Л.А*

Санкт-Петербург, 2015.

## 1. Постановка задачи

Необходимо разработать марковскую модель одноканальной СМО с неоднородным потоком заявок и приоритетным обслуживанием, а также исследовать характеристики ее функционирования.

## 2. Исходные данные

Таблица 1

Параметры структурной и функциональной организации исследуемых систем

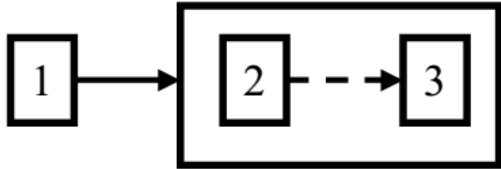
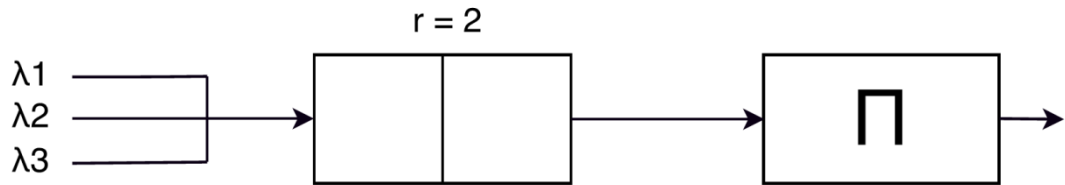
Количество классов заявок	3
Число обслуживающих приборов	1
Емкости накопителей	2
Варианты занятия прибора	-
Дисциплина обслуживания	<u>СИ2</u> 
Порядок назначения приоритетов	1-2-3
Дисциплина буферизации	(а) поступающая заявка любого класса при отсутствии свободного места в общем накопителе теряется
Дисциплина прерывания	(б) прерванная заявка возвращается в общий накопитель при наличии в нем свободных мест

Таблица 2

Параметры нагрузки (в секундах)

Интенсивность потока			Ср.длит.обслуживания		
$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
0,1	0,3	0,2	4,0	2,0	4,0

### 3. Описание исследуемой системы



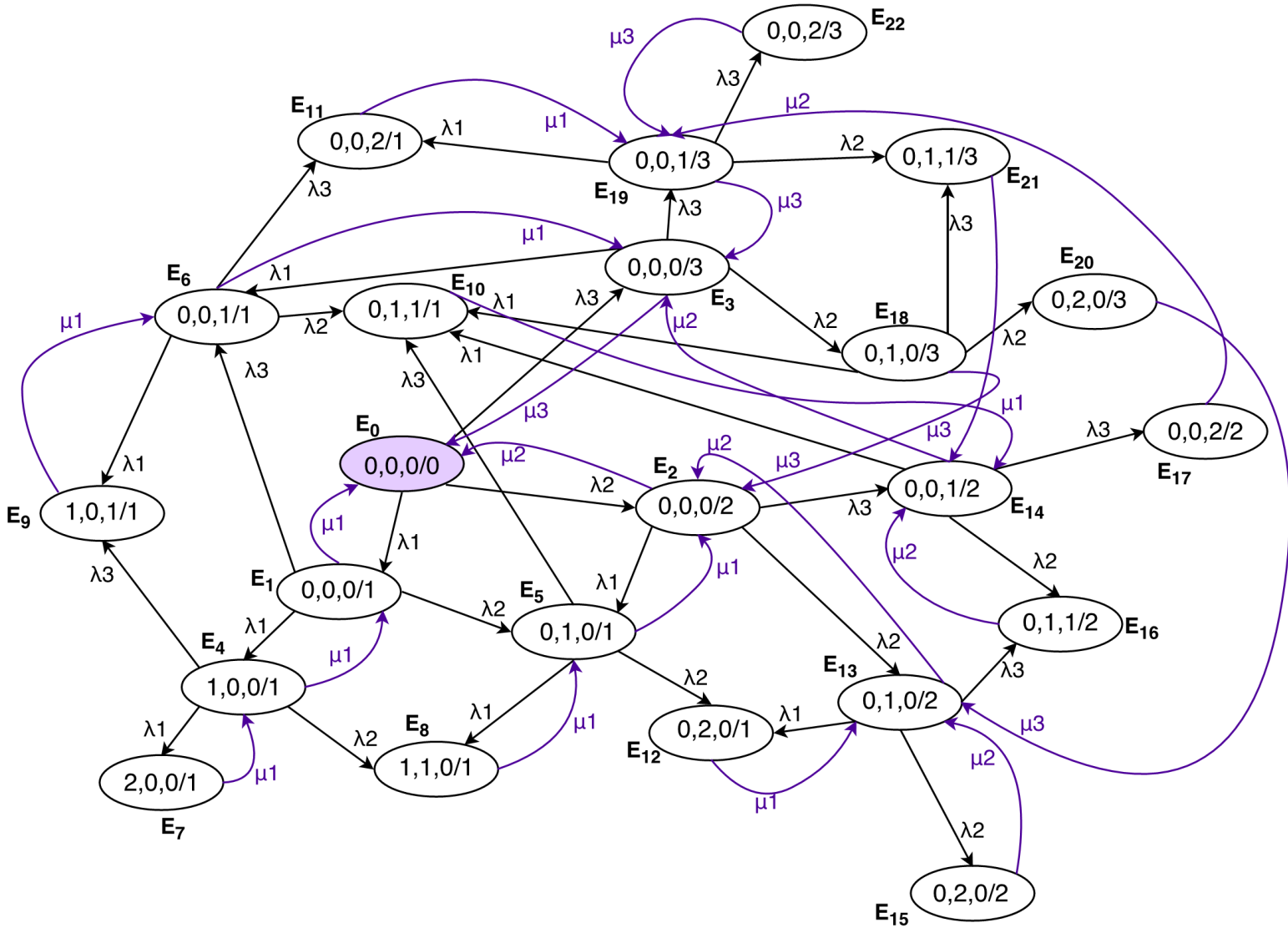
- Система одноканальная.
- Входящий поток заявок – неоднородный, в систему поступает три класса заявок.
- Накопитель – общий для всех классов заявок, его емкость составляет 2.
- Дисциплина буферизации – поступающая заявка любого класса при отсутствии свободного места в общем накопителе теряется.
- Дисциплина обслуживания – сосмешанными приоритетами: заявки первого класса имеют абсолютный приоритет по отношению к заявкам второго и третьего класса, а заявки второго класса имеют относительный приоритет по отношению к заявкам третьего класса.
- Дисциплина прерывания – прерванная заявка возвращается в общий накопитель при наличии в нем свободных мест.

### 4. Перечень состояний марковского процесса для исследуемой системы

$E_n = \{ \text{количество заявок 1 класса в накопителе, 2 класса, 3 класса /класс заявки в приборе} \}$

$E_0 = \{ 0,0,0/0 \}$	$E_6 = \{ 0,0,1/1 \}$	$E_{12} = \{ 0,2,0/1 \}$	$E_{18} = \{ 0,1,0/3 \}$
$E_1 = \{ 0,0,0/1 \}$	$E_7 = \{ 2,0,0/1 \}$	$E_{13} = \{ 0,1,0/2 \}$	$E_{19} = \{ 0,0,1/3 \}$
$E_2 = \{ 0,0,0/2 \}$	$E_8 = \{ 1,1,0/1 \}$	$E_{14} = \{ 0,0,1/2 \}$	$E_{20} = \{ 0,2,0/3 \}$
$E_3 = \{ 0,0,0/3 \}$	$E_9 = \{ 1,0,1/1 \}$	$E_{15} = \{ 0,2,0/2 \}$	$E_{21} = \{ 0,1,1/3 \}$
$E_4 = \{ 1,0,0/1 \}$	$E_{10} = \{ 0,1,1/1 \}$	$E_{16} = \{ 0,1,1/2 \}$	$E_{22} = \{ 0,0,2/3 \}$
$E_5 = \{ 0,1,0/1 \}$	$E_{11} = \{ 0,0,2/1 \}$	$E_{17} = \{ 0,0,2/2 \}$	

### 5. Размеченный граф переходов марковского процесса



## 6. Матрица интенсивностей переходов

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0	-	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	$\mu_1$	-	0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	$\mu_2$	0	-	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0
3	$\mu_3$	0	0	-	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0
4	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	$\lambda_1$	0	$\lambda_3$	0	$\lambda_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_1$	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	$\mu_1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	0	$\mu_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_1$	-	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	$\mu_2$	0	0	0	0	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	-	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_2$	0	-	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_2$	0	-	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0	$\mu_2$	0	0	0
18	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	-	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$	0
19	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	0	$\lambda_1$	0	0	0	0	0	0	0	-	0	$\lambda_2$	$\lambda_3$
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	-	0	0
21	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	0	0	0	0	0	-
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu_3$	0	0	-

Диагональные элементы матрицы интенсивностей переходов случайного процесса определяются из следующего условия: сумма элементов строки должна быть равна 0.

## 7. Стационарные вероятности состояний

Номер	Код	Вероятность	Номер	Код	Вероятность
0	$E_0 = \{0,0,0/0\}$	0.0889	12	$E_{12} = \{0,2,0/1\}$	0.0316
1	$E_1 = \{0,0,0/1\}$	0.0109	13	$E_{13} = \{0,1,0/2\}$	0.0426
2	$E_2 = \{0,0,0/2\}$	0.0540	14	$E_{14} = \{0,0,1/2\}$	0.0822
3	$E_3 = \{0,0,0/3\}$	0.0946	15	$E_{15} = \{0,2,0/2\}$	0.0256
4	$E_4 = \{1,0,0/1\}$	0.0015	16	$E_{16} = \{0,1,1/2\}$	0.0664
5	$E_5 = \{0,1,0/1\}$	0.0121	17	$E_{17} = \{0,0,2/2\}$	0.0329
6	$E_6 = \{0,0,1/1\}$	0.0159	18	$E_{18} = \{0,1,0/3\}$	0.0334
7	$E_7 = \{2,0,0/1\}$	0.0006	19	$E_{19} = \{0,0,1/3\}$	0.0701
8	$E_8 = \{1,1,0/1\}$	0.0066	20	$E_{20} = \{0,2,0/3\}$	0.0401
9	$E_9 = \{1,0,1/1\}$	0.0075	21	$E_{21} = \{0,1,1/3\}$	0.1108
10	$E_{10} = \{0,1,1/1\}$	0.0750	22	$E_{22} = \{0,0,2/3\}$	0.0561
11	$E_{11} = \{0,0,2/1\}$	0.0407			

Given

$$p_0 \cdot (l_1 + l_2 + l_3) = m_1 \cdot p_1 + m_2 \cdot p_2 + m_3 \cdot p_3$$

$$p_1 \cdot (m_1 + l_1 + l_2 + l_3) = m_1 \cdot p_4 + l_1 \cdot p_0$$

$$p_2 \cdot (m_2 + l_1 + l_2 + l_3) = p_0 \cdot l_2 + p_5 \cdot m_1 + m_2 \cdot p_{13} + p_{18} \cdot m_3$$

$$p_3 \cdot (m_3 + l_1 + l_2 + l_3) = l_3 \cdot p_0 + m_1 \cdot p_6 + m_2 \cdot p_{14} + m_3 \cdot p_{19}$$

$$p_4 \cdot (m_1 + l_1 + l_2 + l_3) = p_1 \cdot l_1 + m_1 \cdot p_7$$

$$p_5 \cdot (m_1 + l_1 + l_3 + l_2) = l_2 \cdot p_1 + l_1 \cdot p_2 + m_1 \cdot p_8$$

$$p_6 \cdot (m_1 + l_1 + l_2 + l_3) = p_1 \cdot l_3 + l_1 \cdot p_3 + m_1 \cdot p_9$$

$$p_7 \cdot m_1 = l_1 \cdot p_4$$

$$p_8 \cdot m_1 = l_2 \cdot p_4 + l_1 \cdot p_5$$

$$p_9 \cdot m_1 = l_3 \cdot p_4 + l_1 \cdot p_6$$

$$p_{10} \cdot m_1 = l_3 \cdot p_5 + l_2 \cdot p_6 + l_1 \cdot p_{14} + l_1 \cdot p_{18}$$

$$p_{11} \cdot m_1 = l_3 \cdot p_6 + l_1 \cdot p_{19}$$

$$p_{12} \cdot m_1 = l_2 \cdot p_5 + l_1 \cdot p_{13}$$

$$p_{13} \cdot (m_2 + l_1 + l_2 + l_3) = l_2 \cdot p_2 + m_1 \cdot p_{12} + m_2 \cdot p_{15} + m_3 \cdot p_{20}$$

$$p_{14} \cdot (m_2 + l_1 + l_2 + l_3) = p_2 \cdot l_3 + m_1 \cdot p_{10} + m_2 \cdot p_{16} + m_3 \cdot p_{21}$$

$$p_{15} \cdot m_2 = l_2 \cdot p_{13}$$

$$p_{16} \cdot m_2 = l_3 \cdot p_{13} + l_2 \cdot p_{14}$$

$$p_{17} \cdot m_2 = l_3 \cdot p_{14}$$

$$p_{18} \cdot (m_3 + l_1 + l_2 + l_3) = l_2 \cdot p_3$$

$$p_{19} \cdot (m_3 + l_1 + l_2 + l_3) = l_3 \cdot p_3 + m_1 \cdot p_{11} + m_2 \cdot p_{17} + m_3 \cdot p_{22}$$

$$p_{20} \cdot m_3 = l_2 \cdot p_{18}$$

$$p_{21} \cdot m_3 = l_3 \cdot p_{18} + l_2 \cdot p_{19}$$

$$p_{22} \cdot m_3 = l_3 \cdot p_{19}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{18} + p_{19} + p_{20} + p_{21} + p_{22} = 1$$

## 8. Результаты расчета характеристик функционирования системы

Характеристика	Класс заявок	Расчетная формула	Рез-т
Нагрузка	1	$\gamma_1 = \lambda_1 / \mu_1$	0,4000
	2	$\gamma_2 = \lambda_2 / \mu_2$	0,6000
	3	$\gamma_3 = \lambda_3 / \mu_3$	0,8000
	Сумм.	$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$	1,8000
Загрузка	1	$\rho_1 = p_1 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12}$	0,2024
	2	$\rho_2 = p_2 + p_{13} + p_{14} + p_{15} + p_{16} + p_{17}$	0,3037
	3	$\rho_3 = p_3 + p_{18} + p_{19} + p_{20} + p_{21} + p_{22}$	0,4051
	Сумм.	$R = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3$	0,9112
Длина очереди	1	$l_1 = p_4 + 2 * p_7 + p_8 + p_9$	0,0168
	2	$l_2 = p_5 + p_8 + p_{10} + 2 * p_{12} + p_{13} + 2 * p_{15} + p_{16} + p_{18} + 2 * p_{20} + p_{21}$	0,5415
	3	$l_3 = p_6 + p_9 + p_{10} + 2 * p_{11} + p_{14} + p_{16} + 2 * p_{17} + p_{19} + p_{21} + 2 * p_{22}$	0,6873
	Сумм.	$l = l_1 + l_2 + l_3$	1,2456
Число заявок	1	$m_1 = p_1 + 2 * p_4 + p_5 + p_6 + 3 * p_7 + 2 * p_8 + 2 * p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12}$	0,2192
	2	$m_2 = p_2 + p_5 + p_8 + p_{10} + 2 * p_{12} + 2 * p_{13} + p_{14} + 3 * p_{15} + 2 * p_{16} + p_{17} + p_{18} + 2 * p_{20} + p_{21}$	0,8452
	3	$m_3 = p_3 + p_6 + p_9 + p_{10} + 2 * p_{11} + p_{14} + p_{16} + 2 * p_{17} + p_{18} + 2 * p_{19} + p_{20} + 2 * p_{21} + 3 * p_{22}$	1,0924
	Сумм.	$m = m_1 + m_2 + m_3$	2,1568
Ср. время ожидания	1	$w_1 = l_1 / \lambda'_1$	0,3320
	2	$w_2 = l_2 / \lambda'_2$	3,5665
	3	$w_3 = l_3 / \lambda'_3$	6,7902
	Сумм.	$w = l / \lambda'$	4,1020
Ср. время пребывания	1	$u_1 = m_1 / \lambda'_1$	4,3312
	2	$u_2 = m_2 / \lambda'_2$	5,5668
	3	$u_3 = m_3 / \lambda'_3$	10,7923
	Сумм.	$u = m / \lambda'$	7,1027
Вероятность потери	1	$\pi_1 = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{20} + p_{21} + p_{22}$	0,4939
	2	$\pi_2 = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{20} + p_{21} + p_{22}$	0,4939
	3	$\pi_3 = p_7 + p_8 + p_9 + p_{10} + p_{11} + p_{12} + p_{15} + p_{16} + p_{17} + p_{20} + p_{21} + p_{22}$	0,4939
	Сумм.	$\pi = (\lambda_1 * \pi_1 + \lambda_2 * \pi_2 + \lambda_3 * \pi_3) / (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$	0,4939
Пропускн. способность	1	$\lambda'_1 = \lambda_1 (1 - \pi_1)$	0,0506
	2	$\lambda'_2 = \lambda_2 (1 - \pi_2)$	0,1518
	3	$\lambda'_3 = \lambda_3 (1 - \pi_3)$	0,1012
	Сумм.	$\lambda' = \lambda'_1 + \lambda'_2 + \lambda'_3$	0,3037

## 9. Результаты варьирования параметров

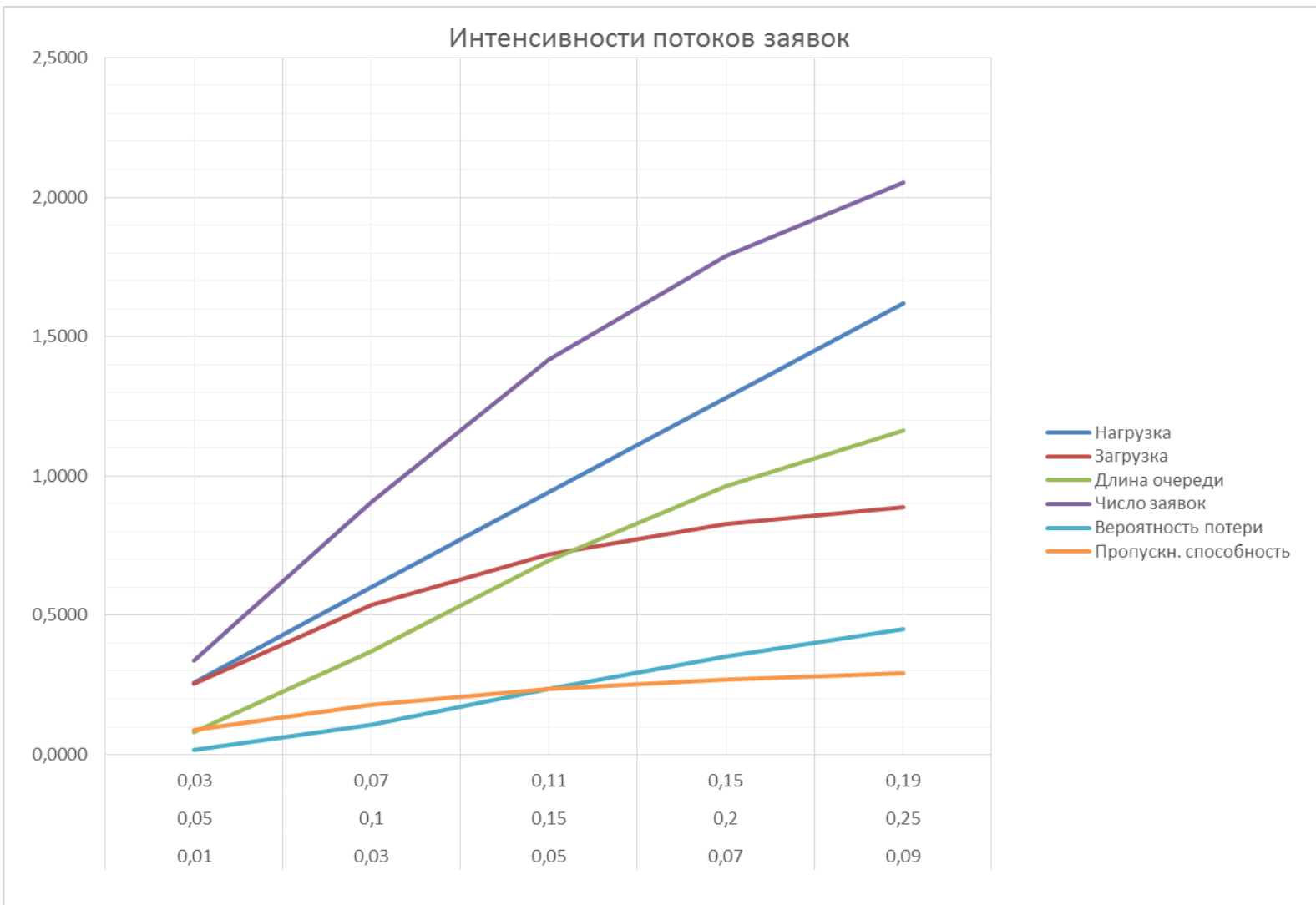
Выполним детальный анализ зависимостей характеристик системы от нагрузки путем пропорционального изменения для всех классов заявок:

а) интенсивностей поступления заявок в систему и  
 б) длительности обслуживания заявок в приборе,  
 подбирая их начальные и конечные значения так, чтобы суммарная загрузка системы находилась в интервале 0,2 - 0,9

Характеристика	Класс заявок	Интенсивности потоков заявок						Ср.длительности обслуживания					
		l1	0,01	0,03	0,05	0,07	0,09	b1	0,5	1	1,5	2	2,5
		l2	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	b2	0,2	0,5	0,8	1,1	1,4
	l3	0,03	0,07	0,11	0,15	0,19	b3	0,5	1,1	1,7	2,3	2,9	
Нагрузка	1		0,0400	0,1200	0,2000	0,2800	0,3600		0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500
	2		0,1000	0,2000	0,3000	0,4000	0,5000		0,0600	0,1500	0,2400	0,3300	0,4200
	3		0,1200	0,2800	0,4400	0,6000	0,7600		0,1000	0,2200	0,3400	0,4600	0,5800
	Сумм.		0,2600	0,6000	0,9400	1,2800	1,6200		0,2100	0,4700	0,7300	0,9900	1,2500
Загрузка	1		0,0394	0,1072	0,1530	0,1809	0,1977		0,0495	0,0935	0,1269	0,1496	0,1643
	2		0,0984	0,1786	0,2296	0,2585	0,2745		0,0594	0,1403	0,2030	0,2468	0,2760
	3		0,1181	0,2500	0,3367	0,3877	0,4173		0,0990	0,2057	0,2876	0,3440	0,3812
	Сумм.		0,2559	0,5358	0,7193	0,8272	0,8895		0,2079	0,4395	0,6174	0,7404	0,8215
Длина очереди	1		0,0014	0,0081	0,0137	0,0164	0,0172		0,0023	0,0069	0,0109	0,0132	0,0142
	2		0,0458	0,1790	0,3119	0,4105	0,4768		0,0291	0,1234	0,2394	0,3443	0,4276
	3		0,0354	0,1855	0,3714	0,5366	0,6687		0,0256	0,1189	0,2491	0,3819	0,5005
	Сумм.		0,0826	0,3726	0,6971	0,9636	1,1627		0,0571	0,2492	0,4993	0,7395	0,9423
Число заявок	1		0,0407	0,1153	0,1668	0,1974	0,2149		0,0518	0,1004	0,1377	0,1628	0,1785
	2		0,1443	0,3575	0,5415	0,6690	0,7514		0,0885	0,2637	0,4424	0,5911	0,7036
	3		0,1535	0,4355	0,7081	0,9244	1,0860		0,1246	0,3246	0,5366	0,7259	0,8817
	Сумм.		0,3385	0,9083	1,4164	1,7908	2,0522		0,2650	0,6888	1,1167	1,4799	1,7639
Ср.время ожидания	1		0,1397	0,3038	0,3588	0,3636	0,3484		0,0231	0,0738	0,1284	0,1768	0,2166
	2		0,9314	2,0042	2,7174	3,1763	3,4738		0,0981	0,4399	0,9434	1,5348	2,1685
	3		1,1980	2,9671	4,4127	5,5363	6,4098		0,1295	0,6357	1,4725	2,5535	3,8080
	Сумм.		0,9323	2,0862	2,9385	3,5504	3,9956		0,0961	0,4442	0,9839	1,6481	2,3897
Ср.время пребывания	1		4,1397	4,3038	4,3588	4,3636	4,3484		0,5231	1,0738	1,6284	2,1768	2,7166
	2		2,9314	4,0042	4,7174	5,1763	5,4738		0,2981	0,9399	1,7434	2,6348	3,5685
	3		5,1980	6,9671	8,4127	9,5363	10,4098		0,6295	1,7357	3,1725	4,8535	6,7080
	Сумм.		3,8212	5,0862	5,9708	6,5980	7,0522		0,4461	1,2275	2,2006	3,2981	4,4730
Вероятность потери	1		0,0157	0,1071	0,2348	0,3538	0,4509		0,0100	0,0648	0,1542	0,2522	0,3428
	2		0,0157	0,1071	0,2348	0,3538	0,4509		0,0100	0,0648	0,1542	0,2522	0,3428
	3		0,0157	0,1071	0,2348	0,3538	0,4509		0,0100	0,0648	0,1542	0,2522	0,3428
	Сумм.		0,0157	0,1071	0,2348	0,3538	0,4509		0,0100	0,0648	0,1542	0,2522	0,3428
Пропускн. способность	1		0,0098	0,0268	0,0383	0,0452	0,0494		0,0990	0,0935	0,0846	0,0748	0,0657
	2		0,0492	0,0893	0,1148	0,1292	0,1373		0,2970	0,2806	0,2537	0,2244	0,1972
	3		0,0295	0,0625	0,0842	0,0969	0,1043		0,1980	0,1870	0,1692	0,1496	0,1314
	Сумм.		0,0886	0,1786	0,2372	0,2714	0,2910		0,5940	0,5611	0,5075	0,4487	0,3943

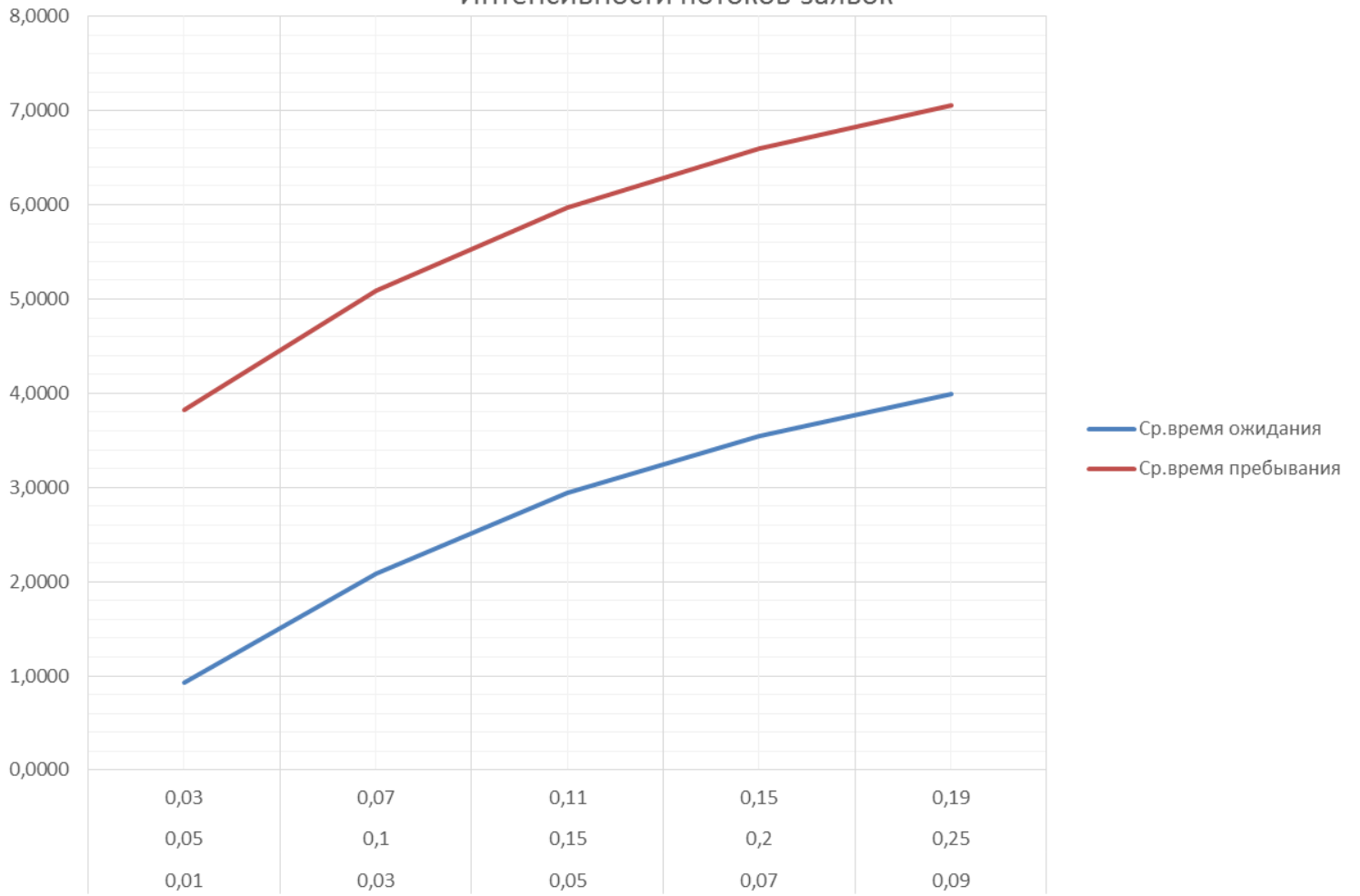


## 10. Графики



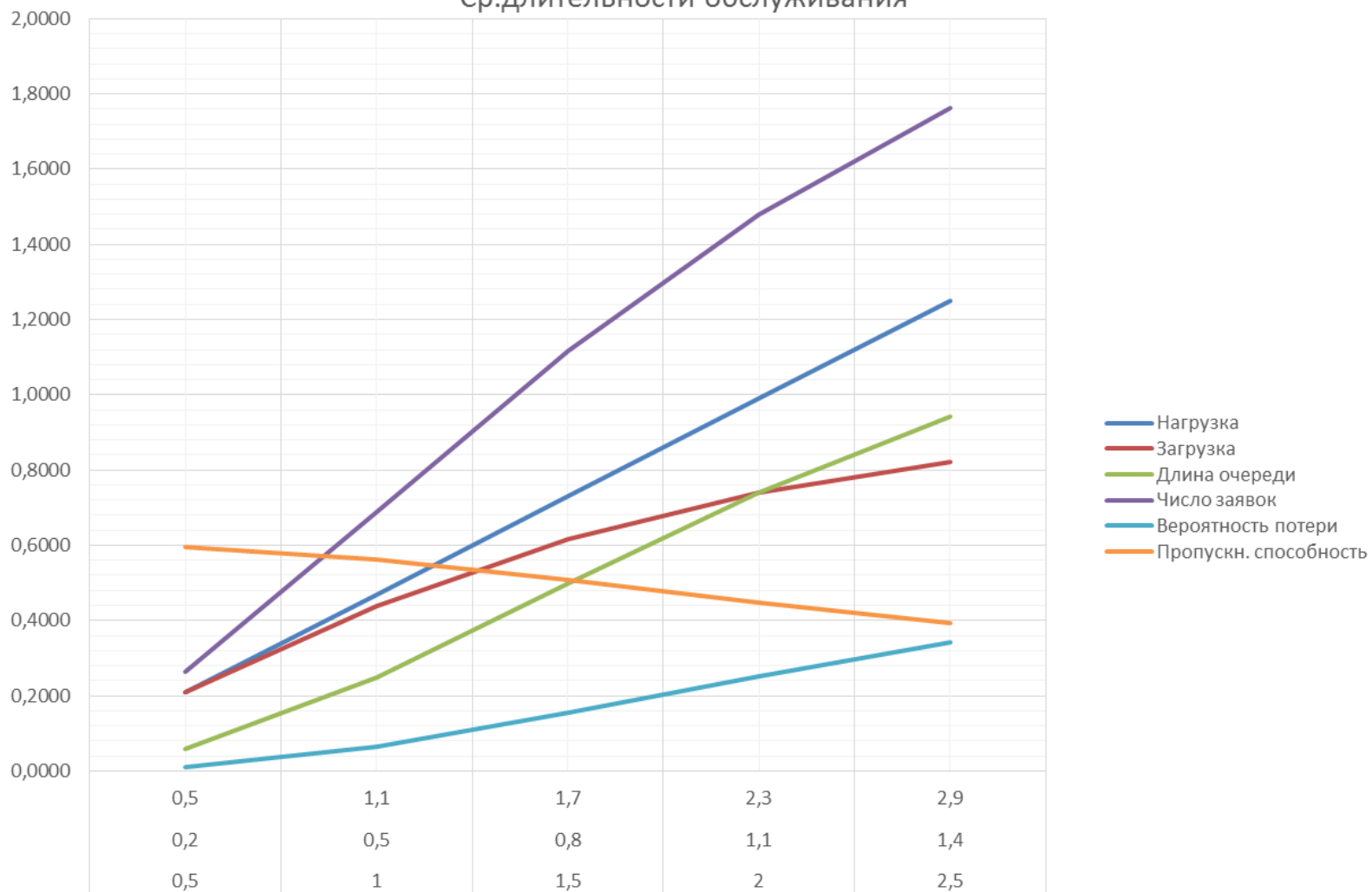
При увеличении интенсивностей потоков заявок характеристики также возрастают. Наибольшее изменение претерпевает число заявок, а также нагрузка системы и длина очереди. Вероятность потери и пропускная способность увеличиваются незначительно.

Интенсивности потоков заявок



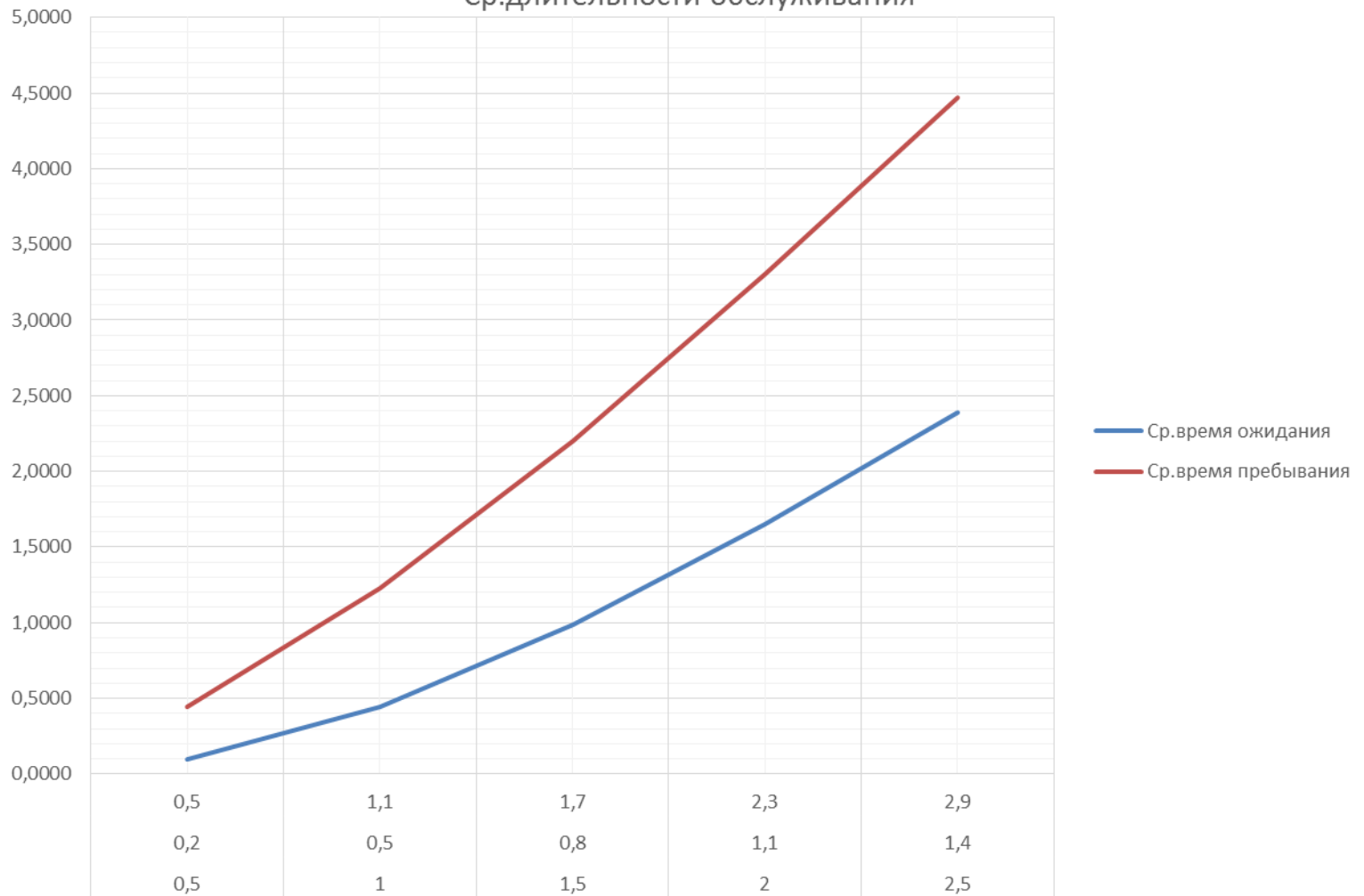
Среднее время ожидания и пребывания заявок в системе, как и следовало ожидать, также увеличивается с увеличением интенсивности.

Ср.длительности обслуживания



При увеличении средней длительности обслуживания заявок резко возрастает число заявок в системе, длина очереди и нагрузка. Производительность падает, вероятность потери заявки растет, поскольку на обслуживание заявок тратится большее количество времени. Загрузка системы возрастает.

Ср.длительности обслуживания



При увеличении средней длительности обслуживания заявок возрастает среднее время пребывания заявок в системе, а также среднее время ожидания. Чем больше времени тратится на обслуживание единственной заявки, тем больше времени она пробудет в системе в целом.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что при увеличении нагрузки качество функционирования системы ухудшается.

### 11. Заключение по работе

В ходе выполнения данной работы была разработана марковская модель одноканальной СМО с неоднородным потоком заявок и приоритетным обслуживанием, а также исследованы характеристики ее функционирования.

На основе варьирования нагрузки были выяснены закономерности изменения характеристик при увеличении интенсивности потоков заявок, а также средней длительности обслуживания.